Evaluasi Distribusi Gabungan pada Teori Resiko

Rosita Kusumawati
Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta
Karangmalang, Yogyakarta
rosita.kusumawati@gmail.com

ABSTRAK

Evalusi distribusi gabungan merupakan bagian penting dalam matematika asuransi dan manajemen resiko. Perbandingan evalusi distribusi gabungan menggunakan algoritma konvolusi dan rekursi Panjer akan dikaji ditulisan ini.
Kata Kunci: *Distribusi Gabungan, Rekursi*

1. Pendahuluan

Salah satu pilar dalam teori resiko klasik dan asuransi adalah evaluasi distribusi gabungan. Adapun model matematika dari model resiko kumpulan (*collective risk model*) adalah sebagai berikut.

Diberikan N adalah jumlah klaim yang terjadi dari suatu portofolio polis dalam suatu rentang waktu tertentu, dan X_1 adalah besar klaim ke–1, X_2 besar klaim ke–2, dan seterusnya. Total klaim dari portofolio dalam periode tersebut adalah, $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$. Jumlah klaim yang terjadi, N, adalah variabel random dan berkaitan dengan klaim frekuensi. Asumsi yang digunakan untuk mempermudah dalam mempelajari model resiko kumpulan S di atas yaitu,

i. $X_1, X_2, \dots$ iid
ii. variabel random $N, X_1, X_2, \dots$ saling independen

Teorema 1. (Bowers, et. al., 1997) *Diberikan variabel random total klaim S yaitu* $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$ *, dengan variabel random N jumlah klaim dan* X_i *iid.*

a. $E(S) = E(X)E(N)$.

b. $Var(S) = E(N)Var(X) + (E(X))^2 Var(N)$.

c. $m_S(t) = m_N(\log m_X(t))$.

bukti:

a. $E(S) = E(E(S|N))$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(X_1 + \ldots + X_N \middle| N = n\right) P\left(N = n\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(X_1 + \ldots + X_n \middle| N = n\right) P\left(N = n\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(X_1 + \ldots + X_n\right) P\left(N = n\right) \quad .$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} nE\left(X\right) P\left(N = n\right)$$
$$= E\left(X\right) E\left(N\right)$$

b. Dengan menggunakan dekomposisi variansi diperoleh,

$$Var\left(S\right) = E\left(Var\left(S \middle| N\right)\right) + Var\left(E\left(S \middle| N\right)\right).$$
$$= E\left(NVar\left(X\right)\right) + Var\left(N\mu\right)$$
$$= E\left(N\right) Var\left(X\right) + \left(E\left(X\right)\right)^2 Var\left(N\right) \, .$$

c. $m_S\left(t\right) = E\left(E\left(e^{tS} \middle| N\right)\right)$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{t\left(X_1 + \ldots + X_N\right)} \middle| N = n\right) P\left(N = n\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{t\left(X_1 + \ldots + X_n\right)}\right) P\left(N = n\right) \quad .$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(m_X\left(t\right)\right)^n P\left(N = n\right)$$
$$= E\left(\left(e^{\log m_X\left(t\right)}\right)^N\right)$$
$$= m_N\left(\log m_X\left(t\right)\right).$$

■

Pemilihan distribusi dari N akan berpengaruh pada distribusi dari S. Terdapat beberapa bentuk khusus yang sering digunankan dalam analisa model resiko, yaitu untuk N berdistribusi Poisson, maka S berdistribusi gabungan Poisson, dan untuk N berdistribusi binomial negatif, S berdistribusi gabungan binomial negatif.

Teorema 2. (Bowers, et. al., 1997) *Untuk* $N \sim POI\left(\lambda\right)$, *S disebut distribusi gabungan Poisson dengan* $E\left(S\right) = \lambda E\left(X\right)$, $Var\left(S\right) = \lambda E\left(X^2\right)$ *dan* $m_S\left(t\right) = \exp \lambda\left(m_X\left(t\right) - 1\right)$.

