INVERS TERGENERALISASI MATRIKS ATAS ALJABAR MAXPLUS

Musthofa
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
musthofa@uny.ac.id

Abstrak

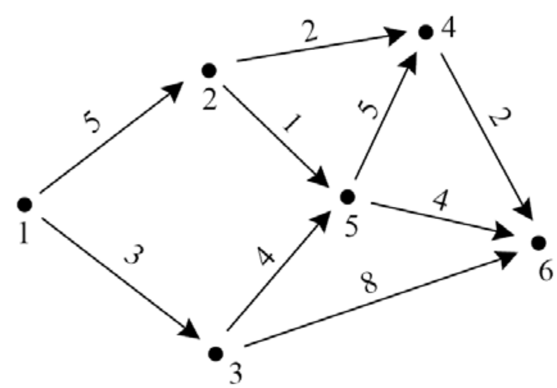
Jika A matriks atas lapangan, maka pasti terdapat dengan tunggal suatu matriks B yang memenuhi sifat $ABA = A$. Matriks B yang memenuhi sifat ini disebut invers tergeneralisasi matriks A. Dalam aljabar maxplus, tidak ada jaminan bahwa setiap matriks memiliki invers tergeneralisasi. Jika A mempunyai invers tergeneralisasi, maka A dikatakan reguler. Dalam makalah ini akan dibahas bagaimana menentukan suatu matriks A atas aljabar maxplus regular atau tidak.

Kata kunci: Matriks, invers tergeneralisasi, aljabar maxplus, reguler

A. PENDAHULUAN

Aljabar maxplus memiliki peranan yang sangat banyak dalam menyelesaikan persoalan di beberapa bidang seperti teori graf, kombinatorika, teori sistem, teori antrian dan proses stokastik. Hal ini telah dibahas dalam beberapa buku dan jurnal seperti Bacelli,*et.al* (2001), Heidergott, (1999), Fleming, (2004), Menguy, *et.al* (2000).

Sebagai contoh yang sederhana, misal suatu kegiatan dimodelkan dalam graf aktivitas sebagai berikut:



Bobot garis berarah dari titik i ke titik j menyatakan waktu tersingkat yang diperlukan untuk memulai kegiatan pada titik i sampai memulai kegiatan pada titik j,dalam bentuk matriks dinyatakan sebagai A_{ji}. Jika tidak ada garis yang menghubungkan titik i dengan titik j, maka $A_{ji} = -\infty$. Kegiatan pada titik j , baru dapat dimulai jika seluruh kegiatan yang mendahului titik j sudah selesai. Dalam gambar di atas, kegiatan pada titik 4 baru dapat dimulai jika seluruh kegiatan pada titik 2 dan 5 sudah selesai.

Jika x_j menyatakan waktu tercepat dapat dimulainya kegiatan pada titik j, maka x_j dapat dinyatakan sebagai $x_j = \underset{i=1,2,..,6}{\text{maks}}(A_{ji} + x_i)$. Terlihat bahwa masalah ini melibatkan dua operasi yaitu maksimum (maks) dan penjumlahan (+), yang merupakan operasi dalam aljabar maxplus.

Dalam aljabar linear, sudah dikenal konsep invers tergeneralisasi suatu matriks atas lapangan. Yaitu, jika A matriks atas lapangan, maka pasti terdapat invers tergeneralisasi matriks A, namakan B, sehingga $ABA = A$. Untuk itu dalam makalah ini akan dibahas tentang matriks atas aljabar maxplus, khususnya tentang invers tergeneralisasi dari matriks atas aljabar maxplus. Jika A sebarang matriks atas aljabar maxplus, maka belum tentu A mempunyai invers tergeneralisasi. Dalam makalah ini akan dibahas syarat matriks A mempunyai invers tergeneralisasi dan sekaligus menentukan invers tergeneralisasi dari matriks A atas aljabar maxplus.

