**Matematika Astronomi: Bagaimana Matematika Mempelajari Alam**[1]

Ariyadi Wijaya[2]

(a.wijaya@uny.ac.id)

## Abstrak

Manfaat fenomena astronomi untuk kehidupan manusia menyebabkan pengkajian astronomi telah menjadi perhatian sejak awal peradaban manusia. Salah satu fenomena astronomi yang banyak dikaji sejak awal peradaban adalah matahari. Sepanjang tahun, terjadi perubahan durasi siang hari yang bersinar di suatu tempat tertentu di permukaan bumi. Secara matematis, perubahan durasi siang hari tersebut dapat dihitung dengan menggunakan *spherical trigonometry*. Variable yang digunakan dalam *spherical trigonometry* adalah koordinat posisi pada permukaan bumi dan posisi relatif matahari terhadap bumi.

Kata kunci: *spherical trigonometry*

## A. Pendahuluan

Manfaat fenomena astronomi untuk kehidupan manusia menyebabkan pengkajian astronomi telah menjadi perhatian sejak awal peradaban manusia. Bangsa Yunani, Babilon, Cina, India dan Inka – Maya merupakan bangsa-bangsa yang memberikan perhatian besar terhadap fenomena astronomi. Bangsa-bangsa tersebut mempelajari astronomi untuk mendukung kehidupan mereka, seperti penentuan arah mata angin dan sistem perhitungan waktu dan kalender. Penentuan arah mata angin berkaitan dengan letak benda langit di angkasa, sedangkan sistem perhitungan waktu dan kalender disusun berdasarkan pergerakan atau perubahan posisi berbagai benda langit terhadap bumi. Perhitungan waktu dalam satu hari dipengaruhi oleh rotasi bumi sedangkan sistem kalender dipengaruhi oleh peredaran bulan ataupun revolusi bumi mengelilingi matahari. Berbagai macam perhitungan waktu tersebut mengindikasikan

[1] Dipresentasikan di Seminar Nasional MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta – 16 Mei 2009

[2] Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA – Universitas Negeri Yogyakarta

bahwa bangsa kuno tidak hanya mengamati benda langit tetapi juga mengembangkan berbagai cara perhitungan matematis.

Salah satu fenomena astronomi yang menarik dan sering kita amati adalah matahari. Setiap hari matahari terbit dan tenggelam hampir di seluruh bagian bumi, kecuali di daerah kutub utara dan kutub selatan pada sekitar tanggal 21 Desember dan 21 Juni. Pada periode waktu tersebut, matahari akan bersinar ataupun tidak bersinar selama enam bulan berturut-turut di daerah kutub utara dan kutub selatan. Fenomena matahari terbit dan matahari tenggelam tersebut memiliki pengaruh yang besar terhadap dua teori tentang pusat tata surya kita. Teori pertama adalah *Geocentric* yang beranggapan bahwa bumi merupakan pusat tata surya kita. Teori kedua adalah *Heliocentric* yang meyakini bahwa matahari merupakan pusat tata surya kita. Caludius Ptolemy merupakan salah satu ilmuwan yang melakukan berbagai perhitungan matematika astronomi berdasarkan teori *Geocentric*, sedangkan Galileo Galilei dan Nicolas Copernicus adalah ilmuwan yang melakukan penelitian dan perhitungan terkait dengan teori *Heliocentric*.

Salah satu fakta menarik tentang matahari adalah bahwa durasi siang hari berubah-ubah sepanjang waktu dan terjadi hampir di seluruh tempat di permukaan bumi. Di daerah sekitar garis khatulistiwa fenomena tersebut akan sulit diamati fenomena, tetapi untuk daerah-daerah yang jauh dari garis khatulistiwa (terutama daerah-daerah yang memiliki empat musim)  akan mudah dilakukan pengamatan terhadap perubahan durasi siang. Durasi siang hari di daerah sekitar khatulistiwa adalah sekitar 12 jam dan durasi siang hari terpanjang untuk daerah empat musim akan terjadi pada saat musim panas (sekitar bulan Maret ataupun September, tergantung tempat). Oleh karena itu, akan sangat menarik untuk mengkaji faktor-faktor apa yang mempengaruhi perubahan durasi siang hari serta konsep matematika apa yang digunakan untuk perhitungan tersebut.

