SISTEM PERSAMAAN LINEAR PADA ALJABAR MIN-PLUS

Musthofa
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
musthofa@uny.ac.id

Abstrak

Himpunan semua bilangan real $R \cup \{+\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi minimum sebagai operasi penjumlahan dan operasi penjumlahan sebagai operasi pergandaan membentuk struktur aljabar yang dinamakan semiring idempoten. Karena operasi penjumlahan pada semiring idempoten tidak mempunyai invers, maka metode yang digunakan pada lapangan atau ring untuk menentukan solusi persamaan $ax = b$ tidak dapat diterapkan. Untuk itu, dalam makalah ini akan dibahas metode untuk menentukan solusi persamaan linear berbentuk $AX = B$ atas aljabar min-plus.

Kata kunci: persamaan linear, semiring idempoten, aljabar min-plus

PENDAHULUAN

Aljabar min-plus, yaitu $R \cup \{+\infty\}$ dengan R adalah himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi minimum dan operasi penjumlahan, memiliki beberapa aplikasi antara lain dalam memodelkan jaringan telekomunikasi, lalulintas dan *video smoothing*. Melalui aljabar min-plus masalah nonlinear dapat diselesaikan seperti masalah linear dalam aljabar linear. Sebagai contoh diketahui dua bis tranportasi umum berangkat dari terminal keberangkatan yang berbeda, tetapi menuju suatu terminal tujuan yang sama. Selanjutnya dari terminal tujuan ini, akan berangkat bis ke-tiga setelah salah satu dari dua bis tersebut tiba. Jika waktu keberangkatan kedua bis tersebut berturut-turut adalah adalah x_1, x_2 dan waktu perjalanan berturut-turut adalah a_1 dan a_2, maka waktu keberangkatan bis ke-tiga (x_3) dapat disajikan sebagai $x_3 = \min (x_1 + a_1, x_2 + a_2)$. Dalam aljabar min-plus, persamaan ini dapat disajikan sebagai $x_3 = (x_1 \otimes a_1) \oplus (x_2 \otimes a_2)$, dengan $\oplus$ menyatakan operasi minimum dan $\otimes$ menyatakan operasi penjumlahan. Persamaan tersebut analog dengan persamaan $x_3 = ax_1 + a_2x_2$ dalam aljabar linear.

Perbedaan yang cukup berarti dari struktur aljabar min-plus dengan struktur aljabar lain seperti lapangan atau ring terletak pada tidak adanya invers terhadap operasi $\oplus$ pada aljabar min-plus. Oleh karena itu, pada persamaan $a \oplus x = a \oplus y$, tidak dapat langsung disimpulkan $x = y$. Hal ini mengakibatkan metode untuk menyelesaikan persamaan $a \oplus x = b$ pada aljabar min-plus sangat berbeda dengan metode menyelesaikan persamaan linear pada lapangan atau ring. Ditinjau dari struktur aljabar, $R \cup \{+\infty\}$ terhadap operasi minimum merupakan monoid komutatif dengan elemen identitas $\{+\infty\}$. Akibatnya untuk menyelesaikan persamaan $a \oplus x = b$ pada aljabar min-plus digunakan konsep urutan pada lattice.

Selanjutnya persamaan $a \oplus x = b$ dapat diperluas menjadi sistem persamaan linear, misalnya

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \oplus a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 \oplus a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Dalam hal ini, symbol operasi $\otimes$ tidak dituliskan seperti halnya pada $2 \times a$ yang ditulis sebagai $2a$. Persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Berdasarkan uraian di atas, dalam makalah ini akan dibahas hal-hal sebagai berikut:

1. Metode menentukan solusi persamaan $Ax = b$ pada aljabar min-plus.
2. Cara menentukan ada tidaknya solusi persamaan $Ax = b$ pada aljabar min-plus.

