BAB II
CICILAN DAN BUNGA MAJEMUK

2.1. Bunga Majemuk

Ada sedikit perbedaan antara suku bunga tunggal dan suku bunga majemuk. Pada suku bunga tunggal, besarnya bunga $B = Mp$ tidak pernah digabungkan dengan modal M. Sebaliknya pada suku bunga majemuk, besar bunga pada akhir jangka waktu selalu ditambahkan kepada modal M.
Dengan demikian modal M makin besar karena bunga yang telah didapat pada setiap akhir jangka waktu diperbungakan lagi. Dengan kata lain 'bunga berbunga'. Lambang modal pada awal jangka waktu pertama dilambangkan dengan M_0, dan pada awal jangka waktu ke-k dengan M_k.

Teorema 1: Modal sebesar M_0 ditabung di bank dengan suku bunga p% per tahun (majemuk) selama n tahun. Maka Jumlah uang tabungan pada akhir tahun ke n adalah:

$$M_k = M_0(1 + p\%)^n = M_0(1{,}0p)^n$$

Bukti:
Perlu diingat bawa besar modal pada akhir jangka waktu pertama sama dengan besar modal pada awal jangka waktu kedua.
Modal pada akhir tahun pertama = M_1 = modal pada awal tahun + bunga.
Jadi,

$$M_1 = M_0 + pM_0 = M_0(1 + p)$$

Modal pada akhir tahun kedua = M_2 = modal awal tahun + bunga
Maka,

$$M_2 = M_0(1 + p) + p\, M_0(1 + p) = M_0(1 + p)(1 + p) = M_0(1 + p)^2.$$

Dari pola ini tampak bahwa,

$$M_k. = M_0(1 + p)^k, \quad \text{dan} \quad M_n = M_0(1 + p)^n$$

Rumus ini harus dibuktikan lewat induksi matematik.

Contoh 1: Saya menabung Rp. 500.000,- di bank dengan suku bunga 3% per tahun majemuk. Berapa besar tabungan saya pada (a) akhir tahun ke–3? (b) Awal tahun ke–7?

Jawab:
(a) Besar tabungan saya pada akhir tahun ke–3 = $M_k = M_0(1 + p)^k$. Di sini $k = 3$, $p = 3\%$, $M_0 = 500.000$. Maka, $M_3 = 500.000(1 + 3\%)^3 = 500.000(1{,}03)^3$

$$= 500.000 \times 1{,}092727$$
$$= 546.363{,}6$$

Jadi, modal tersebut pada akhir tahun ke–3 = Rp. 546.364,- (dibulatkan ke–1 rupiah).

(b) Awal tahun ke–7 = akhir tahun ke–6. Maka,

$$\begin{aligned} M_6 &= 500.000(1{,}03)^8 = 500.000 \times 1{,}194052296 \\ &= 597026{,}1482 \end{aligned}$$

Jadi modal tersebut pada awal tahun ke–7 besarnya menjadi Rp. 597.026,-.

2.1.1. Nilai Akhir dan Nilai Tunai sebuah modal

Nilai Akhir A sebuah modal yang ditabung atas dasar suku bunga majemuk adalah nilai modal itu pada *akhir* jangka waktu tertentu. Contoh 1 di atas adalah nilai akhir sebuah seluruh modal dan bunganya. Nilai Tunai T sebuah modal dari sebuah modal adalah modal yang harus dibayarkan (ditabung) pada *awal* jangka waktu tertentu yang diketahui nilai akhirnya.

Teorema 2: (a) Nilai Akhir A dari modal sebesar M yang ditabung atas dasar suku bunga majemuk p% per tahun selama n tahun adalah $A = M(1 + p)^n$.

(b) Nilai Tunai T sebuah modal yang ditabung selama n tahun dengan suku bunga p% pertahun agar nilai akhir menjadi A adalah :

$$T = \frac{A}{(1+p)^n}$$

Bukti:

Bagian (a) sudah termasuk dalam Teorema 1, sehingga hanya perlu membuktikan bagian (b).

Bukti pertama. Nilai Tunai T dibayar pada awal tahun. T berbunga selama n tahun dengan suku bunga majemuk p%, menjadi $T(1 + p)^n$. Hasil ini adalah nilai akhir A. Jadi $T(1 + p)^n = A$ sehingga $T = \frac{A}{(1+p)^n}$

Bukti kedua. Rumus bunga majemuk $M_n = M_o(1 + p\%)^n$, dalam kasus ini (Nilai Tunai T), maka $M_n = A$, $M_0 = T$, n dan p sama saja, dapat diperoleh $A = T(1 + p)^n$ sehingga $T = \frac{A}{(1+p)^n}$.