## B. Diskusi

Pada sesi ini akan dibahas dua hal utama yang berkaitan dengan perhitungan durasi siang hari, yaitu pemodelan alam semesta dan *spherical trigonometry*.

### 1. *Celestial Shere*: Suatu Bentuk Pemodelan Alam Semesta

Walaupun Ptolemy dan Copernicus bekerja dalam teori pusat tata surya yang berbeda, kedua orang tersebut memodelkan alam semesta dalam bentuk bola yang disebut *celestial sphere*. *Celestial sphere* adalah suatu bola dengan posisi pengamat atau titik referensi sebagai pusat bola dan benda-benda langit sebagai obyek pengamatan terletak pada permukaan bola tersebut.

Ada tiga macam *celestial spherical*, yaitu:

a. *Topocentric celestial sphere*

   *Topocentric celestial sphere* adalah *celestial sphere* yang menggunakan gerak rotasi bumi sebagai pertimbangan utama dan posisi aktual pengamat sebagai titik pusat bola. Posisi actual pengamat dinyatakan dalam koordinat posisi, yaitu dalam garis bujur dan garis lintang.

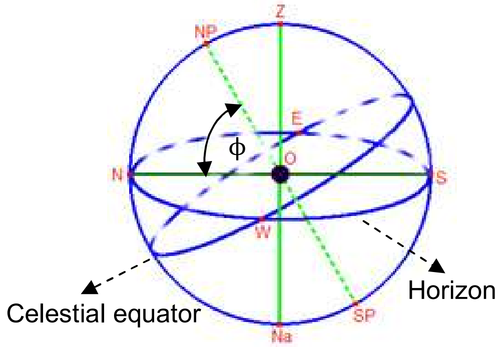
b. *Geocentric celestial sphere*

   *Geocentric celestial sphere* merupakan *celestial sphere* yang menggunakan gerak revolusi bumi sebagai pertimbangan utama dan bumi secara keseluruhan digunakan sebagai pusat bola.

c. *Heliocentric celestial sphere*

   *Heliocentric celestial sphere* adalah *celestial sphere* yang menggunakan matahari sebagai pusat bola.

Kombinasi *topocentric celestial sphere* dan *geocentric celestial sphere* digunakan untuk mempelajari perhitungan durasi matahari bersinar. *Topocentric celestial sphere* digunakan untuk menghitung durasi siang hari pada suatu tempat tertentu sedangkan *geocentric celestial sphere* terkait dengan variable yang dibutuhkan untuk menghitung durasi siang hari pada suatu waktu tertentu.




Gambar 1. *Topocentric Celestial Sphere*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Z | : Zenit | W | : Arah barat |
| NP | : Kutub utara | O | : Pengamat |
| N | : Arah utara | Na | : Nadir |
| S | : Arah selatan | SP | : Kutub selatan |
| E | : Arah timur | Φ | : lintang |

Celestial equator merupakan perluasan dari khatulistiwa bumi

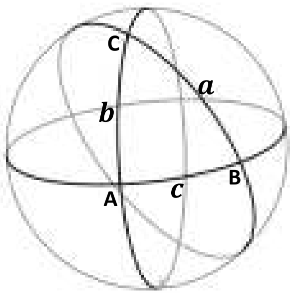
Horizon adalah perluasan dari bidang tempat pengamat berdiri