PEMBAHASAN

1. Aljabar Min-plus

Aljabar min-plus merupakan himpunan $R \cup \{+\infty\}$yang dilengkapi dengan operasi minimum, dinotasikan dengan $\oplus$, dan operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $\otimes$. Selanjutnya ($R \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes$) dinotasikan dengan R_{min}. Jadi, dalam R_{min} : $3 \oplus 4 = \min(3, 4) = 3$ dan $3 \otimes 4 = 3 + 4 = 7$. Sifat –sifat yang berlaku dalam R_{min} antara lain :

a) $x \oplus (y \oplus z) = \min (x, \min (y, z)) = \min(\min (x,y), z) = (x \oplus y) \oplus z$
b) $x \oplus \{+\infty\} = \min (x, +\infty) = x$
c) $x \otimes \{+\infty\} = x + \{+\infty\} = \{+\infty\}$
d) $x \otimes 0 = x + 0 = x$
e) $x \otimes (y \otimes z) = x + (y + z) = (x + y) + z = (x \otimes y) \otimes z$
f) $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$
g) $x \otimes (-x) = x + (-x) = 0$
h) $x \otimes (y \oplus z) = x + (\min (y, z)) = \min (x + y, x + z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Dari sifat –sifat di atas, terlihat bahwa $\{+\infty\}$ merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen netral terhadap operasi $\otimes$. Oleh karena itu, ditinjau dari struktur aljabar R_{min} merupakan semiring, yaitu :

i. ($R \cup \{+\infty\}, \oplus$) merupakan monoid komutatif dengan elemen netral $\{+\infty\}$
ii. ($R \cup \{+\infty\}, \otimes$) merupakan monoid dengan elemen netral 0
iii. Operasi $\otimes$ terhadap $\oplus$ bersifat distributif
iv. Elemen netral terhadap operasi $\oplus$, yaitu $\{+\infty\}$ bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$. Jadi $x \otimes \{+\infty\} = \{+\infty\} \otimes x = \{+\infty\}, \forall x \in R_{min}$

Lebih khusus, R_{min} merupakan semifield, yaitu :

i. R_{min} merupakan semiring
ii. ($R, \otimes$) merupakan grup komutatif

Selanjutnya karena operasi $\oplus$ bersifat idempotent, yaitu $x \oplus x = x$, untuk setiap $x \in R_{min}$, maka R_{min} merupakan semifield idempotent. Dalam teorema di bawah ini ditunjukkan bahwa sifat idempotent mengakibatkan tidak adanya invers terhadap operasi tersebut.

Teorema 1. *Jika pada suatu semiring S operasi $\oplus$ pada bersifat idempotent, maka elemen invers terhadap operasi $\oplus$ tidak ada.*

Bukti :

Misalkan S semiring dengan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ adalah ε. Ambil sebarang $x \neq \varepsilon \in S$. Andaikan terdapat $y \in S$ sehingga $x \oplus y = y \oplus x$. Karena $\oplus$ bersifat idempotent, maka

$$x = x \oplus \varepsilon = x \oplus (x \oplus y) = (x \oplus x) \oplus y = x \oplus y = \varepsilon .$$

Kontradiksi dengan $x \neq \varepsilon$.

2. Matriks atas Aljabar Min-plus

Dalam uraian di atas, telah dibahas bahwa aljabar min-plus ($R \cup \{+\infty\}$, min, +) merupakan semifeild idempotent. Selanjutnya seperti pada lapangan, jika diberikan suatu semifield idempotent R_{min}, dapat dibentuk matriks dengan entri-entrinya elemen-elemen R_{min}. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks yang telah terbentuk didefinisikan sebagai berikut:

(1) $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$

(2) $(A \otimes B)_{ij} = \underset{k}{\oplus}(A_{ik} \otimes B_{kj})$

Contoh 2.