B. PEMBAHASAN

1. Aljabar Maxplus

Aljabar maxplus adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dengan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan, yang dinotasikan dengan $\otimes$. Selanjutnya ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\oplus$, $\otimes$) dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}$ dan $\{-\infty\}$ dinotasikan dengan ε. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$. Struktur aljabar dari $\mathbb{R}_{\max}$ adalah semifield, yaitu :

1. ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\oplus$) merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral $\{-\infty\}$

2. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \otimes)$ merupakan grup komutatif dengan elemen identitas 0

3. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat distributif
4. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu

   $\forall\, a \in \mathbb{R}_{\max}$, $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

2. Matriks atas $\mathbb{R}_{\max}$

Dalam aljabar linear, jika F field, maka dapat dibentuk suatu matriks berukuran $m \times n$ dengan entri –entrinya adalah elemen –elemen F. Hal yang serupa dapat dikerjakan pada $\mathbb{R}_{\max}$, yaitu dapat dibentuk matriks A berukuran $m \times n$ dengan entri-entrinya elemen $\mathbb{R}_{\max}$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks atas aljabar maxplus didefinisikan sebagai berikut:

(1) $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$

(2) $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k} (A_{ik} \otimes B_{kj})$

Contoh :

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, maka

$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus -2 & 2 \oplus 7 \\ -2 \oplus 1 & 3 \oplus -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan

$A \otimes B = \begin{bmatrix} \{1+(-2)\} \oplus \{2+1\} & \{1+7\} \oplus \{2+(-3)\} \\ \{-2+(-2)\} \oplus \{3+1\} & \{-2+7\} \oplus \{3+(-3)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Jika $(\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ menyatakan himpunan semua matriks dengan entri-entrinya elemen $\mathbb{R}_{\max}$, , maka matriks E dengan $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ jika } i = j \\ \varepsilon, \text{ jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} = \varepsilon, \forall\, i, j$ berturut– turut merupakan matriks identitas dan matriks nol. Jadi ,

(1) $(E \otimes A) = (A \otimes E) = A$ untuk setiap $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$;

(2) $(\varepsilon \oplus A) = (A \oplus \varepsilon) = A$, untuk setiap $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$.

Perlu diperhatikan bahwa ($\mathbb{R}_{max})^{n \times n}$ bukan merupakan semifield, tetapi merupakan semiring, sebab terhadap operasi $\otimes$ ($\mathbb{R}_{max})^{n \times n}$ tidak komutatif dan tidak setiap $A \in (\mathbb{R}_{max})^{n \times n}$ mempunyai invers .

3. Pemetaan Residuated

Pada $\mathbb{R}_{max}$ dapat dilengkapkan suatu relasi urutan $\leq$, yaitu $a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. Sehingga $(\mathbb{R}_{max}, \leq)$ merupakan poset (himpunan terurut parsial).

Definisi 1. *Suatu pemetaan f pada himpunan teurut parsial dikatakan isoton jika*

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Contoh 1.

$f : \mathbb{R}_{max} \to \mathbb{R}_{max}$ dengan $f(x) = x \otimes 5$ merupakan pemetaan isoton, yaitu untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}_{max}$ berlaku $x \leq y \Rightarrow f(x) = x \otimes 5 = x + 5 \leq y + 5 = y \otimes 5 = f(y)$

Definisi 2. *Suatu pemetaan isoton $f : D \to E$ dengan D dan E masing-masing himpunan terurut parsial dikatakan pemetaan residuated jika untuk setiap $b \in E$, maka $\{ x / f(x) \leq b\}$ mempunyai elemen maximal, dinotasikan dengan $f^{\#}(b)$.Pemetaan isoton $f^{\#}: E \to D$ disebut residual dari f.*

Contoh 2.

Pada contoh 1 di atas, f merupakan pemetaan residuated , sebab untuk setiap $y \in \mathbb{R}_{max}$, $\{x/f(x) = x \otimes 5 \leq y\}$ mempunyai elemen maximal, yaitu $x = f^{\#}(y) = y\text{-}5$.

