

## KETAKSAMAAN *CAUCHY-SCHWARZ* YANG DIPERUMUM

Kus Prihantoso Krisnawan

Program Studi Matematika  
Jurusan Pendidikan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
Email: [kuspk@uny.ac.id](mailto:kuspk@uny.ac.id)

### Abstrak

Ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* mempunyai banyak aplikasi dalam matematika, misalnya pada bidang aljabar linier, analisis, dan statistik. Oleh karena itu, ketaksamaan ini menjadi salah satu ketaksamaan yang penting di matematika. Sebagai akibat dari adanya persamaan *Parallelogram*, *Polarization Identity*, dan *Apollonius' identity* memunculkan perumuman dari ketaksamaan *Cauchy-Schwarz*. Sifat determinan dari suatu matriks dengan entri-entri hasil kali dalam juga memunculkan perumuman dari ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* ini.

Kata kunci: ketaksamaan *Cauchy-Schwarz*, persamaan *Parallelogram*, *Polarization Identity*.

### PENDAHULUAN

Ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* merupakan ketaksamaan yang penting di matematika, oleh karenanya banyak orang yang berusaha memperumum ketaksamaan ini. Perumuman di sini diartikan sebagai bentuk lain dari ketaksamaan ini. Ketaksamaan *Holder* adalah salah satu bentuk perumumannya (lihat [5]). Bentuk-bentuk perumuman lain dapat di temukan pada berbagai makalah, seperti [7], [1], [4], [3], dan [6].

Pada [4], dibahas mengenai ketaksamaan *Wielandt* yang merupakan pengembangan dari ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* yang diperumum. Perumuman *Cauchy-Schwarz* ini melibatkan nilai eigen terbesar dan nilai eigen terkecil dari suatu matriks definit positif. Pada [3], perumuman ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* muncul sebagai akibat dari definisi atas sudut antara 2 subruang. Selanjutnya pada [6], ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* diperluas sehingga berlaku pada 2 subruang dengan dimensi yang berbeda. Perluasan ini diberikan melalui representasi basis-basisnya. Selanjutnya, pada [1] dibahas mengenai hasil kali dalam- $n$  dan ditunjukkan bahwa ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* juga berlaku pada hasil kali dalam- $n$ . Pendefinisian hasil kali dalam- $n$  secara khusus dibahas pada [2]. Pendefinisian hasil kali dalam- $n$  secara berbeda dibahas dalam [7]. Pendefinisian ini lebih memperluas definisi dari hasil kali dalam- $n$  yang diberikan pada [2]. Hasil kali dalam- $n$  ini kemudian disebut sebagai hasil kali dalam- $n$  yang diperumum. Hasil kali dalam- $n$  yang diperumum ini dibahas dalam lingkup ruang vektor real. Sebagai akibat dari pendefinisian ini, muncul dari ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* yang berlaku pada ruang hasil kali dalam- $n$  yang diperumum.

Perumuman ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* yang dibahas dalam makalah-makalah tersebut mempunyai bentuk yang berbeda-beda. Pada makalah ini juga akan diberikan ketaksamaan yang berbeda. Ketaksamaan ini muncul sebagai akibat dari bentuk persamaan *parallelogram* dan *polarization identity*. Selain itu, juga akan diberikan ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* yang perumum pada determinan dari suatu matriks yang entri-entrinya adalah hasil kali dalam.

### HASIL KALI DALAM

Berikut ini akan diberikan definisi dari hasil kali dalam.

**Definisi 1.** Suatu *hasil kali dalam* pada ruang vektor  $X$  adalah sebuah pemetaan dari  $X \times X$  ke lapangan skalar  $K$  atas  $X$ , dinotasikan  $\langle x, y \rangle$ , sedemikian sehingga setiap vektor  $x, y$ , dan  $z$ , serta scalar  $a$  memenuhi