Jika $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \text{-}2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} \text{-}2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \text{-}2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \text{-}2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \oplus \text{-}2 & 2 \oplus 3 \\ \text{-}2 \oplus 1 & 1 \oplus 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-}2 & 2 \\ \text{-}2 & 1 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \text{-}2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \text{-}2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0+(\text{-}2) \oplus (2+1) & (0+3) \oplus (2+2) \\ (\text{-}2+(\text{-}2)) \oplus (1+1) & (\text{-}2+3) \oplus (1+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-}2 & 3 \\ \text{-}4 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya didefinisikan ($R_{\min}$)$^{n \times n}$ sebagai himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya elemen $R_{\min}$,. Elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan elemen netral terhadap operasi $\otimes$ dalam ($R_{\min}$)$^{n \times n}$ berturut-turut adalah matriks E dengan $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ jika } i = j \\ +\infty, \text{ jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} = +\infty$,untuk setiap i dan j . Jadi ,

(1) ($E \otimes A$) = ($A \otimes E$) = A untuk setiap $A \in$ ($R_{\min}$)$^{n \times n}$;
(2) ($\varepsilon \oplus A$) = ($A \oplus \varepsilon$) = A, untuk setiap $A \in$ ($R_{\min}$)$^{n \times n}$.

Berikut ini beberapa sifat matriks atas aljabar min-plus :

Sifat 3. *Jika A, B, C* $\in$ ($R_{\min}$)$^{n \times n}$ *maka berlaku :*

(1) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
(2) $A \oplus B = B \oplus A$
(3) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$
(4) $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
(5) $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
(6) $A \oplus A = A$

Bukti :

1. $[A \oplus (B \oplus C)]_{ij} = A_{ij} \oplus (B_{ij} \oplus C_{ij}) = (A_{ij} \oplus B_{ij}) \oplus C_{ij} = [(A \oplus B) \oplus C]_{ij}$.
2. $[A \oplus B]_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \oplus A_{ij} = [B \oplus A]_{ij}$.
3. $$\begin{aligned} \left[A \otimes (B \otimes C)\right]_{ij} &= \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} A_{ik} \left(\overset{n}{\underset{l=1}{\oplus}} B_{kl} \otimes C_{lj} \right) \\ &= \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} \overset{n}{\underset{l=1}{\oplus}} A_{ik} \otimes B_{kl} \otimes C_{lj} \\ &= \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} \left(\overset{n}{\underset{l=1}{\oplus}} A_{ik} \otimes B_{kl} \right) \otimes C_{lj} \\ &= \left[(A \otimes B) \otimes C\right]_{ij} \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} \left[A \otimes (B \oplus C)\right]_{ij} &= \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} A_{ik} \left(B_{kj} \oplus C_{kj} \right) \\ &= \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} \left(\left(A_{ik} \otimes B_{kj} \right) \oplus \left(A_{ik} \otimes C_{kj} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \left(A_{ik} \otimes B_{kj} \right) \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes C_{kj} \right)$$
$$= \left[(A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \right]_{ij}$$

5. $\left[(A \oplus B) \otimes C) \right]_{ij} \quad = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(A_{ik} \oplus B_{ik} \right) C_{kj}$
$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\left(A_{ik} \otimes C_{kj} \right) \oplus \left(B_{ik} \otimes C_{kj} \right) \right)$$
$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \left(A_{ik} \otimes C_{kj} \right) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \left(B_{ik} \otimes C_{kj} \right)$$
$$= \left[(A \otimes C) \oplus (B \otimes C) \right]_{ij}$$

6. $\left[A \oplus A \right]_{ij} = A_{ij} \oplus A_{ij} = A_{ij}$.É

Berdasarkan sifat-sifat di atas, $(R_{\min})^{n \times n}$ bukan merupakan semifield, tetapi merupakan semiring idempotent.

3. Lattice

Lattice berkaitan dengan konsep tentang urutan. Konsep ini akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear berbentuk $a\,x = b$ pada aljabar min-plus.

Definisi 4. *Diberikan E sebarang himpunan tak kosong dan ≤ relasi biner pada E. Relasi ≤ dikatakan relasi urutan parsial jika memenuhi:*

1. *$\forall x \in E, x \le x$ (refleksif)*
2. *$\forall x,y \in E$, jika $x \le y$ dan $y \le x$, maka $x = y$ (antisimetris)*
3. *$\forall x,y,z \in E$, jika $x \le y$ dan $y \le z$, maka $x \le z$ (transitif)*

Contoh 5.