Contoh 2:. Berapakah saya harus membayar (nilai tunai) ke bank pada awal tahun pertama apabila 4 tahun mendatang tabungan saya menjadi Rp. 100.000,- jika suku bunga majenuk 4% per tahun?

Jawab:

Dalam rumus $T = \frac{A}{(1+p)^n}$, diperoleh $A = 100.000$, $p = 4\%$, $n = 4$.

Maka, $T = \frac{100.000}{(1{,}04)^4} = 100.000 \times \frac{1}{(1{,}04)^4} = 100.000 \times 0{,}854804191 = 85.480{,}42$.

Jadi nilai tunai yang harus saya bayar adalah Rp.85.480,-.

2.2. Cicilan

Seseorang dapat meminjam sejumlah uang atau membeli suatu barang dengan membayarnya kembali dalam jangka waktu tertentu dan dengan bunga tertentu atas dasar kesepakatan. Pembayaran dengan cara ini disebut *kredit*.

Besar uang yang dibayarkan setiap periode pembayaran disebut *angsuran*. Cara pembayaran dan besar bunga maupun suku bunganya disepakati antara pemberi pinjaman dan peminjam. Adapun caranya ada beberapa macam seperti yang akan dibahas di bawah ini.

1. Sistem I: Besar Bunga Merata dan Angsuran Tetap

Ini adalah cara perhitungan yang termudah. Besar bunga dihitung berdasarkan besarnya nilai pinjaman, sedangkan jangka waktu sesuai dengan kesepakatan dan besarnya pinjaman.

Misalkan seseorang mengambil kredit sebesar P dalam jangka n bulan dengan suku bunga p% per bulan. Peminjam akan melunasi kreditnya dalam jangka n angsuran (bulan). Tiap angsuran $A = P/n$ harus ditambah bunga sebesar pP. Jadi besarnya tiap angsuran adalah $P/n + pP$. Nilai ini besarnya tetap. Jadi, diperoleh teorema berikut ini:

Teorema 1.1: Misalkan kredit sebesar P dengan suku bunga p% per bulan dan bunga merata dalam jangka waktu kredit n bulan. Maka besarnya angsuran A diberikan oleh rumus berikut ini:

$$A = P/n + pP.$$

Contoh 1.1:

P = 10.000.000, p = 1,25% per bulan (atau 15% per tahun), n = 12 bulan.

Angsuran setiap bulan, $A = P/n + pP$

$$= \frac{10.000.000}{12} + 0,0125 \times 10.000.000$$

$$= 833.334 + 125.000$$

$$= 968.334,-$$

Jadi angsuran setiap bulan adalah Rp. 968.334,-

Contoh 1.2: Jaka membeli sepeda motor seharga Rp 12.000.000,- dibayar cicilan dengan bunga tetap dan suku bunga 15% per tahun (atau 12%/12 = 1,25% per bulan) dengan jangka waktu 12 bulan

Jawab:

Angsuran yang harus dibayar setiap bulannya adalah (rumus $P/n + pP$) = 12.000.000/12 + 0,0125 $\times$ 12.000.000 = 1.000.000 + 150.000 = 1.150.000.

Jadi Jaka harus membayar Rp 1.150.000,00 setiap bulannya. Tabel di bawah ini menggambarkan angsuran dengan besar bunga tetap.

Tabel 1. Angsuran tetap dengan besar bunga merata sebesar 1.25%, jangka waktu 12 bulan, dan besar pinjaman Rp 12.000.000,00.

Angsuran ke	*Bunga* 1.25%	*Angsuran Pinjaman*	*Sisa Pinjaman*
1. 1.150	150	1.000	11.000
2. 1.150	150	1.000	10.000
3. 1.150	150	1.000	9.000
4. 1.150	150	1.000	8.000
5. 1.150	150	1.000	7.000
6. 1.150	150	1.000	6.000
7. 1.150	150	1.000	5.000
8. 1.150	150	1.000	4.000
9. 1.150	150	1.000	3.000
10 1.150	150	1.000	2.000
11 1.150	150	1.000	1.000
12 1.150	150	1.000	0
13.800	1.000	12.000	----

Cara ini memang paling mudah menghitung, tetapi belum tentu menguntungkan bagi peminjam atau pemilik modal.