2. Algoritma Konvolusi

Untuk mengevaluasi distribusi gabungan S, ada beberapa pendekatan yang dapat dilakukan yaitu algoritma Konvolusi, algoritma Rekursi untuk kelas distribusi yang lebih besar dalam, Fast Fourier Transform (FFT), sparse vector, dan lain – lain. Dalam tulisan ini penulis akan mengkaji algoritma Konvolusi dan Rekursi dalam evaluasi distribusi gabungan. Adapun definisi Konvolusi untuk distribusi gabungan adalah,

Teorema 4. Konvolusi (Kass R., 2008)

Distribusi bersyarat S untuk N = n adalah,

$$F_S(s) = P(S \le s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_1 + ... + X_N \le s \middle| N = n\right) P(N = n),$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk lain $F_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(s) P(N = n)$, *dan* $f_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(s) P(N = n)$.

bukti :

Contoh 1. Diketahui jumlah klaim N berdistribusi Poisson dengan $\lambda = 2$. Diasumsikan $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, dengan $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, dan $P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$. Tentukan distibusi dari S.

Untuk jumlah klaim N berdistribusi Poisson dengan $\lambda = 2$, $P(N = n) = f_N(n) = \frac{e^{-2} 2^n}{n!}$. Distribusi S akan ditentukan menggunakan metode konvolusi. Dari Definisi 1., diperoleh tabel konvolusi sebagai berikut,

Dapat dilihat bahwa evaluasi distribusi gabungan menggunakan algoritma konvolusi sangat rumit dan membutuhkan perhitungan yang sangat banyak terutama ketika n semakin besar. Algoritma rekursi adalah salah satu pendekatan lain untuk distribusi gabungan.

3. Algoritma Rekursi Panjer

Algoritma berikutnya yang dapat digunakan untuk mengevaluasi distribusi gabungan adalah Algoritma Rekursi Panjer. Banyak dijumpai algoritma rekursi lain diliteratur dengan relasi yang hampir sama dengan algoritma Rekursi Panjer.

Teorema 5. (Kass R., 2008)

Distribusi gabungan S dengan N adalah jumlah klaim yang terjadi dengan $\frac{P(N=n)}{P(N=n-1)} = \left(a + \frac{b}{n}\right)$ *atau dapat ditulis dalam notasi lain* $q_n = q_{n-1}\left(a + \frac{b}{n}\right)$*, untuk n = 1, 2,..,* *dan* X_i *adalah besar klaim ke – i dengan* $x > 0, \forall x \in X_i$ *adalah*

$$f(0) = \begin{cases} \Pr\left[N=0\right] & , jika\ p(0)=0 \\ m_N\left(\log p(0)\right) & , jika\ p(0)>0 \end{cases}.$$

$$f(s) = \frac{1}{1-ap(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)p(h)\,f(s-h), \quad s=1,2,\dots . \tag{3.1}$$

bukti:

Untuk s = 0, dengan menggunakan $f_S(s) = P(S=s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_1 + \dots + X_N = s \middle| N=n\right) P\left(N=n\right)$ (Teorema 4.), diperoleh bahwa $p(0)=0$ maka $f(0) = \Pr\left[N=0\right]$, dan untuk $jika\ p(0)>0$ maka $f(0) = m_N\left(\log p(0)\right)$.

Untuk s = 1, 2,…, dibentuk $T_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$. Ada k iid variabel, dengan X_1 dan k – 1 variabel yang lain iid dan simetris, jelas $E\left(a + \frac{bX_1}{s}\middle| T_k = s\right) = a + \frac{b}{s}\left(\frac{s}{k}\right) = a + \frac{b}{k}$ (i)

Harga harapan tersebut dapat pula dinyatakan dalam bentuk,

$$E\left(a+\frac{bX_1}{s}\middle|T_k=s\right) = \sum_{h=0}^{s} a+\frac{bh}{s}P\left(X_1=h\middle|T_k=s\right) = \sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)\frac{P\left(X_1=h\right)P\left(T_k-X_1=s-h\right)}{P\left(T_k=s\right)} \quad \text{(ii)}$$