Zenit adalah titik khayal di langit yang berada tepat di atas pengamat

## 2. *Spherical Geometry*

*Spherical geometry* (geometri bola) digunakan karena alam semesta dimodelkan sebagai suatu bola. Oleh karena itu, *spherical geometry* banyak digunakan untuk perhitungan astronomi dan keperluan navigasi. Ada beberapa perbedaan antara *plane geometry* (geometri bidang) dengan *spherical geometry* (geometri bola). Tidak terdapat perbedaan konsep titik dalam *plane geometry* dan *spherical geometry*, tetapi terdapat perbedaan dalam konsep garis. Konsep garis dalam *spherical geometry* tidak sama dengan konsep garis lurus yang menghubungkan dua titik dalam *plane geometry.* Garis dalam *spherical geometry* disebut *geodesic*, yaitu lintasan terpendek yang menghubungkan dua titik pada permukaan bola. *Geodesic* merupakan bagian dari *great circle* dari suatu bola. Secara singkar, garis pada *plane geometry* akan digantikan dengan *great circle* dalam *spherical geometry*. *Great circle* adalah lingkaran-lingkaran pada bola dimana pusat lingkaran tersebut berimpit dengan pusat bola. Contoh *great circle* pada bola bumi adalah garis khatulistiwa dan semua garis bujur. Garis lintang bukan merupakan *great circle*, melainkan *small circle* karena pusat lingkaran dari garis lintang tidak berimpit dengan pusat bumi.

Perbedaan konsep garis dalam *plane geometry* dan *spherical geometry* menyebabkan adanya perbedaan konsep sudut. Besar sudut dalam *plane geometry* ditentukan oleh perpotongan dua garis lurus sedangkan besar sudut dalam *spherical geometry* ditentukan oleh perpotongan dua *great circle*. Konsekuensi dari definisi sudut tersebut adalah jumlah sudut dalam *spherical triangle*[3] melebihi 180°.



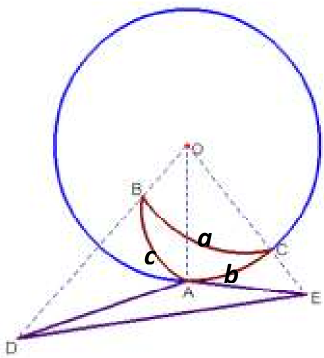
Gambar 2. Spherical Triangle

Sudut A : sudut yang terbentuk antara *great circle* yang memuat titik A dan B dengan *great circle* yang memuat titik A dan C

Sudut B : sudut yang terbentuk antara *great circle* yang memuat titik B dan A dengan *great circle* yang memuat titik B dan C

Sudut C : sudut yang terbentuk antara *great circle* yang memuat titik C dan B dengan *great circle* yang memuat titik C dan A

Seperti halnya dalam *plane triangle*, dalam *spherical triangle* juga terdapat aturan cosinus.



Gambar 3. Aturan cosinus

A : titik singgung bola *O* dengan bidang yang memuat *ADE*.
*AOD* : perpanjangan *great circle* yang memuat *AOB*
*AOE* : perpanjangan *great circle* yang memuat *AOC*
Ukuran sisi *a* sama dengan besar sudut *BOC*.
Ukuran *b* sama dengan sudut *AOC*.
Ukuran *c* sama dengan sudut *AOB*.

Segitiga *ABC* adalah suatu *spherical triangle* yang berpusat di *O*. Sisi *a* adalah bagian dari *great circle* yang berpusat di *O* dan melalui titik *B* dan *C*. Oleh karena itu, panjang ukuran sisi *a* dinyatakan dengan besar sudut *BOC*. Begitu juga dengan sisi *b* dan *c* yang dinyatakan dengan ukuran sudut *AOC* and *AOB*. *AD*

[3] *Spherical triangle* adalah segitiga yang semua sisinya merupakan bagian dari *great circle*

adalah garis singgung dari *great circle AC* di titik *A* dan *AE* adalah garis singgung *great circle AC* di titik *A*. Oleh karena itu jari-jari *OA* tegak lurus dengan *AD* dan *AE*. Jika *great circle AB* diperluas maka *AD* akan terletak pada perluasan *great circle AB* dan perpanjangan jari-jari *OB* akan berpotongan dengan *AD* di titik *D*. Secara analog akan diperoleh bahwa jari-jari *OC* berpotongan dengan *AE* di titik *E*. Dalam *spherical geometry*, sudut *BAC* adalah sudut yang terbentuk antara *great circle AB* and *AC* di titik *A*, sehingga *BAC = DAE*.

