RESIDUATION OF MATRICES OVER DIOIDS

Musthofa
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Ari Suparwanto
Jurusan matematika FMIPA UGM

Abstract

A solution of $Ax = b$ in maxplus linear system can be determined by observing the greatest subsolution $x^{\bullet}$, where $-x^{\bullet}=A^t \otimes (-b)$. If $A\,x^{\bullet} = b$, then $x^{\bullet}$ is a solution. The structure of dioid $(D,\oplus, \otimes)$ is more general than maxplus. In order to solve $Ax=b$ in dioid, we use residuation of matrices over diod. The purposes here are to establish the formula of the residual of A, and then use it to determine whether $Ax=b$ has a solution or not.

Key Words: *Dioids*, *Maxplus* , *Residuated*

A. PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear maxplus $Ax = b$, mempunyai subsolusi terbesar $x^{\bullet}$ dengan

$$-x^{\bullet}=A^t \otimes (-b). \tag{1}$$

Jika $x^{\bullet}$ memenuhi persamaan $A\,x^{\bullet} = b$, maka $x^{\bullet}$ merupakan solusi, jika tidak maka dengan menggunakan residuasi dapat ditunjukkan bahwa persamaan tersebut tidak mempunyai solusi. Sebagai contoh akan ditentukan solusi persamaan

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Subsolusi terbesar dari persamaan di atas adalah

$-x^{\bullet} = A^t \otimes (-b) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \oplus -5 \\ -6 \oplus -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Jadi subsolusi terbesarnya adalah $x^{\bullet} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Selanjutnya dapat dicek

$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\otimes 2 \ \oplus \ 1\otimes 3 \\ 2\otimes 2 \ \oplus \ 4\otimes 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\oplus 4 \\ 4\oplus 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$. Jadi $x^{\bullet} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ merupakan solusi.

Metode mencari subsolusi di atas secara umum tidak dapat digunakan untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linear atas struktur yang lebih umum, misalnya dioid. Misalnya pada contoh di atas, jika operasi max diganti dengan operasi min, maka $x^{\bullet}=[\,2 \quad 3\,]^t$ bukan merupakan solusi. Untuk mencari solusinya digunakan konsep residuasi.

Residuasi bertujuan untuk menyelesaikan persamaan $f(x) = b$, dengan f suatu pemetaan pada himpunan yang dilengkapi relasi urutan [1]. Karena pada diod selalu dapat dilengkapi dengan relasi urutan, maka konsep residuasi dapat diterapkan pada pemetaan dari suatu dioid

Dipresentasikan pada Seminar Nasional Himpunan Peminat Aljabar (HPA) di UIN Syarif Hidayatullah Jakarta pada tanggal 27 Maret 2010

ke dioid, khususnya pemetaan linear yang direpresentasikan oleh suatu matriks. Akhirnya dengan menentukan residual dari matriks A, dapat ditunjukkan apakah suatu persamaan linear $A\, x = b$ atas dioid mempunyai solusi atau tidak mempunyai solusi.

B.PEMBAHASAN

1. Dioid

Berikut ini diberikan definisi dioid seperti dalam [2].

Definisi 1.

Dioid adalah himpunan $(D, \oplus, \otimes)$ yang memenuhi aksioma:

1. $\forall a,b,c \in D, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ *($\oplus$ bersifat assosiatif)*
2. $\forall a,b \in D, a \oplus b = b \oplus a$ *($\oplus$ bersifat komutatif)*
3. $\forall a,b,c \in D, (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ *($\otimes$ bersifat assosiatif)*
4. $\forall a,b,c \in D, (a \oplus b) \otimes c = (a \oplus b) \otimes (b \oplus c)$ *($\otimes$ distributif terhadap $\otimes$)*
   $c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$
5. $\exists \varepsilon \in D : \forall a \in D, a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$ *(elemen netral $\oplus$)*
6. $\forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$
7. $\exists e \in D : \forall a \in D, a \otimes e = e \otimes a = a$ *(identitas $\otimes$)*
8. $\forall a \in D, a \oplus a = a$ *($\oplus$ bersifat komutatif)*

Selanjutnya operasi pertama ($\oplus$) disebut operasi penjumlahan dan operasi kedua ($\otimes$) disebut operasi perkalian.