1. Relasi " = " pada setiap himpunan merupakan relasi urutan parsial.
2. Relasi " | " pada ℕ = himpunan bilangan asli , yaitu $\forall a,b \in \mathbb{N}$, $a \mid b$, jika dan hanya jika terdapat $c \in \mathbb{N}$, sehingga $b = ac$ yang disebut dengan relasi keterbagian merupakan relasi urutan parsial.
3. Misal $M_{n \times n}(R)$ menyatakan himpunan semua matriks berukuran $n \times n$, dengan entri-entrinya di dalam R. Relasi ≤ pada $M_{n \times n}(R)$ yang didefinisikan sebagai: $\forall A,B \in M_{n \times n}(R), A \le B \Leftrightarrow a_{ij} \le b_{ij}$,untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n$ dan $j=1,2,\ldots,n$ merupakan relasi urutan parsial.

Definisi 6. *Suatu himpunan tak kosong E yang dilengkapi relasi urutan parsial "≤ " pada E dinamakan Poset* (*Partially Ordered Set*) *dan dinotasikan dengan* (*E,* ≤).

Selanjutnya pada poset akan didefinisikan batas atas dan batas atas terkecil dari sebagai berikut.

Definisi 7. *Diberikan* (*E,* ≤) *poset dan* { *a,b*} ⊆ *E. Suatu c ∈ E dinamakan batas atas dari* {*a,b*} *jika a ≤ c dan b≤ c. suatu d ∈ E dinamakan batas atas terkecil dari {a,b} jika :*

(i) *d merupakan batas atas dari* {*a,b*} *dan*

(ii) *jika c ∈ E batas atas dari* {*a,b*} *maka d ≤ c.*

Selanjutnya batas atas terkecil dari {*a,b*} *dinotasikan dengan $a \vee b$.*

Analog dengan batas atas, di bawah ini diberikan definisi batas bawah dan batas bawah terkecil.

Definisi 8. *Diberikan* (*E,* ≤) *poset dan* { *a,b*} ⊆ *E. Suatu c ∈ E dinamakan batas bawah dari {a,b} jika c ≤ a dan c≤ b. suatu d ∈ E dinamakan batas bawah terbesar dari* {*a,b*} *jika :*

(i) *d merupakan batas bawah dari $\{a,b\}$ dan*
(ii) *jika $c \in E$ batas bawah dari $\{a,b\}$ maka $c \leq d$.*
Selanjutnya batas bawah terbesar dari $\{a,b\}$ dinotasikan dengan $a \wedge b$.

Contoh 9. Diketahui N = himpunan semua bilangan asli. Didefinisikan relasi $\leq$ pada N sebagai berikut: Untuk setiap $a,b \in N$, $a \leq b$ jika dan hanya jika a membagi habis b. Batas atas dari $\{4,6\} \subset N$ antara lain 12, 24, dan 36. Dalam hal ini, 12 merupakan batas atas terkecil dari $\{4, 6\}$.

Berkaitan dengan batas bawah dan batas atas, di bawah ini diberikan definisi elemen maximal, elemen maximum dan elemen top.
Definisi 10. *Diberikan $(E, \leq)$ poset dan $A \subseteq E$.*
(i) *Suatu $a \in A$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$ berakibat $x \leq a$ dinamakan elemen maximum dari A.*
(ii) *Suatu $a \in A$ dinamakan elemen maximal dari A jika terdapat $x \in A$ sehingga $a \leq x$, maka $a = x$.*
(iii) *Suatu $x \in E$ sehingga untuk setiap $y \in E$ berlaku $y \leq x$ dinamakan elemen top dan dinotasikan dengan* $\top$.

Elemen top pada poset $(E, \leq)$, jika ada, maka elemen tersebut tunggal. Hal ini sebagai akibat dari sifat anti simetris, yaitu misalkan x dan y semuanya elemen top. Diperoleh $x \leq y$ dan $y \leq x$, sehingga menurut sifat anti simetris pada $(E, \leq)$ berakibat $x = y$. Demikian juga jika terdapat elemen maximum pada $A \subseteq E$, maka elemen maximum tersebut tunggal. Disamping itu, jika $A = E$, maka elemen top dari E adalah elemen maximum dari A.

