HALAMAN PENGESAHAN PROPOSAL PENELITIAN
DOSEN YUNOR

1. Judul Penelitian :
Identifikasi Sifat-Sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus.

2.Ketua Pelaksana :

a. Nama : Musthofa, M.Sc
b. NIP : 19801107 200604 1 001
c. Pangkat/Gol. : Penata Muda / IIIa
d. Jabatan : Asisten Ahli
e. Fakultas : FMIPA
f. Jurusan : Pendidikan Matematika
g. Bidang Keahlian : Aljabar
h. Alamat Kantor/Telp/Email : Karangmalang Yogyakarta
i. Alamat Rumah/Telp/Email : Anjir Rt 90/ Rw 26 Hargorejo Kokap Kulon Progo musthofa@uny.ac.id

3. Skim Penelitian : Dosen Junior
4. Bidang Keilmuan/Penelitian : Matematika
5. Tim Peneliti :

No	Nama dan Gelar	Bidang Keahlian
1.	Musthofa, M.Sc	Aljabar
2.	Nikenasih Binatari, M.Si	Pemodelan

6. Mahasiswa yang terlibat :

No	Nama	NIM
1.	Aulia Rizkiani	08305144044
2.	Hendra Listya K	08305144014

7. Lokasi Penelitian : FMIPA UNY
8. Waktu Penelitian : 8 bulan
9. Dana yang diusulkan : Rp. 4.000.000,00

Mengetahui,
Kajurdik Matematika UNY

Dr. Sugiman
NIP. 19650228 199101 1 001

Yogyakarta, 30 Maret 2012
Ketua Tim Pelaksana

Musthofa, M.Sc
NIP. 19801107 200604 1 001

Menyetujui,
Dekan FMIPA UNY

Dr. Hartono
NIP. 19620329 198702 1 002

A. JUDUL PENELITIAN

" Identifikasi Sifat-Sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus"

B. ABSTRAK RENCANA PENELITIAN

Aljabar maxplus memiliki peranan yang sangat banyak dalam menyelesaikan persoalan di beberapa bidang seperti teori graf, kombinatorika, teori sistem, teori antrian dan proses stokastik. Hal ini telah dibahas dalam beberapa buku dan jurnal seperti Bacelli,*et.al* (2001), Heidergott, (1999), Fleming, (2004), Menguy, *et.al* (2000). Hal ini disebabkan aljabar max-plus mampu menguraikan suatu tipe tertentu dari sistem nonlinear dalam sudut pandang aljabar linear menjadi sistem linear dalam sudut pandang aljabar max-plus. Kelinieran ini akan memudahkan dalam penganalisaan sistem yang dikaji.

Dalam aljabar linear dan aplikasinya, nilai eigen dan vektor eigen memiliki peranan penting salah satunya dalam menganalisis suatu sistem. Tidak adanya invers terhadap operasi pertama dalam aljabar max-plus, mengakibatkan kesulitan ketika akan menerapkan metode –metode yang sudah dikenal dalam aljabar linear seperti misalnya untuk menentukan solusi persamaan $Ax = b$. Beberapa peneliti di bidang aljabar max-plus, seperti F. Bacelli dan Peter Butkovic telah menunjukkan eksistensi dan metode untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks atas aljabar max-plus.

Berberapa hal yang cukup menarik untuk diteliti antara lain metode menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks atas aljabar max-plus serta sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen seperti halnya pada aljabar linear yang sudah dikenal. Sejauh yang kami ketahui, belum diteliti masalah sifat – sifat nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar max-plus, misalnya jika λ merupakan nilai eigen A, apakah nilai eigen $AA = \lambda\lambda$?. Berdasarkan hasil-hasil tersebut, dalam penelitian ini akan diselidiki tentang sifat –sifat lebih lanjut dari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus.

C. PENDAHULUAN

1. Latar Belakang Masalah

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, para peneliti dituntut untuk terus melakukan inovasi dan usaha yang terus berkesinambungan dalam menghadapi persaingan dan untuk mewujudkan kesejahteraan umat manusia. Kemajuan pesat dalam teknologi informasi tidak lepas dari perkembangan riset dalam bidang ilmu dasar. Oleh karena itu peneltian di bidang ilmu dasar tidak bisa ditinggalkan.