Contoh :

1. Himpunan $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dengan operasi $\oplus$ = min dan $\otimes$ = + yang disebut $\mathbb{R}_{\min}$ merupakan dioid dengan elemen netral $\{+\infty\}$ dan elemen identitas 0.
2. Himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan operasi $\oplus$ = max dan $\otimes$ = + yang disebut $\mathbb{R}_{\max}$ merupakan dioid dengan elemen netral $\{-\infty\}$ dan elemen identitas 0.
3. Himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ dengan operasi $\oplus$ = max dan $\otimes$ = min merupakan dioid dengan elemen netral $\{-\infty\}$ dan elemen identitas $\{+\infty\}$.
4. Himpunan $\mathbb{N}$, dengan operasi $\oplus$ = + dan $\otimes$ = $\times$ merupakan dioid dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1.

Pada dioid $(D, \oplus, \otimes)$ dapat didefinisikan relasi urutan $\leq$, misalnya $a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. Dengan kata lain dioid D merupakan himpunan terurut. Selanjutnya seperti dalam [3], diberikan definisi tentang diod lengkap.

Definisi 2.

2.1.*Suatu himpunan terurut $(D,\leq)$ dikatakan lengkap jika setiap $A \subset D$ mempunyai suprimum.*

2.2.*Suatu dioid $(D,\oplus,\otimes)$ dikatakan lengkap jika $(D,\leq)$ lengkap dan memenuhi:*

2.1.1 $\forall A \subseteq D, \forall d \in D, \left(\bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes d = \bigoplus_{a \in A} (a \otimes d)$

2.1.1 $\forall A \subseteq D, \forall d \in D, d \otimes \left(\bigoplus_{a \in A} a \right) = \bigoplus_{a \in A} (d \otimes a)$

Selanjutnya jika a , $b \in D$, suprimum a dan b ditulis $\sup\{a,b\} = a \vee b$ dan infimum a dan b, ditulis $\inf\{a,b\} = a \wedge b$.

Contoh :

$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan operasi (max, +) yang disebut dengan $\mathbb{R}_{max}$ bukan merupakan dioid lengkap, sedangkan $(R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}) = \overline{R}_{\max}$ dengan operasi (max, +) merupakan dioid lengkap.

2. Residuasi

Definisi 3.

Misalkan D dan E masing-masing himpunan terurut. Suatu pemetaan f*:* $D \rightarrow E$ *dikatakan isotone jika* $x \leq y$ *berakibat* $f(x) \leq f(y)$.

Contoh :

f:$\mathbb{R}_{\max} \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ dengan $f(x) = x \otimes 2$ merupakan pemetaan isoton.

Definisi 4.

Suatu pemetaan f dari himpunan terurut D ke himpunan terurut E dikatakan residuated jika f isotone dan $\forall\, b \in E$, $\{x \in D \,/\, f(x) \leq b\}$ *mempunyai elemen maksimal, dinotasikan dengan* $f^{\#}(b)$*. Suatu pemetaan isotone* $f^{\#}$*:* $E \rightarrow D$ *disebut residual dari f.*

Jadi $f^{\#}(b)$ merupakan subsolusi terbesar dari persamaan $f(x) = b$. Hubungan antara f dan $f^{\#}$ sebagaimana dibahas dalam [2] adalah:

$$f \circ f^{\#} \leq I \qquad (2a)$$

$$f^{\#} \circ f \geq I \qquad (2b)$$

Contoh :

1.Pemetaan f:$\mathbb{R}_{\max} \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ dengan $f(x) = x \otimes 2$ *residuated* dengan *residual* $f^{\#}(y) = y \otimes (-2)$

2.Pemetaan g_n: $(\mathbb{N},+,\cdot) \rightarrow (\mathbb{N},+,\cdot)$ dengan $g_n(x) = n\,x$ *residuated* dengan residual $g_n(y) = \left\lfloor \frac{y}{n} \right\rfloor$

Definisi 5.

Suatu pemetaan f pada dioid lengkap D dikatakan lower semicontinuous (lsc) jika untuk setiap himpunan $X \subset D$ *berlaku* $f\left(\bigoplus_{x \in X} x \right) = \bigoplus_{x \in X} f(x)$.