Contoh 11. Misal $S = \{ 1, 2, 3 \}$ dan $T = \{ A \,/\, A \subset S \}$. Didefinisikan relasi $\leq$ pada T sebagai berikut : untuk setiap $A, B \in T$, $A \leq B$ jika dan hanya jika $A \subset B$. Diperoleh $\{1,2\}$, $\{2,3\}$ dan $\{1,3\}$ semuanya merupakan elemen maximal. Dalam hal ini T tidak mempunyai elemen maximum.

Contoh 12. Misal $E = \{ 1,2,3,4,5\}$. Jika didefinikan relasi $\leq$ pada E sebagai relasi urutan biasa, maka $(E, \leq)$ merupakan poset dengan elemen top adalah 5. Jika $A = \{ 1,2,3 \} \subset E$, maka elemen maximum dari $(A, \leq)$ adalah 3.

Definisi 13. *Suatu poset $(L,\leq)$ disebut lattice jika $a \wedge b$ dan $a \vee b$ ada untuk setiap $a,b \in L$.*

Contoh 14. Misal $L = [0, 1] = \{ x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 1 \}$. Jika $\leq$ didefinisikan sebagai relasi urutan biasa, maka $(L, \leq)$ merupakan poset. Lebih lanjut, untuk setiap $\{a, b\} \in L$, $\max(a, b)$ merupakan batas atas terkecil dari $\{a, b\}$ dan $\min(a, b)$ merupakan batas bawah terbesar dari $\{a, b\}$. Jadi $(L, \leq)$ merupakan lattice.

Selanjutnya di bawah ini akan diberikan suatu sifat bahwa pada sebarang semiring idempotent S dapat didefinisikan suatu relasi " $\leq$ " sehingga $(S, \leq)$ merupakan poset.
Teorema 15. *Diketahui $(S,\oplus, \cdot)$ semiring idempoten. Jika $\leq$ merupakan relasi pada S yang didefinisikan dengan: untuk setiap $a,b \in S$, $a \leq b$ jika dan hanya jika $a \oplus b = b$, maka $\leq$ merupakan relasi urutan parsial.*

Bukti :
Akan ditunjukkan $\leq$ bersifat refleksif, antisimetris dan transitif. Karena $\forall\, a \in S$, $a \oplus a = a$, maka $a \leq a$, yaitu $\leq$ refleksif. Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a \oplus b = b$ dan $b \oplus a = a$. Sehingga diperoleh $a = b$, yaitu $\leq$ antisimetris. Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \oplus b = b$ dan $b \oplus c = c$. Akibatnya, $a \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c = b \oplus c = c$, yaitu $a \leq c$. Jadi $\leq$ transitif. Terbukti $\leq$ merupakan relasi urutan parsial, sehingga $(S, \leq)$ merupakan poset. É

Selanjutnya akan ditunjukkan jika S merupakan semifield idempoten, maka S merupakan lattice. Untuk itu terlebih dahulu dibahas dua teorema di bawah ini.

Teorema 16. *Jika* $(S,\oplus,\otimes)$ *semifield idempoten dan* a^{-1} *menyatakan invers dari a terhadap operasi* $\otimes$, *maka berlaku* $a \le b \Rightarrow b^{-1} \le a^{-1}$

Bukti :

$a \le b \quad \Rightarrow a \oplus b = b$

$\Rightarrow (a \oplus b) \otimes (a^{-1} \otimes b^{-1}) = b \otimes (a^{-1} \otimes b^{-1})$

$\Rightarrow (a \otimes a^{-1} \otimes b^{-1}) \oplus (b \otimes a^{-1} \otimes b^{-1}) = b \otimes a^{-1} \otimes b^{-1}$

$\Rightarrow b^{-1} \oplus a^{-1} = a^{-1}$

$\Rightarrow b^{-1} \le a^{-1}$. É

Teorema 17. *Jika S semifield idempoten, maka pernyataan berikut ekuivalen*:

(1) $a \le b \Rightarrow b^{-1} \le a^{-1}$

(2) $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$

(3) $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$

Bukti :

(1) $\Rightarrow$ (2)

Karena $a \wedge b \le b$ & $a \wedge b \le a$, maka menurut (1) $b^{-1} \ge (a \wedge b)^{-1}$ & $a^{-1} \ge (a \wedge b)^{-1}$, sehingga $a^{-1} \vee b^{-1} \ge (a \wedge b)^{-1}$. Akibatnya, $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \le [(a \wedge b)^{-1}]^{-1} = a \wedge b$ (3)

Karena $a^{-1} \le a^{-1} \vee b^{-1}$ dan $b^{-1} \le a^{-1} \vee b^{-1}$, maka $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \ge a$ & $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \ge b$, sehingga

$$(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \ge a \wedge b \qquad (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} = a \wedge b$, sehingga $a^{-1} \vee b^{-1} = (a \wedge b)^{-1}$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Karena $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$, maka diperoleh $(a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} \vee (b^{-1})^{-1} = a \vee b$.

Diperoleh $(a \vee b)^{-1} = [(a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}]^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Diketahui $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$ dan misalkan $a \le b$. Akan ditunjukkan $b^{-1} \le a^{-1}$. Karena $a \le b$, maka $a \vee b = b$. Akibatnya $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1} = b^{-1}$, yaitu $b^{-1} \le a^{-1}$. É

Teorema 18. *Jika S semifield idempoten, maka* $(S, \le)$ *merupakan lattice*.

Bukti :

Ambil sebarang $a, b \in S$. Diperoleh $a \oplus (a \oplus b) = (a \oplus a) \oplus b = a \oplus b$, dan $b \oplus (a \oplus b) = b \oplus (b \oplus a) = (b \oplus b) \oplus a = b \oplus a$. Jadi $a \le a \oplus b$ dan $b \le a \oplus b$, yaitu $a \oplus b$ merupakan batas atas dari a dan b. Andaikan ada c sedemikian sehingga $a \le c$ dan $b \le c$, maka $a \oplus c = c$ dan $b \oplus c = c$. Sehingga $(a \oplus b) \oplus c = c$, yaitu $a \oplus b \le c$. Jadi $a \oplus b = a \vee b$. Karena S semifield, maka $(a \wedge b) = (a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} = (a^{-1} \oplus b^{-1})^{-1}$ untuk $a, b \ne \varepsilon$. Jika a atau b sama dengan nol (ε), maka $a \wedge b = \varepsilon$. Jadi terbukti S merupakan lattice. É

Berdasarkan teorema di atas, karena aljabar min-plus merupakan semifield idempotent, maka aljabar min-plus merupakan lattice. Berikut ini konsep yang akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear pada aljabar min-plus.

Definisi 19. *Suatu pemetaan f pada himpunan teurut parsial dikatakan isoton jika*

$$x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$$

Contoh 20.

$f : R_{\min} \to R_{\min}$ dengan $f(x) = x \otimes 10$ merupakan pemetaan isoton, yaitu untuk setiap $x, y \in R_{\min}$ berlaku $x \le y \Rightarrow f(x) = x \otimes 10 = x + 5 \le y + 10 = y \otimes 10 = f(y)$

Definisi 21. *Suatu pemetaan isoton* $f : D \to E$ *dengan D dan E masing-masing himpunan terurut parsial dikatakan pemetaan residuated jika untuk setiap* $b \in E$, *maka* $\{ x \,/\, f(x) \le b\}$ *mempunyai elemen maximum, dinotasikan dengan* $f^{\#}(b)$.*Pemetaan isoton* $f^{\#} : E \to D$ *disebut residual dari f.*

Contoh 22. Pada contoh 20 di atas, f merupakan pemetaan residuated , sebab untuk setiap $y \in R_{\min}$, $\{x/f(x) = x \otimes 10 \le y\}$ mempunyai elemen maximum, yaitu $x = f^{\#}(y) = y$-10.

