



PTI 206 Logika

Semester I 2007/2008

Ratna Wardani

Materi



- ❖ Logika Predikatif
- ❖ Fungsi proposisi
- ❖ Kuantor : Universal dan Eksistensial
- ❖ Kuantor bersusun

Logika Predikat



- *Logika Predikat* adalah perluasan dari logika proposisi dimana objek yang dibicarakan dapat berupa anggota kelompok.
- *logika proposisi* (ingat kembali) menganggap proposisi sederhana (kalimat) sebagai entitas tunggal
- Sebaliknya, *logika predikat* membedakan *subjek* dan *predikat* dalam sebuah kalimat.
 - Ingat tentang *subjek* dan *predikat* dalam kalimat?

Penerapan Logika Predikat

Merupakan notasi formal untuk menuliskan secara sempurna *definisi, aksioma, teorema* matematika dengan *jelas, tepat dan tidak ambigu* pada semua cabang matematika.

Logika predikat dengan simbol-simbol fungsi, operator "=", dan beberapa aturan pembuktian **cukup** untuk mendefinisikan sistem matematika apapun, dan juga cukup untuk membuktikan apapun yang dapat dibuktikan pada sistem tersebut.

Penerapan Praktis



- Merupakan basis untuk mengekspresikan spesifikasi formal untuk sistem kompleks apapun dengan jelas
- Merupakan basis untuk *automatic theorem provers* dan sistem cerdas lainnya
- Didukung oleh beberapa *database query engines* canggih dan *container class libraries*

Subjek dan Predikat

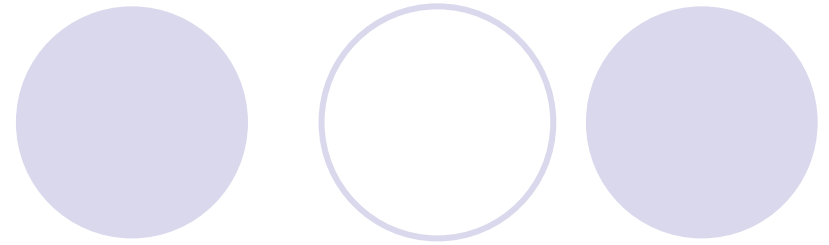
- Pada kalimat “Kucing itu sedang tidur”:
 - frase “kucing itu” merupakan subjek kalimat
 - frase “sedang tidur” merupakan predikat kalimat- suatu properti yang bernilai TRUE untuk si subjek (objek pelaku)
 - dalam logika predikat, *predikat* dimodelkan sebagai sebuah fungsi $P(\cdot)$ dari objek ke proposisi.
 - $P(x) = “x \text{ sedang tidur}”$ (x adalah sembarang objek).

Predikat



- Konvensi: variabel huruf kecil $x, y, z...$
Menyatakan objek/entitas; variabel huruf besar $P, Q, R...$ menyatakan fungsi proposisi (predikat).
- Perhatikan bahwa *hasil dari* menerapkan sebuah **predikat P** kepada **objek x** adalah sebuah **proposisi $P(x)$** . Tapi predikat P **sendiri** (e.g. P ="sedang tidur") **bukan sebuah proposisi**
 - Contoh: jika $P(x) = "x \text{ adalah bilangan prima}"$,
 $P(3)$ adalah *proposisi* "3 adalah bilangan prima."

Fungsi Proposisi



- Logika predikat dapat digeneralisir untuk menyatakan fungsi proposisi dengan banyak argumen.
 - *Contoh:* Misalkan $P(x,y,z)$ = “x memberikan pada y nilai z”, maka jika x = “Mike”, y = “Mary”, z = “A”, maka $P(x,y,z)$ = “Mike memberi Mary nilai A.”

Proposisi dan Fungsi

- Fungsi proposisi (kalimat terbuka) :

Pernyataan yang mengandung satu buah variabel atau lebih.

- Contoh : $x - 3 > 5$.

Misalkan kita sebut fungsi proposisi ini sebagai $P(x)$, dimana P adalah predikat dan x adalah variabel.

Apakah nilai kebenaran dari $P(2)$? **Salah**

Apakah nilai kebenaran dari $P(8)$? **Salah**

Apakah nilai kebenaran dari $P(9)$? **Benar**

Fungsi Proposisi

- Tinjau fungsi proposisi $Q(x, y, z)$ yg didefinisikan:

- $$\mathbf{x + y = z.}$$

- Disini, Q adalah **predikat** dan $x, y,$ and z adalah **variabel**.

