PTI 206 Logika

Semester I 2007/2008

Ratna Wardani

Materi

- Logika Predikatif
- Fungsi proposisi
- Kuantor : Universal dan Eksistensial
- Kuantor bersusun

Logika Predikat

- *Logika Predikat* adalah perluasan dari logika proposisi dimana objek yang dibicarakan dapat berupa anggota kelompok.
- logika proposisi (ingat kembali) menganggap proposisi sederhana (kalimat) sebagai entitas tunggal
- Sebaliknya, *logika predikat* membedakan *subjek* dan *predikat* dalam sebuah kalimat.
  - Ingat tentang *subjek* dan *predikat* dalam kalimat?

Penerapan Logika Predikat

Merupakan notasi formal untuk menuliskan secara sempurna *definisi, aksioma, teorema* matematika dengan *jelas, tepat dan tidak ambigu* pada semua cabang matematika.

Logika predikat dengan simbol-simbol fungsi, operator “=”, dan beberapa aturan pembuktian **cukup** untuk mendefinisikan sistem matematika apapun, dan juga cukup untuk membuktikan apapun yang dapat dibuktikan pada sistem tersebut.

Penerapan Praktis

- Merupakan basis untuk mengekspresikan spesifikasi formal untuk sistem kompleks apapun dengan jelas
- Merupakan basis untuk *automatic theorem provers* dan sistem cerdas lainnya
- Didukung oleh beberapa *database query engines* canggih dan *container class libraries*

Subjek dan Predikat

- Pada kalimat “Kucing itu sedang tidur”:
  - frase “kucing itu” merupakan subjek kalimat
  - frase “sedang tidur” merupakan predikat kalimat- suatu properti yang bernilai TRUE untuk si subjek (objek pelaku)
  - dalam logika predikat, *predikat* dimodelkan sebagai sebuah fungsi $P(\cdot)$ dari objek ke proposisi.
  - $P(x)$ = “x sedang tidur” (x adalah sembarang objek).

Predikat

- Konvensi: varibel huruf kecil *x*, *y*, *z*... Menyatakan objek/entitas; variabel huruf besar *P*, *Q*, *R*… menyatakan fungsi proposisi (predikat).
- Perhatikan bahwa *hasil dari* menerapkan sebuah **predikat *P*** kepada **objek *x*** adalah sebuah **proposisi *P*(*x*)**. Tapi predikat *P* **sendiri** (*e.g. P*="sedang tidur") **bukan sebuah proposisi**
  - Contoh: jika *P*(*x*) = "*x* adalah bilangan prima", *P*(3) adalah *proposisi* "3 adalah bilangan prima."

Fungsi Proposisi

- Logika predikat dapat digeneralisir untuk menyatakan fungsi proposisi dengan banyak argumen.
  - *Contoh:* Misalkan $P(x,y,z)$ = "x memberikan pada y nilai z", maka jika x="Mike", y="Mary", z="A", maka $P(x,y,z)$ = "Mike memberi Mary nilai A."

Proposisi dan Fungsi

- Fungsi proposisi (kalimat terbuka) :

  Pernyataan yang mengandung satu buah variabel atau lebih.

- Contoh : x - 3 > 5.

  Misalkan kita sebut fungsi proposisi ini sebagai P(x), dimana P adalah predikat dan x adalah variabel.

Apakah nilai kebenaran dari P(2) ? Salah

Apakah nilai kebenaran dari P(8) ? Salah

Apakah nilai kebenaran dari P(9) ? Benar

Fungsi Proposisi

- Tinjau fungsi proposisi Q(x, y, z) yg didefinisikan:
- **x + y = z.**
- Disini, Q adalah **predikat** dan x, y, and z adalah **variabel**.

Apakah nilai kebenaran dari Q(2, 3, 5) ? Benar

Apakah nilai kebenaran dari Q(0, 1, 2) ? Salah

Apakah nilai kebenaran dari Q(9, -9, 0) ? Benar

Semesta Pembicaraan

- Salah satu kelebihan predikat adalah bahwa predikat memungkinkan kita untuk menyatakan sesuatu tentang banyak objek pada satu kalimat saja.

- Contoh, misalkan $P(x)$=“x+1>x”. Kita dapat menyatakan bahwa “Untuk sembarang angka x, $P(x)$ bernilai TRUE” hanya dengan satu kalimat daripada harus menyatakan satu-persatu: $(\mathbf{0}+1>\mathbf{0}) \wedge (\mathbf{1}+1>\mathbf{1}) \wedge (\mathbf{2}+1>\mathbf{2}) \wedge \ldots$

- Kumpulan nilai yang bisa dimiliki variabel x disebut semesta pembicaraan untuk x *(x's universe of discourse)*

Ekspresi *Quantifier*

- *Quantifiers* merupakan notasi yang memungkinkan kita untuk mengkuantifikasi (menghitung) *seberapa* banyak objek di semesta pembicaraan yang memenuhi suatu predikat.