Hubungan antara f dan $f^{\#}$ seperti yang dibahas dalam Bacelli, dkk (2001) adalah sebagai berikut:

$$f \circ f^{\#} \le I \tag{5}$$

$$f^{\#} \circ f \ge I \tag{6}$$

Selanjutnya residual dari $f^{\#}(b)$ digunakan untuk menentukan ada tidaknya solusi dari persamaan $f(x) = b$, dinyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 23. *Jika $f : D \to E$ pemetaan residuated, maka persamaan $f(x) = b$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $f(f^{\#}(b)) = b$.*
Bukti :
($\Leftarrow$)
Diketahui $f(f^{\#}(b))$ = b, maka persamaan $f(x) = b$ mempunyai solusi, yaitu $x = f^{\#}(b)$
($\Rightarrow$)
Diketahui $f(x) = b$ mempunyai solusi, misalkan x_1 . Diperoleh $f(x_1) = b$. Karena $f^{\#}(b)$ adalah elemen maksimum dalam $\{x/ f(x) \le b\}$, maka $x_1 \le f^{\#}(b)$. Karena f isoton maka $f(x_1) \le f(f^{\#}(b))$. Menurut (1a), $f f^{\#}(b) \le b$, akibatnya $b = f(x_1) \le f f^{\#}(b) \le b$, yaitu $f(f^{\#}(b)) = b$.

4. Penyelesaian Persamaan *Ax* = *b* pada Aljabar Min-plus

Untuk menentukan solusi persamaan Ax = b pada aljabar min-plus, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa pemetaan $A : R_{\min}^{\ n} \to R_{\min}^{\ n}$, yaitu $A \in (R_{\min})^{n \times n}$ merupakan pemetaan residuated.

Teorema 24. $A : R_{\min}^{\ n} \to R_{\min}^{\ n}$ *merupakan pemetaan residuated.*
Bukti :

Jika $x \in$ R$_{\min}$, maka $Ax = \begin{bmatrix} A_{11}(x_1) \oplus A_{12}(x_2) \oplus ... \oplus A_{1n}(x_n) \\ A_{21}(x_1) \oplus A_{22}(x_2) \oplus ... \oplus A_{2n}(x_n) \\ .... \\ A_{n1}(x_1) \oplus A_{n2}(x_2) \oplus ... \oplus A_{nn}(x_n) \end{bmatrix}$. Dibentuk $f_j(x_j) = \begin{bmatrix} A_{1j}(x_j) \\ A_{2j}(x_j) \\ .... \\ A_{nj}(x_j) \end{bmatrix}$, maka

$Ax = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} f_j(x_j)$. Untuk setiap j, jika $x_{j_h} \le x_{j_k} \Rightarrow f_j(x_{j_h}) \le f_j(x_{j_k})$.Oleh karena itu A merupakan pemetaan isoton. Disamping itu untuk setiap j, $\{\ x_j / f_j(x_j) \le b\ \}$ mempunyai elemen maksimum, yaitu $x_j = \{b_1 - A_{1j} \wedge\ b_2 - A_{2j} \wedge\ \dots \wedge\ b_n - A_{nj}\}$. Diperoleh A pemetaan residuated. Dengan kata lain, A dapat dipandang sebagai suatu pemetaan residuated dari $R^n_{\min}$ ke $R^n_{\min}$. Berdasarkan uraian ini, yaitu karena $x_j = \{b_1 - A_{1j} \wedge\ b_2 - A_{2j} \wedge\ \dots \wedge\ b_n - A_{nj}\}$, maka residual dari A adalah $[A^{\#}(b)]_j = \bigwedge_{i=1}^{n}(b_j - A_{ij})$.