Apakah nilai kebenaran dari $Q(2, 3, 5)$? **Benar**

Apakah nilai kebenaran dari $Q(0, 1, 2)$? **Salah**

Apakah nilai kebenaran dari $Q(9, -9, 0)$? **Benar**

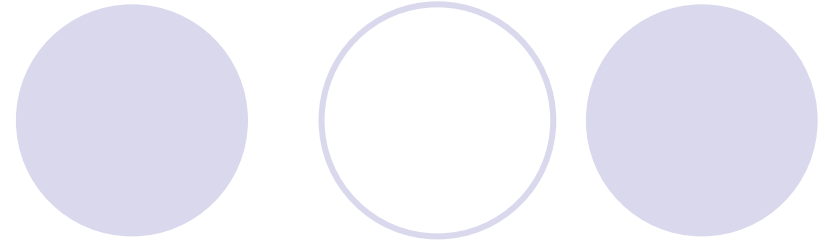
Semesta Pembicaraan

- Salah satu kelebihan predikat adalah bahwa predikat memungkinkan kita untuk menyatakan sesuatu tentang banyak objek pada satu kalimat saja.
- Contoh, misalkan $P(x) = "x+1 > x"$. Kita dapat menyatakan bahwa "Untuk sembarang angka x , $P(x)$ bernilai TRUE" hanya dengan satu kalimat daripada harus menyatakan satu-persatu: $(0+1 > 0) \wedge (1+1 > 1) \wedge (2+1 > 2) \wedge \dots$
- Kumpulan nilai yang bisa dimiliki variabel x disebut semesta pembicaraan untuk x (x 's *universe of discourse*)

Ekspresi *Quantifier*

- *Quantifiers* merupakan notasi yang memungkinkan kita untuk mengkuantifikasi (menghitung) *seberapa* banyak objek di semesta pembicaraan yang memenuhi suatu predikat.
- “ \forall ” berarti FOR \forall LL (semua) atau *universal* quantifier.
 $\forall x P(x)$ berarti untuk semua x di semesta pembicaraan, P berlaku.
- “ \exists ” berarti \exists XISTS (terdapat) atau *existential* quantifier.
 $\exists x P(x)$ berarti terdapat x di semesta pembicaraan. (bisa 1 atau lebih) dimana $P(x)$ berlaku.

Predikat & Kuantifier



Pernyataan “ $x > 3$ ” punya 2 bagian, yakni “ x ” sebagai subjek dan “ x adalah lebih besar 3” sebagai **predikat P**.

Kita dpt simbolkan pernyataan “ $x > 3$ ” dengan $P(x)$.
Sehingga kita dapat mengevaluasi nilai kebenaran dari $P(4)$ dan $P(1)$.

Subyek dari suatu pernyataan dapat berjumlah lebih dari satu.

Misalkan $Q(x,y): x - 2y > x + y$

Kuantifikasi Universal \forall

- Mis. $P(x)$ suatu fungsi proposisi.
- **Kalimat yg dikuantifikasi secara universal :**
- Untuk semua x dalam semesta pembicaraan, $P(x)$ adalah benar.
- Dengan kuantifier universal \forall :
 - $\forall x P(x)$ “untuk semua $x P(x)$ ” atau
 - “untuk setiap $x P(x)$ ”
- (Catatan: $\forall x P(x)$ bisa benar atau salah, jadi merupakan *sebuah proposisi*, bukan *fungsi proposisi*.)

Kuantifikasi Universal \forall

- Contoh :
- $S(x)$: x adalah seorang mahasiswa IT.
- $G(x)$: x adalah seorang yang pandai.
- Apakah arti dari $\forall x (S(x) \rightarrow G(x))$?
- “Jika x adalah mahasiswa IT, maka x adalah seorang yang pandai”
- atau
- “Semua mahasiswa IT pandai.”

Kuantifikasi Universal \forall

- Contoh:

Misalkan semesta pembicaraan x adalah tempat parkir di FT UNY.

Misalkan $P(x)$ adalah predikat “ x sudah ditempati.”

Maka *universal quantification* untuk $P(x)$, $\forall x P(x)$, adalah *proposisi*:

- “Semua tempat parkir di FT UNY sudah ditempati”
- atau, “Setiap tempat parkir di FT UNY sudah ditempati”

Kuantifikasi Universal \forall

“P(x) benar untuk **semua** nilai x dalam domain pembicaraan”

$$\forall x P(x).$$

Soal 2. Tentukan nilai kebenaran $\forall x (x^2 \geq x)$ jika:
x bilangan real
x bilangan bulat

Untuk menunjukkan $\forall x P(x)$ **salah**, cukup dengan mencari **satu** nilai x dalam domain shg P(x) **salah**.