- "$\forall$" berarti FOR$\forall$LL (semua) atau *universal* quantifier. $\forall x\ P(x)$ berarti untuk semua x di semesta pembicaraan, P berlaku.

- "$\exists$" berarti $\exists$XISTS (terdapat) atau *existential* quantifier. $\exists x\ P(x)$ berarti terdapat x di semesta pembicaraan. (bisa 1 atau lebih) dimana $P(x)$ berlaku.

Predikat & Kuantifier

Pernyataan “x > 3” punya 2 bagian, yakni “x” sebagai subjek dan “ adalah lebih besar 3” sebagai predikat P.

Kita dpt simbolkan pernyataan “x > 3” dengan P(x). Sehingga kita dapat mengevaluasi nilai kebenaran dari P(4) dan P(1).

Subyek dari suatu pernyataan dapat berjumlah lebih dari satu.

Misalkan Q(x,y): x - 2y > x + y

Kuantifikasi Universal $\forall$

- Mis. P(x) suatu fungsi proposisi.

- **Kalimat yg dikuantifikasi secara universal :**

- Untuk semua x dalam semesta pembicaraan, P(x) adalah benar.

- Dengan kuantifier universal $\forall$:
- $\forall x$ P(x) "untuk semua x P(x)" atau
- "untuk setiap x P(x)"

- (Catatan: $\forall x$ P(x) bisa benar atau salah, jadi merupakan *sebuah proposisi*, bukan *fungsi proposisi*.)

Kuantifikasi Universal $\forall$

- Contoh :
- S(x): x adalah seorang mahasiswa IT.
- G(x): x adalah seorang yang pandai.

- Apakah arti dari $\forall x\ (S(x) \rightarrow G(x))$?

- "Jika x adalah mahasiswa IT, maka x adalah seorang yang pandai"
- atau
- "Semua mahasiswa IT pandai."

Kuantifikasi Universal $\forall$

- Contoh:

  Misalkan semesta pembicaraan x adalah <u>tempat parkir di FT UNY</u>.

  Misalkan $P(x)$ adalah predikat "x sudah ditempati."

  Maka *universal quantification* untuk $P(x)$, $\forall x\, P(x)$, adalah *proposisi:*
  - "<u>Semua</u> tempat parkir di FT UNY sudah ditempati"
  - atau, "<u>Setiap</u> tempat parkir di FT UNY sudah ditempati"

Kuantifikasi Universal $\forall$

"P(x) benar untuk semua nilai x dalam domain pembicaraan"

$$\forall x\ P(x).$$

Soal 2. Tentukan nilai kebenaran $\forall x\ (x^2 \geq x)$ jika:

x bilangan real

x bilangan bulat

Untuk menunjukkan $\forall x\ P(x)$ salah, cukup dengan mencari satu nilai x dalam domain shg P(x) salah.

Nilai x tersebut dikatakan contoh penyangkal (*counter example*) dari pernyataan $\forall x\ P(x)$.

Kuantifikasi Eksistensial ∃

- **Kalimat yang di-kuantifikasi secara eksistensial**:
- Ada x di dalam semesta pembicaraan dimana P(x) benar.
- Dengan peng-kuantifikasi eksistensial ∃:
- ∃x P(x) “Ada sebuah x sedemikian hingga P(x).”
- “Ada sedikitnya sebuah x sedemikian
- hingga P(x).”
- (Catatan: ∃x P(x) bisa benar atau salah, jadi merupakan sebuah proposisi, tapi bukan **fungsi proposisi**.)

Kuantifikasi Eksistensial $\exists$

- Contoh :
- P(x): x adalah seorang dosen IT.
- G(x): x adalah seorang yang pandai.
- Apakah arti $\exists x\ (P(x) \land G(x))$?
- "Ada x sedemikian hingga x adalah seorang dosen IT dan x adalah seorang yang pandai."
- atau
- "Sedikitnya satu orang dosen IT adalah seorang yang pandai."

Kuantifikasi Eksistensial $\exists$

- Contoh lain :
- Misalkan semesta pembicaraan adalah bilangan riil.
- Apakah arti dari $\forall x \exists y\ (x + y = 320)$?
- "Untuk setiap **x** ada **y** sehingga **x + y = 320**."

Apakah pernyataan ini benar ? **Ya**

Apakah ini benar untuk bilangan cacah? **Tidak**

Kuantifikasi Eksistensial ∃

- Contoh:

  Misalkan semesta pembicaraan x adalah <u>tempat parkir di FT UNY</u>.

