LOGIKA

Ratna Wardani

Pendidikan Teknik Informatika

Materi Perkuliahan

- Ekivalensi Logis
- Pembuktian ekivalensi dengan Tabel Kebenaran
- Hukum-hukum Ekivalensi

Ekivalensi Proposisi

- Dua buah proposisi majemuk yang secara sintaksis (tertulis) berbeda dapat memiliki makna semantik yang sama. Kedua proposisi tersebut dikatakan "ekivalen"
- Kita akan pelajari:
- Aturan dan hukum ekivalensi
- Bagaimana membuktikan ekivalensi menggunakan *symbolic derivations*.

Ekivalensi Logika

- Proposisi majemuk p ekivalen dengan proposisi majemuk q, ditulis $p \Leftrightarrow q$, **IFF** proposisi majemuk $p \Leftrightarrow q$ adalah tautologi atau kontradiksi.
- Proposisi majemuk p dan q ekivalen satu sama lain **IFF** p dan q memiliki nilai kebenaran yang sama pada semua barisnya di tabel kebenaran

Membuktikan Ekivalensi dengan Tabel Kebenaran

Contoh. Buktikan $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
F	F	F	T	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Hukum Ekivalensi

- *Identity:* $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$ $\quad p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$
- *Domination:* $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$ $\quad p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$
- *Idempotent:* $p \vee p \Leftrightarrow p$ $\quad p \wedge p \Leftrightarrow p$
- *Double negation:* $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- *Commutative:* $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $\quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- *Associative:* $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Hukum Ekivalensi

- *Distributif*: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

  $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- *De Morgan*:

  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- *Trivial tautology/contradiction*:

  $p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ $\qquad$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{F}$

Hukum Ekivalensi

- *Absorption:* $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \qquad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
- *Absorption:* $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$

  $p \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$
- *Hukum lain:*

  $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$

  $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

  $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q)$

  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (\mathrm{q} \Rightarrow p)$

Definisi Operator dengan Ekivalensi

- Menggunakan ekivalensi, kita dapat mendefinisikan operator dengan operator lainnya
- Exclusive or: $p \oplus q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$
  $p \oplus q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
- Implikasi: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- Biimplikasi: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg (p \oplus q)$

Contoh (1)

- Buktikan dengan *symbolic derivation* apakah
- $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \oplus r) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r.$

$(p \wedge \neg q) \underline{\rightarrow} (p \oplus r) \Leftrightarrow$

- [Expand definition of $\rightarrow$] $\neg(p \wedge \neg q) \vee (p \underline{\oplus} r)$
- [Defn. of $\oplus$] $\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$
- [DeMorgan's Law]
- $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$
- $\Leftrightarrow$ [associative law] *cont.*

Contoh (2)

- $(\neg p \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r)) \Leftrightarrow$ [$\vee$ commutes]
- $\Leftrightarrow \underline{(q \vee \neg p)} \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$ [$\vee$ associative]
- $\Leftrightarrow q \vee \underline{(\neg p \vee} ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r)))$ [distrib. $\vee$ over $\wedge$]
- $\Leftrightarrow q \vee (((\underline{\neg p \vee} (p \vee r)) \wedge (\underline{\neg p \vee} \neg(p \wedge r)))$
- [assoc.] $\Leftrightarrow q \vee ((\underline{(\neg p \vee p) \vee r}) \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r)))$
- [trivial taut.] $\Leftrightarrow q \vee ((\underline{\mathbf{T}} \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r)))$
- [domination] $\Leftrightarrow q \vee (\underline{\mathbf{T}} \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r)))$
- [identity] $\Leftrightarrow q \vee (\neg p \vee \neg(p \wedge r)) \Leftrightarrow$ *cont.*

Contoh (3)

- $q \vee (\neg p \vee \neg(p \wedge r))$
- [DeMorgan's] $\Leftrightarrow q \vee (\neg p \vee (\neg p \vee \neg r))$
- [Assoc.] $\Leftrightarrow q \vee ((\neg p \vee \neg p) \vee \neg r)$
- [Idempotent] $\Leftrightarrow q \vee (\neg p \vee \neg r)$
- [Assoc.] $\Leftrightarrow (q \vee \neg p) \vee \neg r$
- [Commut.] $\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r$
- *Q.E.D. (quod erat demonstrandum)*