Teori aljabar max-plus mampu menguraikan suatu tipe tertentu dari sistem nonlinear dalam sudut pandang aljabar linear menjadi sistem linear dalam sudut pandang aljabar max-plus. Kelinieran ini akan memudahkan dalam penganalisaan sistem yang dikaji. Aljabar max-plus adalah suatu subklas dari Sistem Event Diskrit (SED). Pendekatan aljabar maxplus dapat menentukan dan menganalisa berbagai sifat sistem, tetapi pendekatan hanya bisa diterapkan pada sebagian klas SED yang bisa diuraikan dengan model waktu invarian max-linear (aljabar max-plus). Subklas ini adalah subklas dari waktu invarian SED deterministik yang dapat digunakan untuk menganalisa perilaku suatu sistem yang ada. Beberapa literatur yang memuat pembahasan mendalam tentang aljabar max-plus antara lain dapat ditemukan dalam F. Baccelli dkk, (1992) , B. Heidergott dkk, (2006) dan Butkovic (2010).

Matriks merupakan salah satu alat matematis untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam bidang keilmuaan. Pembahasan tentang nilai eigen dan vektor eigen dalam dari suatu matriks relative terhadap suatu struktur aljabar merupakan bagian yang tidak bisa ditinggalkan. Oleh sebab itu, melalui penelitian diinginkan kajian yang mendalam tentang nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar max-plus yang memiliki aplikasi di berbagai bidang keilmuan.

2. Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus?
2. Bagaimana sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus?

3. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji metode untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus
2. Mengidentifikasi sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus

4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Memeperluas kajian tentang nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus
2. Mengembangkan penelitian dalam bidang ilmu dasar untuk kemajuan sains dan teknologi.

D. KAJIAN PUSTAKA

1. Aljabar Maxplus

Aljabar maxplus adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dengan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan, yang dinotasikan dengan $\otimes$. Selanjutnya ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\oplus$, $\otimes$) dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}$ dan $\{-\infty\}$ dinotasikan dengan ε. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$. Struktur aljabar dari $\mathbb{R}_{\max}$ adalah semifield, yaitu :

1. ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\oplus$) merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral $\{-\infty\}$
2. ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\otimes$) merupakan grup komutatif dengan elemen identitas 0
3. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat distributif
4. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu

   $\forall\, a \in \mathbb{R}_{\max}$, $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

2. Matriks atas $\mathbb{R}_{\max}$

Dalam aljabar linear, jika *F* field, maka dapat dibentuk suatu matriks berukuran $m \times n$ dengan entri –entrinya adalah elemen –elemen *F*. Hal yang serupa dapat dikerjakan pada $\mathbb{R}_{\max}$, yaitu dapat dibentuk matriks *A* berukuran $m \times n$ dengan entri-entrinya elemen $\mathbb{R}_{\max}$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks atas aljabar maxplus didefinisikan sebagai berikut:

(1) $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$

(2) $(A \otimes B)_{ij} = \underset{k}{\oplus}(A_{ik} \otimes B_{kj})$

Contoh :

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, maka

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus -2 & 2 \oplus 7 \\ -2 \oplus 1 & 3 \oplus -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \{1+(-2)\} \oplus \{2+1\} & \{1+7\} \oplus \{2+(-3)\} \\ \{-2+(-2)\} \oplus \{3+1\} & \{-2+7\} \oplus \{3+(-3)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Jika $(\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ menyatakan himpunan semua matriks dengan entri-entrinya elemen $\mathbb{R}_{\max}$, ,

maka matriks E dengan $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ jika } i = j \\ \varepsilon, \text{ jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} = \varepsilon, \forall\ i, j$

berturut– turut merupakan matriks identitas dan matriks nol. Jadi ,

(1) $(E \otimes A) = (A \otimes E) = A$ untuk setiap $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$;

(2) $(\varepsilon \oplus A) = (A \oplus \varepsilon) = A$, untuk setiap $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$.