**Perhatikan segitiga *OAD*:**

Karena $\angle OAD = 90^{\circ}$ dan *AOD* identik dengan *AOB* maka:

$AD = OA \tan c$ dan $OD = OA \sec c$ …… (1)

Dari *plane triangle OAE* akan kita peroleh:

$AE = OA \tan b$ dan $OE = OA \sec b$ …… (2)

Dari *plane triangle ADE* kita memiliki

$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2.AD.AE.\cos DAE$ …… (3)

Substitusikan (1) dan (2) ke (3) maka:

$DE^2 = OA^2\left(\tan^2 c + \tan^2 b - 2.\tan b.\tan c.\cos DAE\right)$ …… (4)

Dari *plane triangle DOE*, kita memiliki:

$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2.OD.OE.\cos DOE$

Karena *DOE=BOC=a*, maka:

$DE^2 = OA^2\left(\sec^2 c + \sec^2 b - 2.\sec b.\sec c.\cos a\right)$ …… (5)

Dari (4) dan (5):

$$\sec^2 c + \sec^2 b - 2.\sec b.\sec c.\cos a = \tan^2 c + \tan^2 b - 2.\tan b.\tan c.\cos DAE$$

$$\sec^2 c = 1 + \tan^2 c; \quad \sec^2 b = 1 + \tan^2 b$$

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos DAE$$

Nyatakan sudut *DAE* dengan sudut *A*, maka kita akan memperoleh aturan cosinus dalam *spherical triangle* sebagai berikut:

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ …… (6)

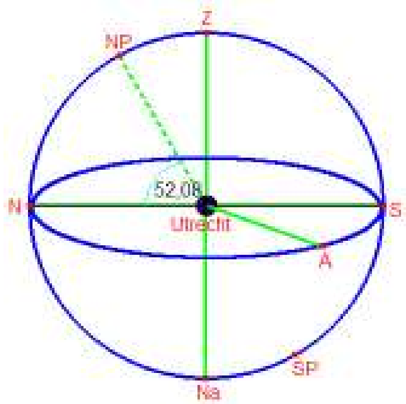
Secara analog akan kita dapatkan:

$\cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos B$ …… (7)

$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos C$ …… (8)