2. Sistem II. Angsuran pokok tetap, bunga menurun

Dalam Sistem ini besar bunga dihitung dari sisa pinjaman sedangkan angsuran pokok pinjaman tetap. Jadi, jika pokok pinjaman P dengan jangka waktu n bulan dan suku bunga p, maka setiap bulan besarnya angsuran pokok adalah P/n sedang bunga dihitung dari sisa pinjaman. Perhatikanlah Tabel 2 di bawah ini:

Tabel 2. Pinjaman P, suku bunga p% per bulan menurun, jangka waktu 12 bulan

Angsuran ke	*Besar Bunga*	*Angsuran Pokok*	*Sisa Pinjaman*
1. $P/n + pP$	pP	P/n	$P - 1P/n$
2. $P/n + pP(n-1)/n$	$pP(n-1)/n$	P/n	$P - 2P/n$
3. $P/n + pP(n-2)/n$	$pP(n-2)/n$	P/n	$P - 3P/n$
…………	…………	…………	…………
…………	…………	…………	…………
n $P/n + pP/n$	pP/n	P/n	$P - nP/n$
I	II	P	0

Dalam Tabel 2, terlihat bahwa angsuran pertama terdiri dari angsuran pokok P/n ditambah dengan bunga dari sisa pinjaman yang dalam kasus angsuran pertama sisa pinjaman masih utuh P, sehingga angsuran pertama adalah $P/n + pP$. Angsuran kedua terdiri dari angsuran pokok P/n ditambah bunga dari sisa pinjaman yang dalam kasus angsuran kedua sisanya adalah $P - P/n$, sehingga besar bunganya $p(P - P/n) = pP(n - 1)/\text{n}$. Jadi, besarnya angsuran kedua adalah $P/n + pP(n - 1)/n$. Sisa pinjaman setelah angsuran kedua adalah $P - 2P/n$. Maka besarnya angsuran ketiga = $P/n + p(P - 2P/n) = P/n + pP(n - 2)/n$. Dst. Dapat dilihat pola yang terjadi. Besarnya setiap angsuran maupun keseluruhan angsuran (kolom pertama) merupakan deret aritmetika menurun dengan suku pertama adalah $P/n + pP$, dengan beda yaitu $- pP/n$, dan banyak suku yaitu n. Demikian juga *besar bunga* (kolom kedua) merupakan deret aritmetika menurun dengan suku pertama pP, dengan beda adalah $- pP/n$ dan banyak suku yaitu n. Diinggatkan bahwa jumlah deret aritmetika adalah $S_n = ½n(t_1 + t_n)$ dengan t_1 adalah suku pertama dan t_r adalah suku terakhir.

Dapat dilihat bahwa angsuran ke k, A_k adalah

$$A_k = P/n + pP(n - k + 1)/n.$$

Besar bunga angsuran ke-k, B_k, adalah (diperoleh dari rumus A_k)

$$B_k = pP(n - k + 1)/n$$

Jumlah seluruh angsuran, P_n,, adalah

$$\begin{aligned} P_n &= ½\, n\{(P/n + pP) + (P/n + pP/n)\} \\ &= P + ½pP(n + 1). \end{aligned}$$

Jumlah seluruh bunga, B_n, adalah

$$\begin{aligned} B_n &= ½n(pP + pP/n) \\ &= ½pP(n + 1). \end{aligned}$$

Tentu saja nilai ini dapat diperoleh dari jumlah seluruh angsuran dikurangi pokok pinjamannya. Jadi ditemukan teorema berikut ini:

Teorema 2.1: Misalkan kredit sebesar P dilunasi dalam jangka waktu n bulan, suku bunga p% dengan bunga menurun mengikuti sisa pinjaman. Maka besar angsuran ke-k, besarnya bunga pada angsuran ke-k, jumlah seluruh angsuran, P_n, dan jumlah seluruh bunga, B_n, diberikan oleh rumus-rumus berikut ini:

$$A_k = \frac{P + pP(n - k + 1)}{n}$$
$$B_k = pP(n - \mathrm{k} + 1)/n$$
$$P_n = P + ½pP(n + 1)$$
$$B_n = ½pP(n + 1).$$

Contoh 2.1: Badu mengambil kredit Rp 6.000.000,- dari sebuah bank dengan jangka waktu pelunasan 12 bulan dan dengan suku bunga 3% perbulan menurun menurut sisa pinjaman. Berapakah besarnya: (a) angsuran ke-5? (b) bunga angsuran ke-6, (c) seluruh angsuran, (d) seluruh bunga, dan (e) Buatlah tabel seluruh angsuran!