Perlu diperhatikan bahwa $(\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ bukan merupakan semifield, tetapi merupakan semiring, sebab terhadap operasi $\otimes$ $(\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ tidak komutatif dan tidak setiap $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ mempunyai invers .

3. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-plus

Berikut merupakan kajian tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus yang tulis oleh Subiono. Pengertian nilai-karakteristik dan vektor-karakteristik yang bersesuaian dari suatu matriks persegi A berukuran $n \times n$ sebagaimana dijumpai dalam aljabar linear biasa juga dijumpai dalam aljabar max-plus, yaitu bila diberikan suatu persamaan:

$$A \otimes x = \lambda \otimes x$$

dalam hal ini masing-masing vector $x \in \mathbf{R}_{\max}^{n}$ dan skalar $\lambda \in \mathbf{R}$ dinamakan vektor karakteristik dan nilai-karakteristik dari matriks A dengan vector $x \neq (\varepsilon, \cdots, \varepsilon)'$. Tanda $'$ yang telah digunakan menyatakan transpose.

Contoh : Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{maka } \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.

Terlihat bahwa nilai-karakteristik dari matriks A adalah $\lambda = 6$ dan vektor karakteristiknya adalah

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dibahas suatu graph berarah dari suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Suatu graph berarah dari matriks A dinotasikan oleh $\mathbf{G}(A) = (\mathbf{E}, \mathbf{V})$. Grap $\mathbf{G}(A)$ mempunyai n titik, himpunan semua titik dari $\mathbf{G}(A)$ dinyatakan oleh $\mathbf{V}$. Suatu garis dari titik j ke titik i ada bila $a_{i,j} \neq \varepsilon$, garis ini dinotasikan oleh (j,i). Himpunan semua garis dari grap $\mathbf{G}(A)$ dinotasikan oleh $\mathbf{E}$. Bobot dari garis (j,i) adalah nilai dari $a_{i,j}$. Bila $a_{i,j} = \varepsilon$, maka garis (j,i), tidak ada. Suatu barisan garis

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{l-1}, i_l)$$

dari suatu graph dinamakan suatu path. Suatu path dikatakan elementer bila tidak ada titik terjadi dua kali dalam path tersebut. Suatu sirkuit adalah path elementer tertutup, yaitu $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{l-1}, i_1)$. Bobot dari suatu path $p = (i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{l-1}, i_l)$ diberikan oleh

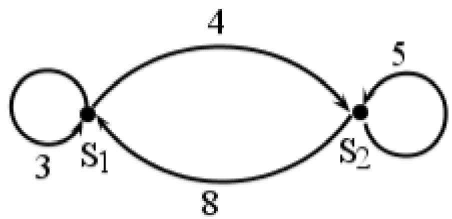
$$\left(a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \cdots + a_{i_l, i_{l-1}}\right),$$

sedangkan bobot rata-ratanya adalah bobot dari p dibagi oleh banyaknya garis dalam p, yaitu

$$\left(a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \cdots + a_{i_l, i_{l-1}}\right) / l - 1.$$

Sirkuit mean adalah bobot rata-rata dari suatu sirkuit. Sebarang sirkuit dengan sirkuit mean maksimum dinamakan ***sirkuit kritis***. Suatu graph dikatakan ***strongly connected*** bila suatu path ada untuk setiap titik i ke setiap titik j. Dalam hal yang demikian matriks yang terkait dengan grap $\mathbf{G}(A)$ ini dinamakan matriks ***taktereduksi***. Sedangkan bila grap $\mathrm{G(A)}$ tidak strongly connected, maka matrik A adalah ***tereduksi***.

Gambar grap $\mathbf{G}(A)$ dari Contoh 1 diberikan dalam Gambar 1. Dalam gambar ini ada tiga sirkuit yaitu $(1,1)$; $(1,2),(2,1)$ dan $(2,2)$. Masing-masing sirkuit mempunyai sirkuit mean $\frac{3}{1}=3, \frac{8+4}{2}=6$ dan $\frac{5}{1}=5$. Terlihat bahwa sirkuit mean maksimum adalah 6 terjadi pada sirkuit $(1,2),(2,1)$. Dalam hal ini sirkuit $(1,2),(2,1)$ dinamakan ***sirkuit kritis*** dari grap $\mathbf{G}(A)$.