Sebagaimana dalam [2], salah satu sifat pemetaan pada dioid lengkap, yaitu *f residuated* jika dan hanya jika *f lsc* dan $f(\varepsilon)=\varepsilon$. Demikian juga telah diperoleh sifat sifat :

$$f \circ f^{\#} \circ f = f \qquad (3a)$$

$$f^{\#} \circ f \circ f^{\#} = f^{\#} \qquad (3b)$$

$$(f \circ g)^{\#} = g^{\#} \circ f^{\#} \qquad (3c)$$

$$(f \oplus g)^{\#} = f^{\#} \wedge g^{\#} \qquad (3d)$$

3. Matriks atas Dioid

Dari dioid D dapat dibentuk matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya elemen-elemen dioid D. Operasi penjumlahan dan perkalian didefinisikan seperti pada operasi penjumlahan dan perkalian matriks dengan menyesuaikan penjumlahan elemen sebagai $\oplus$ dan perkalian elemen sebagai $\otimes$.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\oplus 1 & 3\oplus 1 \\ 1\oplus 2 & \varepsilon\oplus 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\otimes 1 \oplus 3\otimes 2 & 2\otimes 1 \oplus 3\otimes 1 \\ 1\otimes 1 \oplus \varepsilon\otimes 2 & 1\otimes 1 \oplus \varepsilon\otimes 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan operasi seperti di atas merupakan dioid yang dinotasikan dengan $D^{n \times n}$.

Matriks $\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ & \vdots & & \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $e = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \dots & \varepsilon \\ & \vdots & & \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & e \end{bmatrix}$ berturut-turut merupakan elemen netral dan elemen satuan pada $D^{n \times n}$.

4. Penyelesaian Sistem *Ax* = *b*

Berikut ini suatu sifat yang digunakan sebagai acuan dalam menyelesaikan persamaan $Ax = b$ sebagaimana yang dibahas dalam [4].

Lemma 1.

Jika D dioid lengkap, maka pemetaan isotone $f : D \to D$ dengan $f(x)=a \otimes x$ dan $f(x) = x \otimes a$ residuated.

Bukti :

Akan ditunjukkan f *lsc* dan $f(\varepsilon) = \varepsilon$.

Karena D lengkap maka $f\left(\bigoplus_{x\in X} x\right) = a \otimes \left(\bigoplus_{x\in X} x\right) = \left(\bigoplus_{x\in X} a \otimes x\right) = \bigoplus_{x\in X} f(x)$. Jadi f *lsc*.

Demikian pula diperoleh $f(\varepsilon)$ = a $\otimes$ $\varepsilon = \varepsilon$. Terbukti f *residuated*.

Untuk menentukan solusi persamaan $A x = b$, dengan $A \in D^{n\times n}$, akan ditinjau terlebih dahulu untuk kasus n =3, yaitu $A \in D^{3 \times 3}$. Misal D dan E adalah dioid lengkap. Diperhatikan pemetaan A: $D^{3 \times 3} \to E^{3 \times 3}$ sebagai berikut:

$$A : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b$$

$$Ax = \begin{bmatrix} A_{11}(x_1) \oplus A_{12}(x_2) \oplus A_{13}(x_3) \\ A_{21}(x_1) \oplus A_{22}(x_2) \oplus A_{23}(x_3) \\ A_{31}(x_1) \oplus A_{32}(x_2) \oplus A_{33}(x_3) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Untuk menentukan solusi sistem persamaan $Ax = b$, seperti dalam sistem linear max plus, dicari dulu subsolusi terbesar dari persamaan $Ax \le b$, yaitu ditentukan dulu $A^{\#}(b)$. Menurut persamaan (4) di atas, bentuk Ax dapat dipandang sebagai

$$Ax = A_1(x) \oplus A_2(x) \oplus A_3(x) \tag{5}$$

dengan $$A_1(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x_1) \\ A_{22}(x_2) \\ A_{33}(x_3) \end{bmatrix}; A_2(x) = \begin{bmatrix} A_{12}(x_2) \\ A_{23}(x_3) \\ A_{31}(x_1) \end{bmatrix}; A_3(x) = \begin{bmatrix} A_{13}(x_3) \\ A_{21}(x_1) \\ A_{32}(x_2) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan lemma 1 maka, maka $A_{ij}(x)$ *residuated*. Sehingga diperoleh

$$A_1^{\#}(b) = \begin{bmatrix} A_{11}^{\#}(b_1) \\ A_{22}^{\#}(b_2) \\ A_{33}^{\#}(b_3) \end{bmatrix}; A_2^{\#}(b) = \begin{bmatrix} A_{21}^{\#}(b_2) \\ A_{32}^{\#}(b_3) \\ A_{13}^{\#}(b_1) \end{bmatrix}; A_3^{\#}(b) = \begin{bmatrix} A_{31}^{\#}(b_3) \\ A_{12}^{\#}(b_1) \\ A_{23}^{\#}(b_2) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Menurut persamaan (3d) dan (5) akhirnya diperoleh:

$$A^{\#}(b) = \begin{bmatrix} A_{11}^{\#}(b_1) \wedge A_{21}^{\#}(b_2) \wedge A_{31}^{\#}(b_3) \\ A_{12}^{\#}(b_1) \wedge A_{22}^{\#}(b_2) \wedge A_{32}^{\#}(b_3) \\ A_{13}^{\#}(b_1) \wedge A_{23}^{\#}(b_2) \wedge A_{33}^{\#}(b_3) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Selanjutnya $A^{\#}(b)$ ditulis sebagai $(A\backslash b)$. Sehingga $(A\backslash b)$ merupakan subsolusi terbesar dari persamaan $A\ x = b$. Analog dengan cara di atas, untuk $A \in D^{n\times n}$, subsolusi terbesar persamaan $Ax = b$ ditunjukkan dalam teorema berikut:

Teorema 1.

Jika D dioid lengkap, $A \in D^{n\times n}$ *, dan* $b \in D^{n\times 1}$ *maka*

$$(A\backslash b)_i = \bigwedge_{j=1}^{n} (A_{ji}\backslash b_j) \tag{8}$$

Bukti :

$$Ax = \begin{bmatrix} A_{11}(x_1) \oplus A_{12}(x_2) \oplus \ldots \oplus A_{1n}(x_n) \\ A_{21}(x_1) \oplus A_{22}(x_2) \oplus \ldots \oplus A_{2n}(x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}(x_1) \oplus A_{n2}(x_2) \oplus \ldots \oplus A_{nn}(x_n) \end{bmatrix}$$

Dibentuk :

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x_1) \\ A_{22}(x_2) \\ \ldots \\ A_{nn}(x_n) \end{bmatrix}; A_2(x) = \begin{bmatrix} A_{12}(x_2) \\ A_{23}(x_3) \\ \ldots \\ A_{n1}(x_1) \end{bmatrix}; \ \ldots ; A_n(x) = \begin{bmatrix} A_{1n}(x_n) \\ A_{21}(x_1) \\ \ldots \\ A_{nn-1}(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Diperoleh :

$$Ax = A_1(x) \oplus A_2(x) \oplus \ldots \oplus A_n(x)$$

Sehingga : $(A \setminus b)_i = (A_{1i} \setminus b_1) \wedge (A_{2i} \setminus b_2) \wedge \ldots \wedge (A_{ni} \setminus b_n) \ = \bigwedge_{j=1}^{n} (A_{ji} \setminus b_j)$

Ada atau tidaknya solusi persamaan $Ax = b$ dibahas dalam teorema berikut:

Teorema 2.

Sistem persamaan linear Ax = b pada diod lengkap mempunyai solusi jika dan hanya jika

$$A(A\backslash b) = b \tag{9}$$

Bukti :

($\Leftarrow$)

Diketahui $A(A\backslash b) = b$. Jadi sistem persamaan linear $Ax = b$ mempunyai penyelesaian.

($\Rightarrow$)

Misalkan sistem persamaan linear $Ax = b$ mempunyai solusi $x^\bullet$. diperoleh $A\,x^\bullet = b$, sehingga $A\,x^\bullet \leq b$. Karena $(A\backslash b)$ merupakan elemen maksimal dalam { x/ $Ax \leq b$) maka $x^\bullet \leq (\, A\backslash b)$.

Diperoleh

$$A\,x^\bullet \leq A\,(\,A\backslash b\,)$$

$$\Leftrightarrow \quad b \ = A\,x^\bullet \leq \ A\,(\,A\backslash b) \ \ \ldots\ldots\ldots(*)$$

Selanjutnya menurut (2a)

$$A\,(A\backslash b) \leq b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(**)$$

Dari (*) dan (**) diperoleh $A\,(\,A\backslash b) = b$.

5. Contoh - contoh Penyelesaian *Ax = b*.

1. Akan dicari solusi persamaan $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ atas $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$.