  Misalkan *P*(*x*) adalah predikat "*x* sudah ditempati."

  Maka *existential quantification* untuk *P*(*x*),

  $\exists x\, P(x)$, adalah *proposisi*:

  - "<u>Beberapa</u> tempat parkir di FT UNY sudah ditempati"
  - "<u>Ada</u> tempat parkir di FT UNY yang sudah ditempati"
  - "<u>Setidaknya satu</u> tempat parkir di FT UNY sudah ditempati"

Kuantifikasi Eksistensial ∃

"Ada nilai x dalam domain pembicaraan sehingga P(x) bernilai benar"

$\exists x\ P(x)$.

Soal 3. Tentukan nilai kebenaran dari $\exists x\ P(x)$ bila P(x) menyatakan "$x^2 > 12$" dan domain pembicaraan meliputi semua bilangan bulat positif tidak lebih dari 4.

Disproof dengan *counterexample*

- *Counterexample* dari $\forall x\, P(x)$ adalah sebuah objek c sehingga P(c) salah.

- Pernyataan seperti $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ dapat di-*disproof* secara sederhana dengan memberikan *counterexample*-nya.

Pernyataan: "Semua burung bisa terbang."

Disproved dengan *counterexample*: Penguin.

Variabel bebas dan variabel terikat

- Sebuah ekspresi seperti $P(x)$ dikatakan memiliki variabel bebas x (berarti, x tidak ditentukan).
- Sebuah *quantifier* ($\forall$ atau $\exists$) *berlaku* pada sebuah ekspresi yang memiliki satu atau lebih variabel bebas, dan *mengikat* satu atau lebih variabel tersebut, untuk membentuk ekspresi yang memiliki satu atau lebih *variabel terikat*.

Contoh Pengikatan

- $P(x,y)$ memiliki 2 variabel bebas, x dan y.
- $\forall x\ P(x,y)$ memilki 1 variabel bebas, dan 1 variabel terikat. [yang mana?]
- "$P(x)$, dimana x=3" adalah cara lain mengikat x.
- Ekspresi dengan <u>nol</u> variabel bebas adalah sebuah proposisi bonafit (nyata)
- Ekspresi dengan <u>satu atau lebih</u> variabel bebas adalah sebuah predikat: $\forall x\ P(x,y)$

Negasi

Hubungan antara kuantor universal dengan kuantor eksistensial

E1 : $\neg(\forall x)\, p(x) \equiv (\exists x)\, \neg p(x)$

E2 : $\neg(\exists x)\, p(x) \equiv (\forall x)\, \neg p(x)$

E3 : $\neg(\forall x) p(x) \rightarrow q(x) \equiv (\exists x)\, p(x) \wedge \neg q(x)$

E4 : $\neg(\exists x) p(x) \wedge q(x) \equiv (\forall x)\, p(x) \rightarrow \neg q(x)$

Negasi

"Setiap mhs dalam kelas ini telah mengambil Kalkulus I" [$\forall x\ P(x)$]

Apakah negasi dari pernyataan ini….?

"Ada seorang mhs dalam kelas ini yang belum mengambil Kalkulus I" [$\exists x \neg P(x)$]

Jadi, $\neg \forall x\ P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$.

Negasi (2)

Soal 4. Carilah negasi dari pernyataan berikut:

"Ada politikus yang jujur"

"Semua orang Indonesia makan pecel lele"

Soal 5. Tentukan negasi dari:

$\forall x(x^2 > x)$

$\exists x\ (x^2 = 2)$

Kuantifier Bersusun (Nested Quantifier)

$\forall x \, \forall y \, (x+y = y+x)$

berarti $x+y = y+x$ berlaku untuk semua bilangan real x dan y.

$\forall x \, \exists y \, (x+y = 0)$

berarti untuk setiap x ada nilai y sehingga $x+y = 0$.

$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (x+(y+z) = (x+y)+z)$

berarti untuk setiap x, y dan z berlaku hukum asosiatif $x+(y+z) = (x+y)+z$.