Nilai x tersebut dikatakan **contoh penyangkal** (*counter example*) dari pernyataan $\forall x P(x)$.

Kuantifikasi Eksistensial \exists

- **Kalimat yang di-kuantifikasi secara eksistensial:**
- Ada x di dalam semesta pembicaraan dimana $P(x)$ benar.
- Dengan peng-kuantifikasi eksistensial \exists :
- $\exists x P(x)$ “Ada sebuah x sedemikian hingga $P(x)$.”
- “Ada sedikitnya sebuah x sedemikian
- hingga $P(x)$.”
- (Catatan: $\exists x P(x)$ bisa benar atau salah, jadi merupakan sebuah proposisi, tapi bukan **fungsi proposisi**.)

Kuantifikasi Eksistensial \exists

- Contoh :
- $P(x)$: x adalah seorang dosen IT.
- $G(x)$: x adalah seorang yang pandai.
- Apakah arti $\exists x (P(x) \wedge G(x))$?
- “Ada x sedemikian hingga x adalah seorang dosen IT dan x adalah seorang yang pandai.”
- atau
- “Sedikitnya satu orang dosen IT adalah seorang yang pandai.”

Kuantifikasi Eksistensial \exists

- Contoh lain :
- Misalkan semesta pembicaraan adalah bilangan riil.
- Apakah arti dari $\forall x \exists y (x + y = 320)$?
- “Untuk setiap x ada y sehingga $x + y = 320$.”

Apakah pernyataan ini benar ?

Ya

Apakah ini benar untuk bilangan cacah?

Tidak

Kuantifikasi Eksistensial \exists

- **Contoh:**

Misalkan semesta pembicaraan x adalah tempat parkir di FT UNY.

Misalkan $P(x)$ adalah predikat “ x sudah ditempati.”

Maka *existential quantification* untuk $P(x)$,

$\exists x P(x)$, adalah *proposisi*:

- “Beberapa tempat parkir di FT UNY sudah ditempati”
- “Ada tempat parkir di FT UNY yang sudah ditempati”
- “Setidaknya satu tempat parkir di FT UNY sudah ditempati”

Kuantifikasi Eksistensial \exists

“Ada nilai x dalam domain pembicaraan sehingga $P(x)$ bernilai benar”

$$\exists x P(x).$$

Soal 3. Tentukan nilai kebenaran dari $\exists x P(x)$ bila $P(x)$ menyatakan “ $x^2 > 12$ ” dan domain pembicaraan meliputi semua bilangan bulat positif tidak lebih dari 4.

Disproof dengan counterexample

- *Counterexample* dari $\forall x P(x)$ adalah sebuah objek c sehingga $P(c)$ salah.
- Pernyataan seperti $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ dapat di-*disproof* secara sederhana dengan memberikan *counterexample*-nya.

Pernyataan: “Semua burung bisa terbang.”

Disproved dengan *counterexample*: **Penguin**.

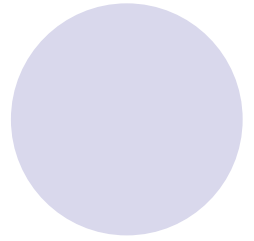
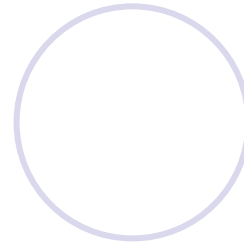
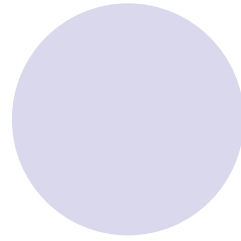
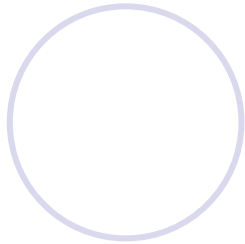
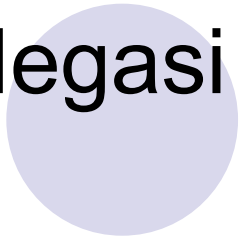
Variabel bebas dan variabel terikat

- Sebuah ekspresi seperti $P(x)$ dikatakan memiliki variabel bebas x (berarti, x tidak ditentukan).
- Sebuah *quantifier* (\forall atau \exists) *berlaku* pada sebuah ekspresi yang memiliki satu atau lebih variabel bebas, dan *mengikat* satu atau lebih variabel tersebut, untuk membentuk ekspresi yang memiliki satu atau lebih *variabel terikat*.