Gambar 1: Grap $\mathrm{G(A)}$

Juga terlihat bahwa graph $\mathbf{G}(A)$ dalam Gambar 1 adalah strongly connected. Intepretasi dari nilai-karakteristik dan vektor-karakteristik dalam Contoh 1 adalah sebagai berikut: Misalkan ada dua kota dan pada masing-masing kota terdapat stasiun kereta $\mathrm{S_1}$ dan $\mathrm{S_2}$. Ada dua jalur transpotasi, yaitu jalur ***dalam*** dan ***luar***. Jalur luar adalah untuk melayani masyarakat yang bertempat tinggal dipinggiran kota. Diasumsikan pada jalur luar $\mathrm{S_1}$ dan $\mathrm{S_2}$ beroperasi masing-masing satu kereta dan pada jalur dalam beroperasi dua kereta. Masing-masing kereta beroperasi pada jalurnya masing-masing, yaitu kereta yang beroperasi pada jalur luar tidak bisa beroperasi di jalur dalam, begitu sebaliknya. Angka 3 pada jalur luar menunjukkan lama perjalan kereta dari $\mathrm{S_1}$ kembali ke $\mathrm{S_1}$. Angka 5 pada jalur luar menunjukkan lama perjalan kereta dari $\mathrm{S_2}$ kembali ke $\mathrm{S_2}$. Angka 4 pada jalur dalam menunjukkan lama perjalan kereta dari $\mathrm{S_1}$ ke $\mathrm{S_2}$. Angka 8 pada jalur dalam menunjukkan lama perjalan kereta dari $\mathrm{S_2}$ ke $\mathrm{S_1}$. Keberangkatan kereta pada jalur dalam dan luar baik dari $\mathrm{S_1}$ dan $\mathrm{S_2}$ beroperasi tidak secara bebas, yaitu keberangkatan kereta dari $\mathrm{S_1}$ harus menunggu kedatangan kereta dari $\mathrm{S_2}$, begitu sebaliknya keberangkatan kereta dari

S_2 harus menunggu kedatangan kereta dari S_1. Hal ini untuk menjamin bahwa setiap penumpang kereta dari mana saja posisi asalnya bisa pindah kereta supaya mencapai tujuan yang diinginkan. Selanjutnya bila $x_1(k)$ dan $x_2(k)$ masing-masing adalah waktu saat keberangkatan kereta di S_1 dan S_2 pada saat yang ke-k dengan $k = 0,1,2,3,\cdots$, maka didapat

$$x_1(k+1) = \max\{3 + x_1(k), 8 + x_2(k)\}$$
$$x_2(k+1) = \max\{4 + x_1(k), 5 + x_2(k)\}$$

dengan menggunakan notasi max-plus aljabar didapat

$$x_1(k+1) = 3 \otimes x_1(k) \oplus 8 \otimes x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = 4 \otimes x_1(k) \oplus 5 \otimes x_2(k)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan notasi matriks didapat

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Evolusi sistem dalam Contoh 1 diberikan oleh persamaan

$$x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0,1,2,\cdots \qquad (2)$$

dengan $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Bila dipilih $x(0)$ adalah vektor-karakteristik dari matriks A, maka sistem (2) akan beroperasi secara periodik de-ngan periode sebesar nilai-karakteristik $\lambda = 6$. Hal ini sesuai dengan bentuk per-samaan berikut :

$$x(k+1) = A \otimes x(k) = \lambda^{\otimes(k+1)} \otimes x(0), k = 0,1,2,\cdots \qquad (3)$$

Sehingga dengan menggunakan Persamaan (3) didapat barisan keberangkatan ke-reta $x(k)$ yang periodik dengan periode sebesar 6:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 26 \\ 24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 32 \\ 30 \end{bmatrix}, \ldots$$

Berikut ini diberikan contoh dari dua matriks tereduksi yang pertama mempunyai nilai-karakteristik yang kedua tidak tidak mempunyai nilai karakteristik.