   $(A \setminus b)_1 = (A_{11} \setminus b_1) \wedge (A_{21} \setminus b_2) = (2-5) \wedge (2-2) = -3 \wedge 0 = -3$

   $(A \setminus b)_2 = (A_{12} \setminus b_1) \wedge (A_{22} \setminus b_2) = (2-1) \wedge (2-4) = 1 \wedge -2 = -2$

Diperoleh $(A \backslash y) = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Dapat dicek $A(A \backslash b) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = b$

Jadi persamaan tersebut mempunyai solusi.

2. Akan dicari solusi persamaan $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ atas $\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$.

$$(A \backslash b)_1 = (A_{11} \backslash b_1) \wedge (A_{21} \backslash b_2) = (2-5) \wedge (2-2) = -3 \wedge 0 = 0$$

$$(A \backslash b)_2 = (A_{12} \backslash b_1) \wedge (A_{22} \backslash b_2) = (2-1) \wedge (2-4) = 1 \wedge -2 = 1$$

Diperoleh $(A \backslash y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dapat dicek $A(A \backslash b) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = b$

Jadi persamaan tersebut mempunyai solusi.

3. Akan dicari solusi persamaan $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ atas $D = (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \max, \min)$.

$$(A \backslash b)_1 = (A_{11} \backslash b_1) \wedge (A_{21} \backslash b_2) = \min(5, x) \le 2 \wedge \min(2, x) \le 2 = 2 \wedge 2 = 2$$
$$(A \backslash b)_2 = (A_{11} \backslash b_1) \wedge (A_{21} \backslash b_2) = \min(1, x) \le 2 \wedge \min(4, x) \le 2 = +\infty \wedge 2 = 2$$

Diperoleh $(A \backslash y) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dapat dicek $A(A \backslash b) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = b$

Jadi persamaan tersebut mempunyai solusi.

4. Akan dicari solusi persamaan $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ atas $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

$$(A \backslash b)_1 = (A_{11} \backslash b_1) \wedge (A_{21} \backslash b_2) = \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor \wedge \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = 0 \wedge 1 = 0$$

$$(A \backslash b)_2 = (A_{12} \backslash b_1) \wedge (A_{22} \backslash b_2) = \left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor \wedge \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor = 2 \wedge 0 = 0$$

Diperoleh $(A \backslash y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ternyata $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ne \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Jadi persamaan tersebut tidak mempunyai solusi.

C. KESIMPULAN

Jika D dioid lengkap, maka sistem persamaan $Ax = b$, dengan $A \in D^{n \times n}$ dan $b \in D^{n \times 1}$ mempunyai subsolusi terbesar berbentuk

$$(A \setminus b)_i = \bigwedge_{j=1}^{n} (A_{ji} \setminus b_j)$$

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat dilihat bahwa dalam hal dioid D adalah :

1. $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ maka $(A \setminus b)_i = \min\limits_{1 \le j \le n}(-A_{ji} + b_j)$
2. $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$, maka $(A \setminus b)_i = \max\limits_{1 \le j \le n}(-A_{ji} + b_j)$
3. $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \max, \min)$, maka $(A \setminus b)_i = \min\limits_{1 \le j \le n}(\max\ (A_{ji}, b_j))$
4. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, maka $(A \setminus b)_i = \min\limits_{1 \le j \le n} \left\lfloor \dfrac{b_i}{A_{ji}} \right\rfloor$

Selanjutnya persamaan $Ax = b$ akan mempunyai solusi jika ($A\backslash b$) merupakan solusi, yaitu jika A ($A\backslash b$) = b. Jika A ($A\backslash b$) $\neq b$ maka persamaan tersebut tidak mempunyai solusi.

D. SARAN

Dalam makalah ini belum dibahas bagaimana jika $A \in D^{m \times n}$ dengan $m \neq n$. Sehingga perlu dikaji bagaimana bentuk solusi dari persamaan $Ax = b$ untuk $A \in D^{m \times n}$. Demikian pula dapat diteliti lebih lanjut untuk persamaan yang berbentuk $Ax = By$ atas dioid.

E. DAFTAR PUSTAKA

[1] G.Cohen, S.Gaubert, J.P Quadrat. "Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now". *IFAC Conference on System and control*. 1998.

[2] F.Baceeli, G.Cohen, G.J.Olsder, J.P.Quadrat. S*ynchronization and Linearity.* New York:John Wiley and Sons, 2001.

[3] M.Gondran, M.Minoux. *Graph, Dioids, and Semirings.*New York: Springer, 2008

[4] S.Gaubert,Max Plus."Methods and applications of (max,+) linear algebra",*Rapport de recherché*, 1997.