Jawab:

Dalam kasus ini P = 6.000.000, p = 3%, n = 12.

(a) Angsuran ke-5 dengan rumus $A_k = \dfrac{P + pP(n-k+1)}{n}$

sehingga

$$A_5 = \frac{6.000.000 + 0{,}03 \times 6.000.000 \times (12 - 5 + 1)}{12}$$

$$= 500.000 + \frac{180.000 \times 8}{12} = 500.000 + 120.000 = 620.000.$$

Angsuran ke-5 adalah Rp 620.000,-

(b) Bunga pada angsuran ke-6 dengan rumus

$B_k = pP(n - \mathrm{k} + 1)/n$. Unutuk k = 6

sehingga $B_6 = 0{,}03 \times 6.000.000 \times (12 - 6 + 1)/12$

$= (180.000 \times 7) = 15.000 \times 7 = 105.000$,-

Bunga angsuran ke-6 adalah Rp 105.000,-

(c) Angsuran keseluruhan dengan rumus

$P_n = P + ½pP(n + 1)$

sehingga $P_{12} = 6.000.000 + ½ \times 0{,}03 \times 6.000.000 \times (12 + 1)$

$= 6.000.000 + 1.1700.000 = 7.170.000$

Angsuran keseluruhan adalah Rp 6.630.000,-

(d) Bunga keseluruhan menggunakan rumus

$B_n = ½pP(n + 1)$

sehingga $B_n = ½ \times 0{,}03 \times 6.000.000 \times (12 + 1) = 1.170.000$

Bunga keseluruhan adalah Rp 1.170.000,-

(e) Tabel angsuran lengkap

Tabel ini sebaiknya memuat kolom-kolom: Angsuran, Besar Bunga, Angsuran Pokok, dan Sisa Pinjaman. Dalam baris akhir memuat jumlah masing–masing kolom untuk memeriksa kecocokan dengan data.

Tabel 3. Kredit Rp 6.000.000,- jangka waktu 12 bulan
dengan suku bunga 3% menurun menurut sisa pinjaman

Angsuran ke	*Besar Bunga*	*Angsuran Pokok*	*Sisa Pinjaman*
1. 680.000	180.000	500.000	5.500.000
2. 665.000	165.000	500.000	5.000.000
3. 650.000	150.000	500.000	4.500.000
4. 635.000	135.000	500.000	4.000.000
5. 620.000	120.000	500.000	3.500.000
6. 605.000	105.000	500.000	3.000.000
7. 590.000	90.000	500.000	2.500.000
8. 575.000	75.000	500.000	2.000.000
9. 560.000	60.000	500.000	1.500.000
10.545.000	45.000	500.000	1.000.000
11 530.000	30.000	500.000	500.000
12.515.000	15.000	500.000	0
.			
7.170.000	7.170.000	6.000.000	-

Contoh 2.2: Candra kredit mobil bekas seharga Rp 75.000.000 dengan jangka waktu 5 tahun dengan bunga 1% per bulan menurun menurut sisa pinjaman. Jika pembayaran itu setiap bulan, berapakah seluruh pembayaran angsurannya?

Jawab:

Di sini P = 75.000.000,- p = 1%, $n = 5 \times 12 = 60$

Maka dengan rumus $P_n = P + ½pP(n + 1)$, dipunyai

$$P_{60} = 75.000.000 + ½ \times 0,01 \times 75.000.000 \times (60 + 1)$$
$$= 75.000.000 + 22.875.000 = 97.875.000.$$

Seluruh pemyaran kreditnya adalah Rp 97.876.000, - dan bunga yang telah dibayarkannya adalah Rp 22.875.000,-

3. Sistem III. Angsuran merata dengan bunga menurun

Dalam sistem ini, besarnya angsuran adalah merata, artinya setiap kali mengangsur besarnya tidak berubah, sedangkan besar bunganya menurun menurut sisa pinjaman. Jika A adalah besarnya angsuran yang merata, maka tentulah bahwa A diperhitungkan sebagai angsuran pokok yang berubah-ubah dan bunga yang juga berubah-ubah. Umpamanya, besarnya kredit P dan suku bunga p%. Pada angsuran pertama besarnya bunga adalah pP. Jadi besar angsuran pokok adalah $A - pP$, dan sisa pinjaman adalah $P - (A - pP) = P + pP - A$.