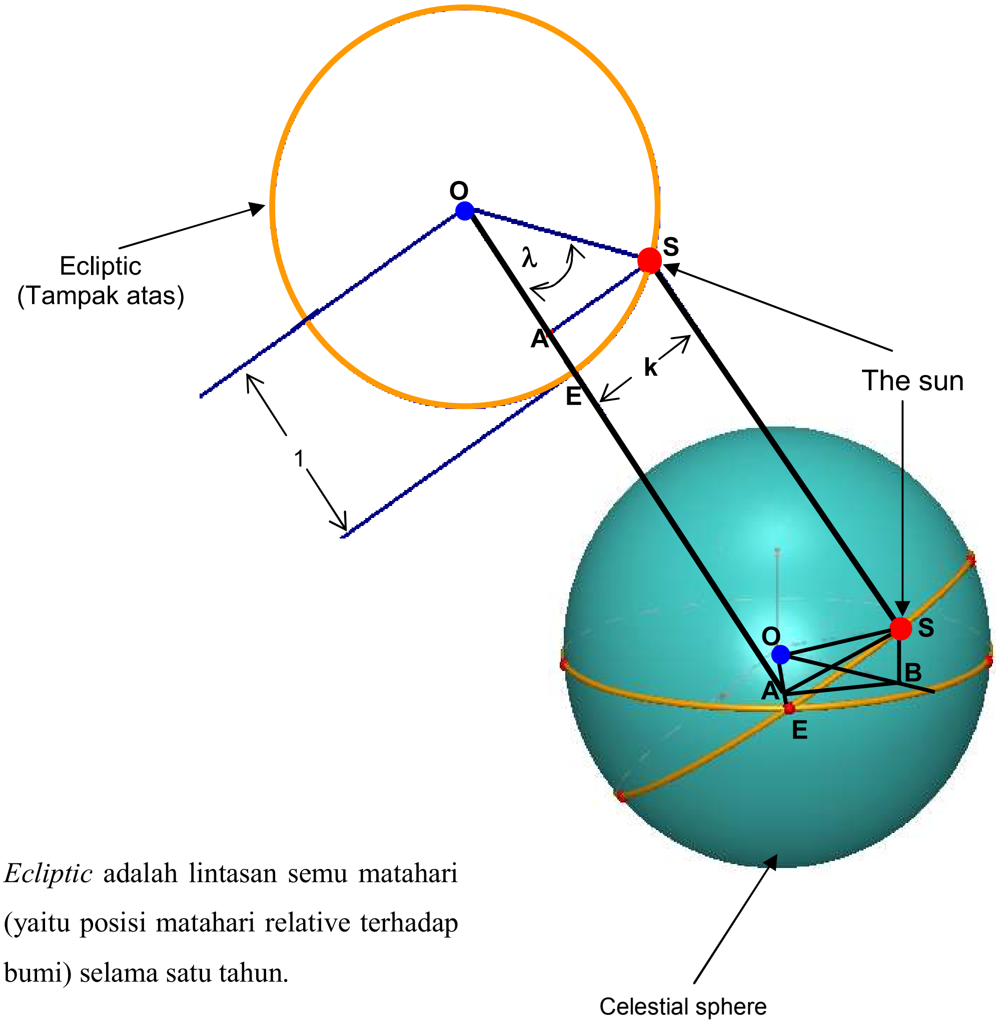
**3. Matematika Astronomi: Menghitung Durasi Siang Hari**

Faktor yang mempengaruhi perbedaan durasi siang hari adalah letak pengamat dan waktu (dalam hal ini adalah hari atau tanggal) dilakukan pengamatan. Letak pengamat yang berpengaruh terhadap durasi siang hari adalah garis lintang dari lokasi pengamat. Garis lintang dari suatu tempat berpengaruh menentukan besar sudut antara arah utara pada horison dengan arah kutub utara dari *celestial sphere*. Sebagai contoh adalah kota Utrecht yang memiliki posisi lintang $52{,}08^o$ (lintang positif menunjukkan tempat ada di belahan bumi utara) akan memiliki sudut antara arah utara kota Utrecht dengan kutub utara sebesar $52{,}08^o$.




Gambar 4. Pengaruh letak tempat terhadap sudut arah kutub utara

Faktor kedua yang mempengaruhi perbedaan durasi siang hari adalah faktor waktu (dalam hal ini adalah hari atau tanggal). Besarnya sudut deklinasi matahari dipengaruhi oleh faktor waktu. Sebagai contoh variasi siang hari karena faktor waktu adalah belahan bumi utara yang memiliki durasi siang hari pendek pada sekitar bulan Desember dan durasi siang hari panjang pada sekitar bulan Juni.