Contoh Pengikatan

- $P(x,y)$ memiliki 2 variabel bebas, x dan y .
- $\forall x P(x,y)$ memiliki 1 variabel bebas, dan 1 variabel terikat. [yang mana?]
- “ $P(x)$, dimana $x=3$ ” adalah cara lain mengikat x .
- Ekspresi dengan no variabel bebas adalah sebuah proposisi bonafit (nyata)
- Ekspresi dengan satu atau lebih variabel bebas adalah sebuah predikat: $\forall x P(x,y)$

Negasi



Hubungan antara kuantor universal dengan kuantor eksistensial

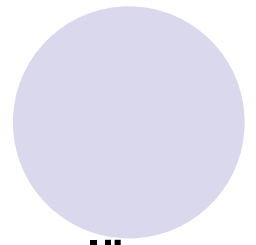
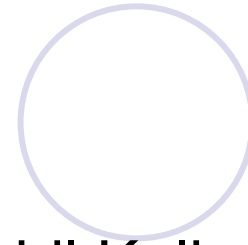
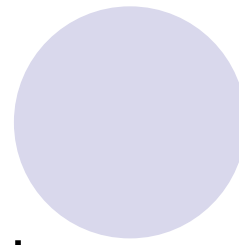
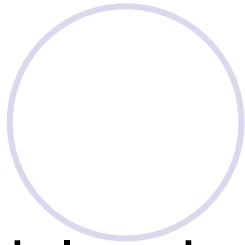
$$\mathbf{E1 : } \neg(\forall \mathbf{x}) \mathbf{p} (\mathbf{x}) \equiv (\exists \mathbf{x}) \neg \mathbf{p} (\mathbf{x})$$

$$\mathbf{E2 : } \neg(\exists \mathbf{x}) \mathbf{p} (\mathbf{x}) \equiv (\forall \mathbf{x}) \neg \mathbf{p} (\mathbf{x})$$

$$\mathbf{E3 : } \neg(\forall \mathbf{x}) \mathbf{p} (\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{q} (\mathbf{x}) \equiv (\exists \mathbf{x}) \mathbf{p} (\mathbf{x}) \wedge \neg \mathbf{q} (\mathbf{x})$$

$$\mathbf{E4 : } \neg(\exists \mathbf{x}) \mathbf{p} (\mathbf{x}) \wedge \mathbf{q} (\mathbf{x}) \equiv (\forall \mathbf{x}) \mathbf{p} (\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{q} (\mathbf{x})$$

Negasi



“Setiap mhs dalam kelas ini telah mengambil Kalkulus I”

$$[\forall x P(x)]$$

Apakah **negasi** dari pernyataan ini....?

“Ada seorang mhs dalam kelas ini yang belum mengambil Kalkulus I”

$$[\exists x \neg P(x)]$$

Jadi, $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$.

Negasi (2)



Soal 4. Carilah negasi dari pernyataan berikut:

“Ada politikus yang jujur”

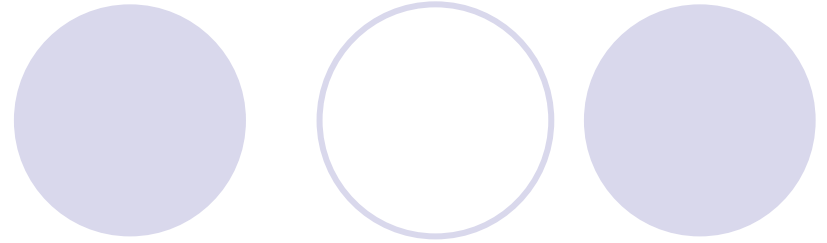
“Semua orang Indonesia makan pecel lele”

Soal 5. Tentukan negasi dari:

$$\forall x (x^2 > x)$$

$$\exists x (x^2 = 2)$$

Kuantifier Bersusun (Nested Quantifier)



$$\forall x \forall y (x+y = y+x)$$

berarti $x+y = y+x$ berlaku untuk semua bilangan real x dan y .

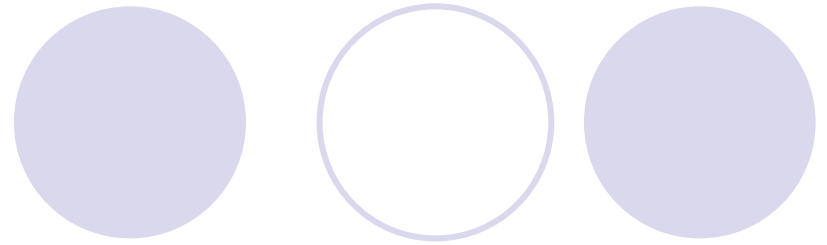
$$\forall x \exists y (x+y = 0)$$

berarti untuk setiap x ada nilai y sehingga $x+y = 0$.

$$\forall x \forall y \forall z (x+(y+z) = (x+y)+z)$$

berarti untuk setiap x , y dan z berlaku hukum asosiatif $x+(y+z) = (x+y)+z$.