Teorema 3.1: Dalam sistem kredit dengan angsuran merata, jika besar pinjaman (kredit) adalah P, suku bunga p%, jangka waktu n, maka besarnya angsuran setiap bulannya, A, adalah

$$A = \frac{pP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}.$$

Bukti pertama. Lihatlah Tabel 3 di bawah ini

Tabel angsuran merata (A) pinjaman P, suku bungan p% menurun menurut sisa pinjaman, jangka waktu n.

Angsuran ke	*Bunga*	*Angsuran Pokok*	*Sisa Pinjaman*
1. A	pP	$A - pP$	$P - A + pP$
2. A	$p(P - A + pP)$	$A - p(P - A + pP)$	$P - A + pP - [A - p(P - A + pP)]$
Dst.			

Perhatikanlah: Angsuran pokok I: = $A - pP$, sisa pinjaman $P + pP - A$

Angsuran pokok II = $A - p(P - A + pP) = A - pP + pA - p^2P$

$= A(1 + p) - pP(1 + p) = (A - pP)(1 + p)$.

dan seterusnya.

Melihat polanya maka, diperkirakan

Angsuran ke-n = $(A - pP)(1 + p)^{n-1}$.

Jumlah angsuran I s/d ke–n adalah jumlah deret geometrik dengan suku pertama = $A - pP$, rasio = $(1 + p)$, dan banyak suku n. Tetapi jumlah ini haruslah sama besar dengan pinjaman P (lunas). Jadi, diperoleh

$$P = \frac{(A - pP)\left[(1+p)^n - 1\right]}{(1+p) - p} = \frac{(A - pP)\left[(1+p)^n - 1\right]}{p}.$$

$$pP = A(1 + p)^n - A - pP(1 + p)^n + pP$$

$$0 = A(1 + p)^n - A - pP(1 + p)^n$$

$$A[(1 + p)^n - 1] = pP(1 + p)^n.$$

sehingga $$A = \frac{pP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}.$$

Bukti dengan induksi matematik.

Tuliskan rumus itu dalam bentuk: $A(1 + p)^n - A = pP(1 + p)^n$.

Pangkal induksi: untuk $n = 1$, memberikan

$$A(1 + p) - A = pP(1 + p)$$

$$A + pA - A = pP(1 + p)$$
$$pA = pP(1 + p)$$
$$A = P + pP$$
$$A - pP = P$$

Ruas kiri berbunyi angsuran pokok, ruas kanan berbunyi besar pinjaman. Benar, sebab sekali dibayar (untuk $n = 1$) sudah lunas.

Kita coba untuk $n = 2$ (walaupun sebenarnya tidak perlu)

$$A(1 + p)^2 - A = pP(1 + p)^2.$$
$$\Leftrightarrow \quad A(1 + 2p + p^2) - A = pP(1 + 2p + p^2)$$
$$\hat{U} \quad Ap(2 + p) = pP(1 + 2p + p^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad A(2 + p) = P(1 + 2p + p^2) \quad \to \text{benar,}$$

sebab, pada waktu angsuran kedua telah dilaksanakan, sisa pinjaman harus nol, yakni, $P - 2A - pA + 2pP + p^2P = 0$. Sisa pinjaman setelah angsuran kedua sama dengan sisa angsuran pertama yaitu $P - A + pP$ dikurangi angsuran kedua sebesar $A - (P - (A - pP)p)$, lihat tabel.

Hipotesis induksi:. Rumus dianggap benar untuk $n = k$. Jadi

$$A(1 + p)^k - A = pP(1 + p)^k$$

Langkah: Akan dibuktian bahwa rumus juga benar untuk $n = k + 1$.