Hubungan antara f dan $f^{\#}$ seperti yang dibahas dalam bacilli, *et.al* (2001) adalah sebagai berikut:

$$f \circ f^{\#} \leq I \qquad (1a)$$

$$f^{\#} \circ f \geq I \qquad (1b)$$

Selanjutnya residual dari $f^{\#}(b)$ digunakan untuk menentukan ada tidaknya solusi dari persamaan $f(x) = b$, dinyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 3. *Jika $f : D \to E$ pemetaan residuated, maka persamaan $f(x) = b$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $f(f^{\#}(b)) = b$.*

Bukti :

($\Leftarrow$)

Diketahui $f(f^{\#}(b)) = b$, maka persamaan $f(x) = b$ mempunyai solusi, yaitu $x = f^{\#}(b)$

($\Rightarrow$)

Diketahui $f(x) = b$ mempunyai solusi, misalkan x_1 . Diperoleh $f(x_1) = b$. Karena $f^{\#}(b)$ adalah elemen maksimal dalam $\{ x / f(x) \leq b \}$, maka $x_1 \leq f^{\#}(b)$. Karena f isoton maka $f(x_1) \leq f(f^{\#}(b))$. Menurut (1a) $f f^{\#}(b) \leq b$, akibatnya $b = f(x_1) \leq f f^{\#}(b) \leq b$, yaitu $f(f^{\#}(b)) = b$.

4. Penyelesaian Persamaan *Ax = b* dalam Aljabar Maxplus

Jika $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ dan $x \in \mathbb{R}^{n}_{\max}$, maka $Ax = \begin{bmatrix} A_{11}(x_1) \oplus A_{12}(x_2) \oplus \ldots \oplus A_{1n}(x_n) \\ A_{21}(x_1) \oplus A_{22}(x_2) \oplus \ldots \oplus A_{2n}(x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}(x_1) \oplus A_{n2}(x_2) \oplus \ldots \oplus A_{nn}(x_n) \end{bmatrix}$.

Dibentuk $f_j(x_j) = \begin{bmatrix} A_{1j}(x_j) \\ A_{2j}(x_j) \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{nj}(x_j) \end{bmatrix}$, maka $Ax = \bigoplus_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ (2)

Untuk setiap j, jika $x_{j_h} \leq x_{j_k} \Rightarrow f_j(x_{j_h}) \leq f_j(x_{j_k})$.Sehingga A merupakan pemetaan isoton. Selain itu untuk setiap j, $\{ x_j / f_j(x_j) \leq b \}$ mempunyai elemen maksimal, yaitu $x_j = \min \{b_1 - A_{1j}, b_2 - A_{2j}, \ldots, b_n - A_{nj} \}$. Jadi A merupakan pemetaan residuated. Dengan kata lain. A dapat dipandang sebagai suatu pemetaan residuated dari $\mathbb{R}^{n}_{\max}$ ke $\mathbb{R}^{n}_{\max}$.

Berdasarkan uraian ini, yaitu karena $x_j = \min \{b_1 - A_{1j}, b_2 - A_{2j}, \ldots, b_n - A_{nj} \}$, maka residual dari A adalah $[A^{\#}(b)]_j = \min_{1 \leq i \leq n}(b_j - A_{ij})$.

Sehingga untuk menentukan solusi persamaan $Ax = b$, seperti pada pembahasan pada teorema 3, dapat dilakukan dengan mengecek apakah $A(A^{\#}(b)) = b$. Hal ini dinyatakan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 4. *Jika $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$, dan $b \in \mathbb{R}^{n}_{\max}$, maka persamaan $Ax = b$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $A(A^{\#}(b)) = b$.*

Bukti :

($\Leftarrow$)

Diketahui $A(A^{\#}(b)) = b$. Jadi persamaan $Ax = b$ mempunyai penyelesaian , yaitu $x = A^{\#}(b)$

$(\Rightarrow)$

Misalkan persamaan $Ax = b$ mempunyai solusi $x^{\bullet}$. diperoleh $A x^{\bullet} = b$, sehingga $A x^{\bullet} \leq b$.

Karena $A^{\#}(b)$ merupakan elemen maksimal dalam $\{ x / Ax \leq b \}$ maka $x^{\bullet} \leq A^{\#}(b)$. Diperoleh

$$A x^{\bullet} \leq A (A^{\#} (\mathrm{b}))$$

$$\Leftrightarrow \quad b = A x^{\bullet} \leq A (A \backslash b) \quad \ldots\ldots\ldots(*)$$

Selanjutnya menurut $(1a)$

$$A (A \backslash b) \leq b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

Dari (*) dan (**) diperoleh $A (A^{\#} (b)) = b$.