Gambar 5. Penentuan besar deklinasi matahari

Sudut deklinasi matahari:

Dari gambar *ecliptic* tampak atas, kita tahu bahwa $AS = \sin\lambda$ (karena *celestial sphere* merupakan suatu bola satuan), sehingga:

$$AS = \sin\lambda$$

$$BS = AS\sin 23{,}45^o$$

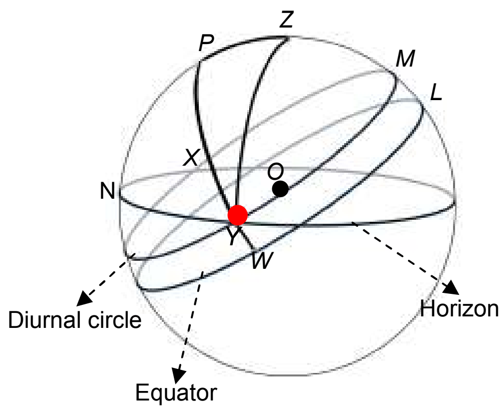
$$BS = \sin\lambda\sin 23{,}45^o$$

$$BS = \sin\delta$$
$$\sin\delta = \sin\lambda \sin 23{,}45^o$$
$$\delta = \arcsin(\sin\lambda \sin 23{,}45^o)$$

**Catatan**:

$\lambda$ adalah *longitude* matahari, yaitu jarak (dalam sudut) antara matahari dengan *vernal equinox* (yaitu posisi dimana *ecliptic* dengan *celestial equator* yang terjadi sekitar tanggal 21 Maret dan 21 September). Besar $\lambda$ bukan merupakan fungsi linear sebagai akibat bentuk orbit bumi yang berbentuk ellips.

Siang hari adalah suatu periode ketika matahari berada di atas horizon suatu tempat. Lintasan (khayal) matahari selama satu hari penuh merupakan suatu lingkaran yang disebut *diurnal circle*. Oleh karena itu, untuk menentukan durasi siang hari kita perlu menghitung panjang busur *diurnal circle* matahari di atas horizon. Pada gambar 5, *diurnal circle* adalah lingkaran yang memuat *XMY* sedangkan busur *XMY* adalah lintasan matahari di atas horizon. Oleh karena itu untuk mengukur durasi siang hari kita cukup menghitung panjang busur *XMY*.




Gambar 5 *Durasi siang*

$Z$ : zenit

$P$ : Kutub Utara

$O$ : Pengamat

$X$ : Titik terbit matahari

$Y$ : Titik terbenam matahari

$M$ : Posisi matahari pada tengah hari

$N$ : Arah utara pengamat

$\Phi$ : (garis) lintang tempat pengamat pada titik $O$

$\delta$ : Deklinasi matahari (jarak sudut antara matahari dan equator)

Besar sudut deklinasi matahari bervariasi dari - 23,45$^o$ sampai 23,45$^o$ selama satu tahun, tergantung tanggal.

*Diurnal circle* adalah lintasan khayal yang ditempuh matahari selama 24 jam. *Diurnal circle* paralel dengan *equator*.

Perhatikan gambar 5.

Pengamat terletak pada garis lintang $\phi$ sehingga sudut $NOP$ juga $\phi$ (perhatikan gambar 4). $WY$ adalah deklinasi matahari, yaitu $\delta$.

Lingkaran yang memuat Lingkaran yang memuat $Y$ dan $M$ adalah *diurnal circle* dengan $Y$ adalah titik matahari terbenam, $X$ adalah titik matahari terbit dan $M$ adalah posisi matahari pada tengah hari. Durasi siang hari dapat dihitung dengan menghitung panjang busur $XMY$. Untuk menghitung panjang busur $XMY$ kita cukup dengan menghitung setengah busur $XMY$, yaitu busur $MY$. Perhatikan bahwa $\widehat{WL} = \widehat{MY} = \angle WPL = \angle YPM = \angle YPZ$, sehingga untuk menghitung durasi siang kita terlebih dulu perlu menghitung besar sudut $YPZ$. Sudut $YPZ$ adalah jarak (dalam sudut) antara titik terbenam matahari dengan titik tengah hari, sehingga sudut $YPZ$ merupakan representasi durasi setengah siang.