Pada angsuran ke–$(k + 1)$ sisa pinjaman sudah habis (nol). Jadi,

$$[A(1 + p)^k - A]/p - P(1 + p)^k + A + Ap[(1 + p)^k - 1]/p - pP(1 + p)^k = 0,$$
$$\Leftrightarrow \quad A[(1 + p)^k - 1](1 + p)/p - A/p - P(1 + p)^{k+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad A[(1 + p)^{k+1} - 1]/p - P(1 + p)^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad A(1 + p)^{k+1} - A = pP(1 + p)^{k+1}$$

Jadi terbukti rumus benar untuk $n = k + 1$. Kesimpulannya rumus benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Terdapat korolari (teorema akibat) untuk Teorema 3.1 ini, yakni tentang jumlah seluruh pembayaran kreditnya, yaitu,

$$n \times A = n \times \frac{pP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} = \frac{npP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}.$$

Korolari 3.2: Misalkan seseorang mempunyai kredit sebesar P dengan angsuran merata A, suku bunga p%, dan jangka waktu pelunasan n bulan, maka jumlah seluruh angsuran, S_n, diberikan oleh rumus berikut ini

$$S_n = nA = \frac{npP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}.$$

Contoh 3.1: P = 10.000.000, p = 2%, dan n = 12, maka besarnya angsuran

$$A = \frac{pP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} = \frac{0{,}02 \times 10.000.000 \times 1{,}02^{12}}{1{,}02^{12} - 1}$$

$$A = \frac{200.000 \times 1{,}268241795}{0{,}269241795} = 945.595{,}9664.$$

Jadi besarnya angsuran Rp 945.596,-

Jumlah seluruh angsuran = nA = 12 × 945.595,9664 = 11.347.151,6.

Jadi jumlah seluruh angsuran Rp 11.347.152,-

Contoh 3.2: Diberikan P = 10.000.000, p = 2%, dan n = 24 dengan angsuran merata.

Jawab:

Besarnya angsuran $A = \frac{pP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$

$$= \frac{0{,}02 \times 10.000.000 \times 1{,}02^{24}}{1{,}02^{24} - 1}$$

$$= \frac{0{,}02 \times 10.000.000 \times 1{,}608437249}{608437249}$$

= 528.710,9726

Jadi besarnya angsuran Rp 528.711,-

Jumlah seluruh angsuran = nA = 24 × 528.710,9726 = 12.689.063,34.

Jadi besarnya seluruh angsuran = Rp 12.689.063,-

Contoh 3.3: David membuat perjanjian kredit sepeda motor bekas seharga Rp 8.000.000,- . Ia sepakat setiap bulan mengangsur Rp 200.000,- dan pemilik kendaraan menerapkan suku bunga 2%. Dalam berapa bulan David akan melunasi kreditnya**?**

Jawab:

Besarnya angsuran $A = \frac{pP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$

Di sini A = 200.000, p = 2%, P = 8.000.000, dan n akan dicari. Jelas bahwa

$$200.000 = \frac{0{,}02 \times 8.000.000 \times 1{,}02^n}{1{,}02^n - 1}$$

$$200.000 = \frac{160.000 \times 1{,}02^n}{1{,}02^n - 1}$$

Kedua ruas dibagi dengan 40.000,

$$5 \times (1{,}02^n - 1) = 4 \times 1{,}02^n$$
$$5 \times 1{,}02^n - 5 = 4 \times 1{,}02^n$$
$$(5 - 4) \times 1{,}02^n = 5$$
$$1{,}02^n = 5$$
$$n \log 1{,}02 = \log 5$$

$$n \times 0{,}008600171762 = 0{,}698970004$$
$$n = 0{,}698970004 : 0{,}008600171762 = 81{,}27395867$$

Jadi jangka waktu kredit adalah 82 bulan.

Hasil 82 bulan adalah pembulatan. Jadi dapat diperkirakan bahwa angsuran tetap itu tentu kurang sedikit dari 200.000. Untuk n = 82, maka angsuran tetapnya sebesar:

$$A = \frac{pP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} = \frac{0{,}02 \times 8.000.000 \times 1{,}02^{82}}{1{,}02^{82} - 1}$$
$$A = 199.288{,}8046.$$

Jadi angsuran merata itu sebenarnya cukup Rp 199.288,- berbeda Rp 712,- dari kesediaan David.

Contoh 3.4: Edi mampu menyisihkan penghasilannya Rp 250.000,- sebulan selama 10 tahun. Berapakah kredit yang dapat dimintanya jika pemberi kredit menetapkan suku bunga 2% dengan angsuran merata.