5. Invers Tergeneralisasi Matriks atas Aljabar Maxplus

Salah satu tujuan mencari invers tergeneralisasi matriks atas lapangan , seperti dalam Penrose, (1954) adalah untuk menentukan solusi sistem persamaan linear $AXB = C$. Berikut ini definisi invers tergeneralisasi matriks atas aljabar maxplus, seperti definisi yang ditulis oleh Blyumin dan Goland, (2001).

Definisi 5. *Jika* $A \in (\mathbb{R}_{max})^{n \times m}$, *maka matriks* $B \in (\mathbb{R}_{max})^{m \times n}$ *dikatakan invers tergeneralisasi dari matriks A(atau g-invers dari A) jika ABA=A.*

Untuk menentukan ada tidaknya matriks B yang memenuhi $ABA = A$, ekuivalen dengan menentukan ada atau tidaknya solusi persamaan $AXA = A$ dengan $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times m}$.

Elemen ke-ij pada AXA adalah $[AXA]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{m}[\bigoplus_{l=1}^{n}(A_{ik} + X_{kl} + A_{lj})]$. Sehingga diperoleh persamaan

$$\bigoplus_{k=1}^{m}[\bigoplus_{l=1}^{n}(A_{ik} + X_{kl} + A_{lj})] = A_{ij} \tag{3}$$

Jika untuk setiap k,l dibentuk

$$f_{ij}(X_{kl}) = A_{ik} + X_{kl} + A_{lj} \tag{4}$$

maka persamaan (3) menjadi

$$\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{m} f_{ij}(X_{kl}) = A_{ij} \tag{5}$$

Elemen maksimal dalam $\{X_{kl} / f_{ij}(X_{kl}) \leq A_{ij}\}$ adalah

$$X_{kl}^{\bullet} = \min_{i=1}^{n}\left\{\min_{j=1}^{m} A_{ij} - (A_{ik} + A_{lj})\right\} \tag{6}$$

Selanjutnya akan dibahas syarat suatu matriks $A \in (\mathbb{R}_{max})^{n \times m}$ mempunyai invers tergeneralisasi yang disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 6. *Matriks $A \in (\mathbb{R}_{max})^{n \times m}$ mempunyai invers tergeneralisasi jika dan hanya jika elemen maksimal dalam $\{ X / AXA \leq A \}$ merupakan solusi persamaan $AXA = A$.*

Bukti :

($\Leftarrow$)

Jika $X^{\#} = \max \{ X / AXA \leq A \}$ merupakan solusi persamaan $AXA = A$, maka jelas A mempunyai invers tergeneralisasi, yaitu matriks $X^{\#}$.

($\Rightarrow$)

Jika A mempunyai invers tergeneralisasi, maka terdapat matriks X_1 sedemikian sehingga $AX_1A = A$. Jika $X^{\#} = \max \{ X / AXA \leq A \}$, maka $X_1 \leq X^{\#}$, sehingga $AX_1A \leq AX^{\#}A$. Akibatnya $A = AX_1A \leq AX^{\#}A \leq A$. Jadi diperoleh $AX^{\#}A = A$, dengan $X^{\#} = \max \{ X / AXA \leq A \}$.

Selanjutnya jika $A \in A \in (\mathbb{R}_{max})^{n \times m}$ mempunyai invers tergeneralisasi, maka A dikatakan regular, jika tidak maka A dikatakan nonreguler. Jika A regular, maka invers tergeneralisasi dari A belum tentu tunggal.