Dari (i), (ii) dan relasi $q_n = q_{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)$, diperoleh Distribusi gabungan S yaitu

$$
\begin{aligned}
f(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k P(T_k = s) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(a+\frac{b}{k}\right) q_{k-1} P(T_k = s) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(E\left(a+\frac{bX_1}{s}\middle| T_k = s\right)\right) q_{k-1} P(T_k = s) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1} \sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)\frac{P(X_1 = h)P(T_k - X_1 = s-h)}{P(T_k = s)} P(T_k = s) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1} \sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right) P(X_1 = h)P(T_k - X_1 = s-h) \\
&= \sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right) P(X_1 = h)\sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1} P(T_k - X_1 = s-h) \\
&= \sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right) p(h)\, f(s-h) \\
&= ap(0)\, f(s) + \sum_{h=1}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right) p(h)\, f(s-h) .
\end{aligned}
$$

diperoleh,

$$
f(s) = \frac{1}{1-ap(0)} \sum_{h=1}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right) p(h)\, f(s-h). \qquad \blacksquare
$$

Algoritma rekursi Panjer hanya dapat digunakan untuk distibusi yang memenuhi relasi Teorema 5., dan distribusi – distribusi itu adalah distribusi Poisson, Binomial Negatif, dan Binomial. Berikut formula rekursi untuk distribusi gabungan Poisson, Binomial Negatif, dan Binomial,

i. Distrbusi Poisson (θ) memenuhi $q_n = q_{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)$, dengan dengan $a=0$ dan $b=\theta>0$.

   Persamaan 3.1 untuk distribusi Poisson (θ) adalah,

$$
f(0) = \begin{cases} \Pr[N=0] = \dfrac{e^{-\theta}\theta^0}{0!} = e^{-\theta}, & jika\ p(0)=0 \\ m_N(\log p(0)) = \exp\big(\theta(p(0)-1)\big) = e^{-\theta(1-p(0))}, & jika\ p(0)>0 \end{cases}
$$

$$
f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \theta h p(h)\, f(s-h), \quad s = 1,2,\dots .
$$

Contoh 2. Tentukan distibusi dari S pada Contoh 1. dengan algoritma Rekursi Panjer.

Diketahui distribusi gabungan Poisson dengan dengan $\lambda = 2$ dan $P[X = 1,2,3] = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

Dengan Teorema 5. diperoleh,

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{s}\left(2.1.p(1)\, f(s-1) + 2.2\, p(2)\, f(s-2) + 2.3.p(3)\, f(s-3)\right) \\ &= \frac{1}{s}\left(2.1.\frac{1}{2}.f(s-1) + 4.\frac{1}{4}.f(s-2) + 6.\frac{1}{4}.f(s-3)\right) \\ &= \frac{1}{s}\left(f(s-1) + f(s-2) + \frac{3}{2}.f(s-3)\right) \end{aligned} .$$

untuk s = 1,2,…. Diperoleah,

$f_S(0) = e^{-2}$,

$f_S(1) = \frac{1}{1} f_S(0) = e^{-2}$,

$f_S(2) = \frac{1}{2}\left(f_S(1) + f_S(0)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-2} + e^{-2}\right) = e^{-2}$,

$f_S(3) = \frac{1}{3}\left(f_S(2) + f_S(1) + \frac{3}{2} f_S(0)\right) = \frac{1}{3}\left(e^{-2} + e^{-2} + \frac{3}{2}e^{-2}\right) = \frac{7}{6}e^{-2}$.