Jawab:

Ini tentulah sistem III, sebab angsurannya merata. Jadi dapat digunakan rumus berikut:

$$A = \frac{pP(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$$

Di sini A = 250.000, p = 2%, n = 10 × 12 = 120. Ingin dicaari P, besar pinjaman yang mungkin. Masukkan data ke dalam rumus di atas

$$250.000 = \frac{0{,}02 \times P \times 1{,}02^{120}}{1{,}02^{120} - 1}$$

$$P = \frac{250.000 \times (1{,}02^{120} - 1)}{0{,}02 \times 1{,}02^{120}} = 11.338.847{,}13.$$

Jadi Edi dapat mengajukan kredit sebesar Rp 11.338.847,-

Pertanyaan:

1. Sebutkan tiga sistem kredit yang telah dibahas?
2. Manakah sistem kredit yang paling menguntungkan bagi peminjam?
3. Manakah yang dapat saling dikaitkan?

3. Ekuivalensi

Untuk membandingkan tiga sistem kridet yang ada, akan dicari ekuivalensi antara kredit Sistem I dan Sistem III. Kredit Sistem I adalah kredit dengan besar pinjaman sebesar P suku bunga p% jangka waktu n. Dalam sistem ini besarnya angsuran adalah $P/n + pP$, dengan kata lain besar angsuran tetap dan dapat dikatakan *bunga merata,* yakni selalu sebesar pP. Dalam Sistem III, kredit sebesar P suku bunga p% dan jangka waktu n, besar angsuran adalah A merata. Angsuran ini diperhitungkan sebagai angsuran pokok dan bunga dari sisa pinjaman (jadi menyerupai $P + pP$). Sistem III ini dinamakan *angsuran tetap dan bunga menurun.* Ingin dicari syarat-syarat agar Sistem I dan III ini ekuivalen. Tentu saja kata ekuivalen ini tidak persis seperti dalam cabang-cabang matematika pada umumnya.

Jadi, dipunyai kredit sebesar P dengan suku bunga p% ***merata*** dalam jangka waktu n. Kredit ini diubah mejadi kredit sebesar P dengan suku bunga b% dengan ***angsuran tetap dan bunga menurun*** dalam jangka waktu n. Dalam kasus ini P dan n konstan dan ingin dicari hubungan antara b dan p. Dapat dianggap bahwa p diketahui dan b dicari. Perhatikanlah Tabel di bawah ini, yakni tabel tentang angsuran tetap dan bunga menurun.

Dalam sistem I, besar angsuran tetap adalah $P/n + pP$. Dalam Sistem III, angsuran ini adalah A. Kemudian A ini kita pecah menjadi angsuran pokok dan bunga menurun (tergantung sisa pinjaman) atas suku bunga b%. Lihat tabel di bawah ini:

Tabel 4. Penyesuaian *bunga merata* p% ke b% *bunga menurun* pinjaman sebesar P dan jangka waktu n

Angsuran ke	*Bunga menurun*	*Angsuran Pokok*	*Sisa Pinaman*
1. $P/n + pP$	bP	$P/n + pP - bP$	$P - P/n - pP + bP$
2. $P/n + pP$	$b(P/n + pP - bP)$	$P/n + pP - b(P/n + pP - bP)$	$P - P/n - pP + bP - [P/n + pP - b(P - (P/n + pP - bP)]$
3. …………………………………			
4. …………………………………			
n. $P/n + pP$			0
		P	

Teorema 4: Kredit sebesar P dengan sistem bunga *merata* (tetap) dengan suku bunga p% dan jangka waktu n, diubah ke angsuran tetap A dengan bunga menurun dan suku bunga b%, jangka waktu n. Maka hubungan antara b dan p adalah sebagai berikut:

$$(1+b)^n - \frac{(1+pn)}{nb}\left[(1+b)^n - (1+nb)\right] = 1+np$$

Bukti. Bukti menggunakan induksi matematik

Pangkal induksi: Untuk $n = 1$, dipunyai

$$(1 + b) = (1 + p)[1 + b - 1 - b]/b = 1 + p$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 + b = 1 + p \rightarrow \text{benar},$$

sebab untuk $n = 1$ berarti tidak ada lagi sisa pinjaman. Jadi, lihat tabel, $P - P/n - pP + bP = 0 \Leftrightarrow P - P - pP + bP = 0 \Leftrightarrow P + bP = P - pP \Leftrightarrow 1 + b = 1 + p$ setelah kedua ruas dibagi dengan P.