Titik $Y$ terletak pada horizon sehingga $ZY$=90$^o$ dan $PY$=90$^o$ - $\delta$. Posisi lintang pengamat sebesar $\phi$ menyebabkan sudut antara arah utara pengamat dengan kutub utara (yaitu sudut $NOP$ atau panjang busur $NP$) adalah $\phi$ sehingga $PZ = 90^o - \phi$.

Perhatikan *spherical triangle PZX* pada gambar 5. Sesuai dengan aturan cosinus untuk *spherical triangle* maka kita dapatkan:

$\cos ZY = \cos PZ \,.\cos PY + \sin PZ \,.\sin PY \,.\cos ZPY$

$\cos 90^o = \cos\ (90^o - \phi)\,.\cos\ (90^o - \delta) + \sin(90^o - \phi)\,.\sin(90^o - \delta)\,.\cos ZPY$

$0 = \sin\ \phi\,.\sin\ \delta + \cos\phi\,.\cos\delta\,.\cos ZPY$

$\cos ZPY = -\tan\phi\,.\tan\delta$

Karena sudut pada *celestial sphere* yang berpengaruh terhadap durasi siang disebut *hour angle* maka sudut *ZPY* merupakan *hour angle* (H), sehingga bisa kita tuliskan sebagai:

$$\cos H = -\tan\phi\,.\tan\delta$$
$$H = \arccos(-\tan\phi\ .\tan\delta)$$

Durasi siang diukur dalam waktu, bukan dalam sudut sehingga kita perlu mengubah *hour angle* menjadi ukuran waktu (*time measurement*). *Hour angle H* merupakan representasi setengah siang hari (karena besar sudut *H* adalah setengah panjang busur *XMY*) serta lingkaran yang memuat *X, Y*, dan *M* merupakan *diurnal circle* yang merupakan representasi satu hari penuh (24 jam), maka durasi siang hari dapat dihitung dengan:

$$\text{Durasi siang} = \frac{H}{180^o}\,.24\ jam$$

Sebagai contoh kita akan menghitung durasi siang hari di Yogyakarta pada tanggal 16 Juli 2009.

Penyelesaian:

Kota Yogyakarta terletak pada garis lintang -7,8$^o$ (berarti terletak pada lintang selatan) serta deklinasi matahari pada tanggal 16 Juli 2009 adalah 21,44$^o$.

Jadi durasi siang hari di Yogyakarta pada tanggal 16 Juli 2009 adalah:

$\cos H = -\tan\Phi\,.\tan\delta$

$\cos H = -\tan -7{,}8^o\,.\tan 21{,}44^o$

$H = 86{,}92^o$

Durasi siang hari = $\frac{86{,}92^o}{180^o} \times 24$ jam

Durasi siang hari = 11,59 jam.

## C. Simpulan

Alam semesta dimodelkan sebagai suatu bola sehingga geometri yang dipakai dalam perhitungan astronomi adalah *spherical geometry* atau geometri bola. Kemiringan sumbu bumi sebesar 23,45$^{o}$ menyebabkan besar sudut deklinasi matahari bervariasi dari -23,45$^{o}$ sampai 23,45$^{o}$ sepanjang tahun.

Rumus perhitungan durasi siang hari adalah:

$\cos H = -\tan\phi \,.\tan\delta$ … (i)

Durasi siang = $\frac{H}{180^o}$ $.24$ jam… (ii)

Berdasarkan rumus perhitungan tersebut ada beberapa fakta menarik tentang durasi siang hari jika ditinjau secara matematis, yaitu:

1. Durasi siang hari untuk daerah di garis khatulistiwa

   Daerah di garis khatulistiwa memiliki posisi lintang 0$^{o}$ atau $\phi = 0^{o}$ sehingga:

   - Nilai $\cos H$ tidak terpengaruh besar sudut deklinasi matahari (karena $\tan\phi = \tan 0^o = 0$). Hal tersebut berarti bahwa tidak ada perubahan durasi siang hari sepanjang tahun (karena sudut deklinasi berkaitan dengan faktor waktu)
   - Besar sudut $H$ selalu 90$^{o}$ (karena $\cos H = 0$), sehingga durasi siang hari daerah di garis khatulistiwa (secara matematis) adalah 12 jam.