Contoh : Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix} \text{dan } B = A' = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Didapat

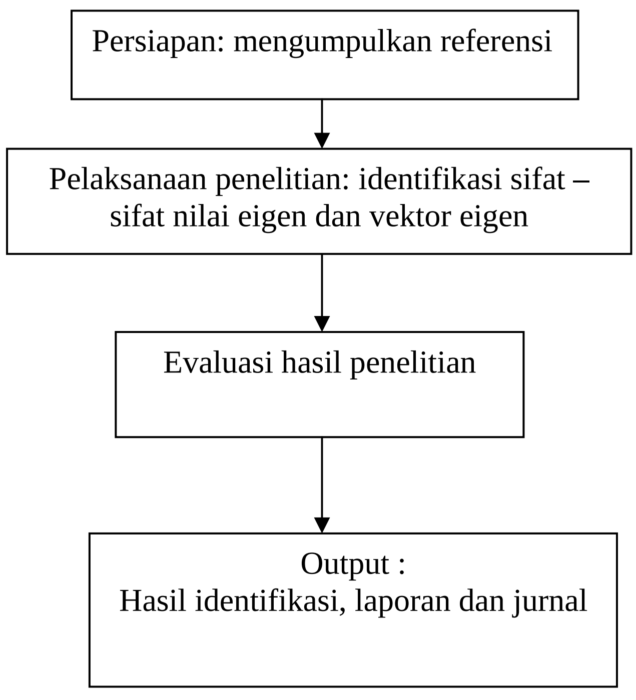
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa matriks A mempunyai nilai karakteristik 3 dan vektor karakteristik $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tetapi matriks B tidak mempunyai nilai karakteristik, walaupun B merupakan transpose dari matriks A.

E. METODOLOGI PENELITIAN

Jenis penelitian ini adalah penelitian pengembangan yang bertujuan untuk mengembangkan hasil-hasil yang telah diperoleh pada kajian tentang aljabar max-plus. Adapun bagan alir peneltian ini adalah sebaga berikut :



F. ORGANISASI TIM PENELITI

No.	Nama NIP	Jabatan Dalam Tim Alokasi Waktu, Jam/Minggu	Tugas Penelitian (diuraikan dengan rinci)
1	Musthofa, M.Sc NIP.198011072006041001	Ketua Peneliti 10 jam/minggu	a. Mengkoordinasikan penelitian
			b. Menyusun perangkat penelitian dan instrumen penelitian
			c. Melakukan observasi
			d. Membimbing mahasiswa
			e. Menyusun laporan penelitian
2	Nikenasih Binatari, M.Si 198407072008012003	Anggota Peneliti, 8 jam/minggu	a. Menyusun perangkat penelitian dan instrumen penelitian
			b. Melakukan observasi
			c. Membimbing mahasiswa
			d. Menyusun laporan penelitian
			e. Mengurus izin penelitian

G. JADWAL KEGIATAN PENELITIAN

Jenis Kegiatan	**Bulan ke**							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Persiapan: mengumpulkan referensi, menyusun rencana penelitian								
Tahap pelaksanaan								
Tahap akhir: evaluasi dan penyusunan laporan penelitian, seminar hasil penelitian								

H. DAFTAR PUSTAKA

Bacelli, F.*et.al*. 2001. *Synchronization and Linearity*.New York: John Wiley & Sons

Butkovic, p. 2002. *Max-algebra : the linear algebra of combinatoric. Science Direct, Journal of algebra and its application.*

Cohen,G.et.al.1997. Linear Projector in The max- plus Algebra. *5th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems*. Paphos Cyprus, 21-23 July 1997

Flemming,W.H, 2004. Max-Plus Stochastic Processes. *Applied Mathemamatic Optimization.*New York : Springer-Verlag

Heidergot, B. 2000. A Characterization of (max,+) -linear queueing system.*Queueing System*.2359(2000) 237-262.

Menguy, E. 2000. A fist Step Towards Adaptive Control for Linear System in Max Algebra. *Discrete Event Dynamic System: Theory and Application.* Boston: KluwerAcademic Publisher.

Subiono. 2010. *Aljabar max-plus dan terapannya.* Artikel tidak diterbitkan.