Hasil di atas digunakan untuk menentukan solusi persamaan $Ax = b$ pada aljabar min-plus sebagai berikut.
Teorema 25. *Jika $A \in (R_{\min})^{n \times n}$, dan $b \in R^n_{\min}$, maka persamaan $Ax = b$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $A(A^{\#}(b)) = b$.*
Bukti :
($\Leftarrow$)
Diketahui $A(A^{\#}(b)) = b$. Jadi persamaan $Ax = b$ mempunyai penyelesaian , yaitu $x = A^{\#}(b)$
($\Rightarrow$)

Misalkan persamaan $Ax = b$ mempunyai solusi $x^{\bullet}$. diperoleh $A\,x^{\bullet} = b$, sehingga $A\,x^{\bullet} \leq b$. Karena $A^{\#}(b)$ merupakan elemen maksimum dalam $\{\, x/\, Ax \leq b\,\}$ maka $x^{\bullet} \leq A^{\#}(b)$. Diperoleh

$$A\,x^{\bullet} \leq A\,(A^{\#}(b)) \Leftrightarrow b = A\,x^{\bullet} \leq A\,(A\backslash b) \qquad (7)$$

Selanjutnya menurut persamaan (5), $A\,(A\backslash b) \leq b$ (8)

Dari persamaan (7) dan (8) diperoleh $A\,(A^{\#}(b)) = b$.

Contoh 26. Tentukan apakah persamaan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pada aljabar min-plus mepunyai solusi atau tidak.

Penyelesaian :

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan b = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$A^{\#}(b_1) = \bigwedge_{i=1}^{2}(b_1 - A_{i1}) = (b_1 - A_{11} \wedge b_1 - A_{21}) = (0-1) \wedge (0-2) = -1 \wedge -2 = -1$$

$$A^{\#}(b_2) = \bigwedge_{i=1}^{2}(b_2 - A_{i2}) = (b_2 - A_{12} \wedge b_2 - A_{22}) = (0-0) \wedge (0-3) = -1 \wedge -3 = -1$$

Diperoleh $A^{\#}(b) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Karena $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, maka persamaan di atas tidak mempunyai solusi.

Contoh 27. Tentukan apakah persamaan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ pada aljabar min-plus mepunyai solusi atau tidak.

Penyelesaian :

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan b = $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$A^{\#}(b_1) = \bigwedge_{i=1}^{2}(b_1 - A_{i1}) = (b_1 - A_{11} \wedge b_1 - A_{21}) = (2-1) \wedge (4-2) = 1 \wedge 2 = 2$$

$$A^{\#}(b_2) = \bigwedge_{i=1}^{2}(b_2 - A_{i2}) = (b_2 - A_{12} \wedge b_2 - A_{22}) = (2-0) \wedge (4-3) = 2 \wedge 1 = 2$$

Diperoleh $A^{\#}(b) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Karena $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, maka persamaan di atas mempunyai solusi, yaitu x_1 = 2 dan x_2 = 2. Solusi persamaan di atas tidaklah tunggal, yaitu terdapat solusi yang lain, antara lain $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Aljabar min-plus merupakan semifield idempotent.
2. Matriks atas aljabar min-plus merupakan semiring idempotent.
3. Untuk setiap semiring idempotent dapat didefinisikan suatu relasi urutan parsial.
4. Setiap semified idempotent merupakan lattice.
5. Persamaan $Ax = b$, pada aljabar min-plus mempunyai solusi jika dan haya jika $A^{\#}(b)$ dengan $[A^{\#}(b)]_j = \bigwedge_{i=1}^{n}(b_j - A_{ij})$ merupakan solusi persamaan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Baccelli, F, Cohen, G, Olsder, G.J, Quadrat,J.P. 1992. *Synchronization and Linearity*.John Wiley and Sons, New York.

Blyth,T.S.2005. *Lattices and Algebraic Ordered Structures*. Springer,London.

Farhi, N, Goursat M, and Quadrat, J.P. Tanpa tahun. *Road Traffic Models Using Petri Net and Min-plus Algebra*. Inria. Perancis. Didownload pada tanggal 5 Mei 2011

Le Boudec, J.Y, Thiran, P. Tanpa tahun. *Min-plus System Theory Applied to Communication Network*. Swiss. Didownload pada tanggal 5 Mei 2011

Le Boudec, J.Y, Thiran, P. Tanpa tahun. *Network Calculus*. *http://icawww.epfl.ch*. Didownload pada tanggal 5 Mei 2011