2. Durasi siang hari di belahan bumi utara

   Daerah di belahan bumi utara terletak pada garis lintang positif ($0^o < \phi < 90^o$) sehingga nilai $\tan\phi$ selalu bernilai positif.

   - Besar sudut deklinasi ($\delta$ ) akan bernilai positif antara tanggal 21 Maret sampai 21 Desember, sehingga $\tan\delta$ akan bernilai positif. Karena $\tan\phi$ dan $\tan\delta$ bernilai positif, maka $\cos H$ akan bernilai negatif. Jika cosinus bernilai negatif maka sudut $H$ merupakan sudut pada kuadran II sehingga durasi siang hari akan lebih dari 12 jam.

- Besar sudut deklinasi ($\delta$ ) akan bernilai negatif antara tanggal 21 Desember sampai 21 Maret, sehingga $\tan \delta$ akan bernilai negatif. Karena $\tan \phi$ bernilai positif dan $\tan \delta$ bernilai negatif, maka $\cos H$ akan bernilai positif. Jika cosinus bernilai positif maka sudut $H$ merupakan sudut pada kuadran I sehingga durasi siang hari akan kurang dari 12 jam.

3. Durasi siang hari di belahan bumi selatan

   Daerah di belahan bumi utara terletak pada garis lintang negatif
   $(-90^o < \phi < 0^o)$ sehingga nilai $\tan \phi$ selalu bernilai negatif.

   - Besar sudut deklinasi ($\delta$ ) akan bernilai positif antara tanggal 21 Maret sampai 21 Desember, sehingga $\tan \delta$ akan bernilai positif. Karena $\tan \phi$ bernilai negatif dan $\tan \delta$ bernilai positif, maka $\cos H$ akan bernilai positif. Jika cosinus bernilai positif maka sudut $H$ merupakan sudut pada kuadran I sehingga durasi siang hari akan kurang dari 12 jam.
   - Besar sudut deklinasi ($\delta$ ) akan bernilai negatif antara tanggal 21 Desember sampai 21 Maret, sehingga $\tan \delta$ akan bernilai negatif. Karena $\tan \phi$ dan $\tan \delta$ bernilai negatif, maka $\cos H$ akan bernilai negatif. Jika cosinus bernilai negatif maka sudut $H$ merupakan sudut pada kuadran II sehingga durasi siang hari akan lebih dari 12 jam.

4. Durasi siang hari di daerah kutub (utara maupun selatan)

   Kutub utara terletak pada lintang $90^o$ ($\phi = 90^o$) dan kutub selatan terletak pada lintang $-90^o$ ($\phi = -90^o$) sehingga $\tan \phi$ tidak akan terdefinisi. Oleh karena itu, secara matematis besar sudut $H$ tidak dapat dihitung.

## D. Referensi


Copernicus, Nicolaus. 1976. *Copernicus: On the Revolutions of the Heavenly Spheres* (translated by Duncan, A.M.). London: David & Charles (Publishers) Limited

Dórrie, Heinrich. 1958. *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution*. New York: Dover Publication, inc

Goddijn, Aad. 2006. *De Zon is Een Dansende Klok.Utrecht:* Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Green, Robin. M. 1985. *Spherical Astronomy*. Cambridge: Cambrige University Press

Ptolemaeus, Claudius. 1984. *Ptolemy's Almagest* (translated and annotated by Toomer, G.J.). London: Duckworth

Smart, W. M. 1977. *Textbook on Spherical Astronomy.* Cambridge: Cambrige University Press