Dicoba untuk $n = 2$, (walaupun sebenarnya tidak perlu)

Rumus $$(1+b)^n - \frac{(1+pn)}{nb}\left[(1+b)^n - (1+nb)\right] = 1+np$$

Untuk $n = 2$: $(1 + b)^2 - (1 + 2p)(1 + 2b + b^2 - 1 - 2b)/2b = 1 + 2p$

$\Leftrightarrow \quad 1 + 2b + b^2 - (1 + 2p)(b/2) = 1 + 2p$

$\Leftrightarrow \quad 1 + 2b + b^2 - b/2 - pb = 2p$

$\Leftrightarrow \quad b^2 + 3b/2 - pb = 2p \rightarrow$ benar,

sebab, setelah angsuran kedua sisa pinjaman harus nol. Jadi, lihat tabel,

$$P - P/n - pP + bP - [P/n + pP - b[P - (P/n + pP - bP)] = 0$$

Untuk $n = 2$

$$P - P/2 - pP + bP - [P/2 + pP - b[P - (P/2 + pP - bP)] = 0$$

Kedua ruas dibagi dengan P

$1 - ½ - p + b - [½ + p - b[1 - (½+ p - b)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 - ½ - p + b - ½ - p + b[1 - ½ - p + b] = 0$

$\Leftrightarrow \quad - p + b - p + ½ b - bp + b^3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3b/2 - bp + b^2 = 2p$. ■

Hipotesis: Rumus dianggap benar untuk $n = k$,

$$(1+b)^k - \frac{(1+pk)}{kb}\left[(1+b)^k - (1+kb)\right] = 1+kp$$

atau

$$(1+b)^k - \frac{(1+pk)}{kb}\left[(1+b)^k - (1+kb)\right] - 1 - kp = 0.$$

Langkah**:** Dibuktikan bahwa rumus benar untuk $n = k + 1$.Sisa pinjaman setelah angsuran ke-$(k+1)$ habis (nol).

$$(1+b)^k - \frac{(1+pk)}{kb}\left[(1+b)^k - (1+kb)\right] - 1 - kp = 0$$

Sisa bunga setelah angsuran ke-$(k + 1)$

$(1 + b)^k - (1 + kp)[(1 + b)^k - (1 + kb)]/kb + b[(1 + b)^k - (1 + kp)\{(1 + b)^k -$
$(1 + b)^k - (1 + kb)] - 1 - kp = 1 + kp + p$

$\Leftrightarrow (1 + b)^k(1 + b) - (1 + pk)\ (1 + b)^k(1 + b)/kb + (1 + kb)(1 + kp)/kb +$
$(1 + kp) \times [(1 + kb) - b(1 + kb)]/kb$

$\Leftrightarrow (1 + b)^{k+1}$ - $)1 + kp)\ (1 + b)^{k+1}/kb - 1 - (k + 1)p + (1 + kp)(1+ lp/kb +$
$(1 + kp) \times (1 + kb)/kb - b(1 + kp)$

$\Leftrightarrow (1 + b)^{k+1} - (1 + kp)\ (1 + b)^{k+1} + [(1 + kp)$
$(1 + kb + b + kb^2 - kb^2]/kb\ldots(1)$

Karena jangka waktunya sekarang $(k+1)$ bulan, maka (1) menjadi

$(1 + b)^{k+1} - (1 + kp)\ (1 + b)^{k+1} + (1 + kp)[1 + kb + b]/kb = 1 + (k + 1)p.$

$\Leftrightarrow (1 + b)^{k+1} - (1 + kp)\ (1 + b)^{k+1} + (1 + kp)[1 + (k + 1)b]/kb$
$= 1 + (k + 1)p\ldots(2)$

Jadi rumus benar untuk $n = k + 1$.

Contoh 4.1:. Jika $n = 3$, $p = 1{,}25\%$, berapakah b?
Jawab:

$$(1+b)^n - \frac{(1+pn)}{nb}\left[(1+b)^n - (1+nb)\right] = 1 + np$$

Jadi,

$(1 + b)^3$ - $(1{,}0375)[(1 + b)^3 - (1 + 3b)]/3b = 1{,}0375$.

Ini adalah persamaan pangkat 3 dalam variabel b, ada cara (disebut cara Cardano) tetapi juga tidak sederhana. Maka biasanya dilakukan dengan coba-coba (lihat metode numeric).

Jika dimasukkan $b = 1{,}9$, diperoleh

$$1{,}05809 - 0{,}01984 = 1{,}03825$$

Nilai ruas kiri = 1,01986 selisihnya dengan ruas kanan (1,03825) = 0,01841. Jadi masih ada kesalahan (galat) sebesar 1,8%.