Contoh implementasi rekursi Panjer dalam program **R** dengan menggunakan **Panjer.Bin** *function* yaitu,

ii. Distrbusi Binomial Negatif (r,θ) memenuhi $q_n = q_{n-1}\left(a + \frac{b}{n}\right)$, dengan $a = 1-\theta$, dan $b = a(r-1) = (1-\theta)(r-1)$. Dengan $\theta = 1-a$ dan $r = 1 + \frac{b}{a}$ sehingga $0 < a < 1$ dan $a + b > 0$, atau $a = 1-\theta$, dan $b = a(r-1) = (1-\theta)(r-1)$. Persamaan 3.1 untuk distribusi Binomial Negatif (r,θ) adalah,

$$f(0)=\begin{cases}\Pr\left[N=0\right]=\binom{r+0-1}{0}\theta^{r}\left(1-\theta\right)^{0}=\theta^{r}, & jika\ p(0)=0\\ m_N\left(\log p(0)\right)=\left(\dfrac{\theta}{1-(1-\theta)\,p(0)}\right)^{r}, & jika\ p(0)>0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}f(s)&=\frac{1}{1-(1-\theta)\,p(0)}\sum_{h=1}^{s}\left((1-\theta)+\frac{(1-\theta)(r-1)h}{s}\right)p(h)\,f(s-h)\\&=\frac{(1-\theta)}{1-(1-\theta)\,p(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(1+\frac{(r-1)h}{s}\right)p(h)\,f(s-h),\quad s=1,2,\ldots\end{aligned}.$$

Contoh implementasi rekursi Panjer dalam program **R** dengan menggunakan **Panjer.Bin** *function* yaitu,

iii. Distrbusi Binomial (k,θ) memenuhi $q_n=q_{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)$, dengan atau $a=\frac{\theta}{\theta-1}$, dan $b=(1+k)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$. Dengan $\theta=\frac{a}{a-1}$ dan $k=-\frac{b+a}{a}$, sehingga $a<0$ dan $b=-a(k+1)$,

Persamaan 3.1 untuk distribusi Binomial (k,θ) adalah,

$$f(0)=\begin{cases}\Pr\left[N=0\right]=\binom{k}{0}\theta^{0}\left(1-\theta\right)^{k-0}=\left(1-\theta\right)^{k} & , jika\ p(0)=0\\ m_N\left(\log p(0)\right)=\left(1-\theta+\theta e^{\log p(0)}\right)^{k}=\left(1-\theta+\theta.p(0)\right)^{k} & , jika\ p(0)>0\end{cases}.$$

$$f(s) = \frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)p(0)} \sum_{h=1}^{s} \left(\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right) + \frac{(1+k)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)h}{s} \right) p(h)\, f(s-h)$$

$$= \frac{\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)}{1-\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)p(0)} \sum_{h=1}^{s} \left(-1 + \frac{(1+k)h}{s} \right) p(h)\, f(s-h)$$

$$= \frac{\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)}{\left(\frac{\theta-1}{\theta-1}\right)-\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)p(0)} \sum_{h=1}^{s} \left(-1 + \frac{(1+k)h}{s} \right) p(h)\, f(s-h) \qquad .$$

$$= \frac{-\theta}{\theta-1-\theta p(0)} \sum_{h=1}^{s} \left(-1 + \frac{(1+k)h}{s} \right) p(h)\, f(s-h)$$

$$= \frac{-\theta}{\theta\left(1-p(0)\right)-1} \sum_{h=1}^{s} \left(-1 + \frac{(1+k)h}{s} \right) p(h)\, f(s-h), \quad s = 1, 2, \ldots$$

Contoh implementasi rekursi Panjer dalam program **R** dengan menggunakan **Panjer.Bin** *function* yaitu,

4. Kesimpulan

Algoritma rekursi Panjer mempermudah evaluasi dari distribusi gabungan dibandingkan algoritma konvolusi. Akan tetapi algoritma rekursi hanya dapat dijalankan untuk distribusi gabungan tertentu saja yaitu distribusi gabungan Poisson, Negatif Binomial, dan Binomial.

5. Daftar Pustaka

Rice, J. A. (1995), *Mathematical Statistics and Data Analysis*, 2nd Edition, Duxbury Press, Belmont, CA.

Bowers, et. al. 1997, *Actuarial Mathematics*, 2nd Edition, Society of Actuaries.

Kass, R. 2008, *Modern Actuarial Risk Theory using R*, Springer Verlag.

Crawley, M. J., 2007, *The R Book*, John Wiley & Sons, Ltd.