Kuantifier Bersusun (Nested Quantifier)



- **Rumusan penting**

- $(\forall x) (\forall y) p(x,y) \leftrightarrow (\forall y) (\forall x) p(x,y)$
- $(\forall x) (\forall y) p(x,y) \rightarrow (\exists y) (\forall x) p(x,y)$
- $(\exists y) (\forall x) p(x,y) \rightarrow (\forall x) (\exists y) p(x,y)$
- $(\forall x) (\exists y) p(x,y) \rightarrow (\exists y) (\exists x) p(x,y)$
- $(\exists x) (\exists y) p(x,y) \leftrightarrow (\exists y) (\exists x) p(x,y)$

Soal-soal

Soal 6. Artikan kalimat ini dalam bhs Indonesia:

$$\forall x (C(x) \vee \exists y (C(y) \wedge F(x,y))),$$

bila $C(x)$: “x mempunyai komputer”,

$F(x,y)$: “x dan y berteman”,

dan domainnya adalah semua mhs di kampus.

Soal 7. Bagaimana dengan berikut ini:

$$\exists x \forall y \forall z ((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z) \rightarrow \neg F(y,z))$$

Soal 8. Nyatakan negasi dari pernyataan

$$\forall x \exists y (xy=1).$$

Latihan

- Jika $R(x,y)$ = “ x percaya pada y ,” maka ekspresi dibawah ini berarti:

- $\forall x(\exists y R(x,y))$ – Semua orang memiliki orang yang Ada seseorang yang dipercayai oleh semua orang (termasuk dirinya sendiri)
- $\exists y(\forall x R(x,y))$ – Ada seseorang yang mempercayai semua orang).
- $\forall y(\exists x R(x,y))$ – Semua orang memiliki seseorang yang
- $\forall x(\forall y R(x,y))$ – Semua orang mempercayai semua orang, termasuk dirinya sendiri

Konvensi

- Terkadang semesta pembicaraan dibatasi dalam quantification, *contoh*,
 - $\forall x > 0 P(x)$ adalah kependekan dari “untuk semua x lebih besar dari nol, $P(x)$ berlaku.”
 $= \forall x (x > 0 \rightarrow P(x))$
 - $\exists x > 0 P(x)$ adalah kependekan dari “ada x lebih besar dari nol yang membuat $P(x)$ ”
 $= \exists x (x > 0 \wedge P(x))$

Aturan Ekivalensi Quantifier

- Definisi quantifiers:

semesta pemb. = a, b, c, ...

$$\forall x P(x) \Leftrightarrow P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge \dots$$

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee \dots$$

- Kemudian kita bisa membuktikan aturan:

$$\forall x P(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg P(x)$$

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg P(x)$$

- Aturan ekivalensi *proposisi* mana yang digunakan untuk membuktikannya?

Aturan Ekivalensi Quantifier

- $\forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$

$$\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$$

- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

- Latihan:

Bisakah Anda membuktikan sendiri?

- Ekivalensi proposisi apa yang Anda gunakan?

Membuat Quantifier Baru

Sesuai namanya, quantifier dapat digunakan untuk menyatakan bahwa sebuah predikat berlaku untuk sembarang kuantitas (jumlah) objek.

Definisikan $\exists!x P(x)$ sebagai “ $P(x)$ berlaku untuk *tepat satu* x di semesta pembicaraan.”

$$\exists!x P(x) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg \exists y (P(y) \wedge y \neq x))$$

“Ada satu x dimana $P(x)$ berlaku, dan tidak ada y dimana $P(y)$ berlaku dan y berbeda dengan x .”

Perhatikan

- Semesta pemb. = bilangan cacah 0, 1, 2, ...
- “Sebuah bilangan x dikatakan *genap*, $G(x)$, **iff** x sama nilainya dengan bilangan lain dikalikan 2.”

$$\forall x (G(x) \leftrightarrow (\exists y \ x=2y))$$

- “Sebuah bilangan x dikatakan *prima*, $P(x)$, **iff** x lebih besar dari 1 dan x bukan merupakan hasil perkalian dari dua bilangan bukan-satu.”

$$\forall x (P(x) \leftrightarrow (x > 1 \wedge \neg \exists yz \ x=yz \wedge y \neq 1 \wedge z \neq 1))$$