Kuantifier Bersusun (Nested Quantifier)

- **Rumusan penting**
  - $(\forall x)\ (\forall y)\ p(x,y) \leftrightarrow (\forall y)\ (\forall x)\ p(x,y)$
  - $(\forall x)\ (\forall y)\ p(x,y) \rightarrow (\exists y)\ (\forall x)\ p(x,y)$
  - $(\exists y)\ (\forall x)\ p(x,y) \rightarrow (\forall x)\ (\exists y)\ p(x,y)$
  - $(\forall x)\ (\exists y)\ p(x,y) \rightarrow (\exists y)\ (\exists x)\ p(x,y)$
  - $(\exists x)\ (\exists y)\ p(x,y) \leftrightarrow (\exists y)\ (\exists x)\ p(x,y)$

Soal-soal

Soal 6. Artikan kalimat ini dalam bhs Indonesia:

$$\forall x\,(C(x) \vee \exists y\,(C(y) \wedge F(x,y))),$$

bila C(x) : “x mempunyai komputer”,

F(x,y): “x dan y berteman”,

dan domainnya adalah semua mhs di kampus.

Soal 7. Bagaimana dengan berikut ini:

$$\exists x\,\forall y\,\forall z((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z) \rightarrow \neg F(y,z))$$

Soal 8. Nyatakan negasi dari pernyataan

$$\forall x\,\exists y\,(xy=1).$$

Latihan

- Jika $R(x,y)$="x percaya pada y," maka ekspresi dibawah ini berarti:
- $\forall x(\exists y\ R(x,y))$=
- $\exists y(\forall x\ R(x,y)$
- $\exists x(\forall y\ R(x,y)$
- $\forall y(\exists x\ R(x,$
- $\forall x(\forall y\ R(x$

Semua orang memiliki orang yang

Ada seseorang yang dipercayai oleh semua orang (termasuk dirinya sendiri)

Ada seseorang yang mempercayai semua orang).

Semua orang memiliki seseorang yang m

Semua orang mempercayai semua orang, termasuk dirinya sendiri

Konvensi

- Terkadang semesta pembicaraan dibatasi dalam quantification, *contoh*,
  - $\forall x>0\ P(x)$ adalah kependekan dari "untuk semua x lebih besar dari nol, $P(x)$ berlaku."
    $= \forall x\ (x>0 \rightarrow P(x))$
  - $\exists x>0\ P(x)$ adalah kependekan dari "ada x lebih besar dari nol yang membuat $P(x)$ "
    $= \exists x\ (x>0 \land P(x))$

Aturan Ekivalensi Quantifier

- Definisi quantifiers:
  semesta pemb. =a,b,c,…
  $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow P(\text{a}) \wedge P(\text{b}) \wedge P(\text{c}) \wedge \ldots$
  $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow P(\text{a}) \vee P(\text{b}) \vee P(\text{c}) \vee \ldots$

- Kemudian kita bisa membuktikan aturan:
  $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\, \neg P(x)$
  $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\, \neg P(x)$

- Aturan ekivalensi *proposisi* mana yang digunakan untuk membuktikannya?

Aturan Ekivalensi Quantifier

- $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ P(x,y)$
  $\exists x\ \exists y\ P(x,y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ P(x,y)$
- $\forall x\ \mathbf{(}P(x) \wedge Q(x)\mathbf{)} \Leftrightarrow \mathbf{(}\forall x\ P(x)\mathbf{)} \wedge \mathbf{(}\forall x\ Q(x)\mathbf{)}$
  $\exists x\ \mathbf{(}P(x) \vee Q(x)\mathbf{)} \Leftrightarrow \mathbf{(}\exists x\ P(x)\mathbf{)} \vee \mathbf{(}\exists x\ Q(x)\mathbf{)}$
- Latihan:
  Bisakah Anda membuktikan sendiri?
  - Ekivalensi proposisi apa yang Anda gunakan?

Membuat Quantifier Baru

Sesuai namanya, quantifier dapat digunakan untuk menyatakan bahwa sebuah predikat berlaku untuk sembarang kuantitas (jumlah) objek.

Definisikan $\exists! x\, P(x)$ sebagai "$P(x)$ berlaku untuk *tepat satu* x di semesta pembicaraan."

$\exists! x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \neg\exists y\, (P(y) \wedge y \neq x))$

"Ada satu x dimana $P(x)$ berlaku, dan tidak ada y dimana $P(y)$ berlaku dan y berbeda dengan x."

Perhatikan

- Semesta pemb. = bilangan cacah 0, 1, 2, …
- "Sebuah bilangan *x* dikatakan *genap*, G(*x*), **iff** *x* sama nilainya dengan bilangan lain dikalikan 2."
  $\forall x\ (G(x) \leftrightarrow (\exists y\ \ x=2y))$
- "Sebuah bilangan *x* dikatakan *prima*, *P*(*x*), **iff** *x* lebih besar dari 1 dan *x* bukan merupakan hasil perkalian dari dua bilangan bukan-satu."
  $\forall x\ (P(x) \leftrightarrow (x>1 \wedge \neg\exists yz\ \ x=yz \wedge y\neq 1 \wedge z\neq 1))$