Contoh :

Akan ditentukan invers tergeneralisasi dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Menurut persamaan (6), diperoleh:

$$X_{11}^{\#} = \min_{i=1}^{2}\left\{\min_{j=1}^{2} A_{ij} - A_{i1} - A_{1j}\right\}$$

$$= \min\{(A_{11} - A_{11} - A_{11}); (A_{12} - A_{11} - A_{12}); (A_{21} - A_{21} - A_{11}); (A_{22} - A_{21} - A_{12})\}$$

= min { (2-2-2); (3-2-3);(1-1-2);(2-1-3)}

= min { -2; -2; -2; -2}

= -2.

$$X_{12}^{\#} = \min_{i=1}^{2}\left\{\min_{j=1}^{2} A_{ij} - A_{i1} - A_{2j}\right\}$$

$$= \min\{(A_{11} - A_{11} - A_{21});(A_{12} - A_{11} - A_{22});(A_{21} - A_{21} - A_{21});(A_{22} - A_{21} - A_{22})\}$$

= min { (2-2-1);(3-2-2);(1-1-1);(2-1-2)}

= min { -1; 0; -1; -1 }

= -1

$$X_{21}^{\#} = \min_{i=1}^{2}\left\{\min_{j=1}^{2} A_{ij} - A_{i2} - A_{1j}\right\}$$

$$= \min\{(A_{11} - A_{12} - A_{11});(A_{12} - A_{12} - A_{12});(A_{21} - A_{22} - A_{11});(A_{22} - A_{22} - A_{12})\}$$

= min { (2-3-2);(3-3-3);(1-2-2);(2-2-3)}

= min { -3; -3; -3; -3 }

= -3

$$X_{22}^{\#} = \min_{i=1}^{2}\left\{\min_{j=1}^{2} A_{ij} - A_{i2} - A_{2j}\right\}$$

$$= \min\{(A_{11} - A_{12} - A_{21});(A_{12} - A_{12} - A_{22});(A_{21} - A_{22} - A_{21});(A_{22} - A_{22} - A_{22})\}$$

= min { (2-3-1);(3-3-2);(1-2-1);(2-2-2)}

= min { -2; -2; -2; -2 }

= -2

Diperoleh $X^{\#} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$. Selanjutnya dicek apakah $AX^{\#}A = A$.

$$AX^{\#}A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Jadi matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ regular, dengan invers tergeneralisasinya adalah $X^{\#} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$.

Dapat dicek juga bahwa $X_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ juga memenuhi $AX_1A=A$, yaitu

$$AX_1A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

C. KESIMPULAN DAN SARAN

Jika $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times m}$, maka untuk menentukan invers tergeneralisasi dari matriks A dilakukan dengan menentukan matriks $X^{\#}$ yang entri ke- kl - nya adalah

$$X^{\#}_{kl} = \min_{i=1}^{n} \left\{ \min_{j=1}^{m} A_{ij} - (A_{ik} + A_{lj}) \right\}.$$

Jika matriks $X^{\#}$ memenuhi $AX^{\#}A=A$, maka A mempunyai invers tergeneralsasi atau A dikatakan regular. Jika $X^{\#}$ tidak memenuhi $AX^{\#}A=A$, maka pasti A tidak mempunyai invers tergeneralisasi, atau A nonreguler.

Jika A regular, maka invers tergeneralisasi dari matriks A belum tentu tunggal. Sehingga dapat dilakukan penelitian lebih lanjut tentang syarat ketunggalan suatu matriks atas aljabar maxplus mempunyai invers tergeneralisasi yang tunggal .

D. Referensi

Bacelli, F.*et.al*. 2001. *Synchronization and Linearity.*New York: John Wiley & Sons

Blyumin,S.L, Goland,J.S.2002. One-sided Complements and Solution of the equation of *axb*=*c* in semiring. *IJJMS29:28 hal:254-458.*Hindawi Publishing Corp

Cohen,G.et.al.1997. Linear Projector in The max- plus Algebra. *5th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems*. Paphos Cyprus, 21-23 July 1997

Flemming,W.H, 2004. Max-Plus Stochastic Processes. *Applied Mathemamatic Optimization.*New York : Springer-Verlag

Heidergot, B. 2000. A Characterization of (max,+) -linear queueing system.*Queueing System*.2359(2000) 237-262.

Menguy, E. 2000. A fist Step Towards Adaptive Control for Linear System in Max Algebra. *Discrete Event Dynamic System: Theory and Application.* Boston: KluwerAcademic Publisher.

Penrose,R.1954. A generalized Inverse for Matrices. *Mathematical Proceedings of The Cambridge Philoshopical Society.*