LAPORAN PENELITIAN

STRUKTUR SUBGRUP *FUZZY* DAN SIFAT-SIFATNYA

Oleh:

1.Musthofa, S.Si

2.Karyati, M.Si

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2007

Penelitian ini Dilaksanakan atas Dana DIPA Universitas Negeri Yogyakarta

No. Kontrak: 1387a/H34.13/R/PL/2007

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Alamat : Karangmalang, Yogyakarta Telp. 586168 psw. 364

LEMBAR IDENTITAS DAN PENGESAHAN LAPORAN PENELITIAN

1. Judul Penelitian	: Struktur subgrup *fuzzy* dan sifat-sifatnya
2. Ketua Penelitian	
a. Nama	: Musthofa, S.Si
b. NIP	: 132 319 832
c. Pangkat/Golongan	: Penata Muda / IIIa
d. Jabatan	: Tenaga Pengajar
e. Jurusan / Fakultas	: Pendidikan Matematika / FMIPA UNY
f. Bidang Keahlian	: Aljabar
3. Anggota Penelitian	
a. Nama	: Karyati, M.Si
b. NIP	: 132 206 552
c. Pangkat/Golongan	: Penata Muda Tk I / IIIb
d. Jabatan	: Lektor
e. Jurusan / Fakultas	: Pendidikan Matematika / FMIPA UNY
f. Bidang Keahlian	: Aljabar Linear
4. Lokasi Penelitian	: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
5. Kerjasama	: -
6. Jangka Waktu Penelitian	: 6 bulan
7. Biaya Penelitian	: Rp 3.000.000,00 (tiga juta rupiah)

Mengetahui,	Yogyakarta, November 2007
Dekan FMIPA UNY,	Ketua Penelitian,
Dr. Ariswan	Musthofa, S.Si
NIP. 131 791 367	NIP. 132 310 890

PRAKATA

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa atas selesainya penelitian dengan judul: "**Struktur subgroup *Fuzzy* dan sift-sifatnya**" serta atas terselesaikannya penyusunan laporan ini. Laporan penelitian ini disusun sebagia bentuk tanggung jawab tim pelaksana penelitian terhadap pemberi dana, yaitu FMIPA UNY serta sebagai sarana untuk mempublikasikan hasil yang diperoleh dari penelitian ini.

Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian penelitian ini dan tersusunnya laporan penelitian ini disampaikan banyak terima kasih, terutama kepada:

1. Rektor Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberi kesempatan untuk melakukan penelitian ini.
2. Dekan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberi kesempatan dan dana untuk melakukan penelitian ini.
3. Bapak.Ibu peserta seminar Proposal maupun Laporan Penelitian, yang telah berkenan memberikan masukan kepada tim peneliti demi kesempurnaan hasil penelitian ini.
4. Semua pihak yang telah membantu.

Peneliti menyadari bahwa laporan penelitian ini masih jauh dari sempurna, untuk hal tersebut kami sangat mengharapkan saran maupun kritik yang dapat menyempurnakan laporan ini.

Yogyakarta, November 2007

Peneliti

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMPIRAN

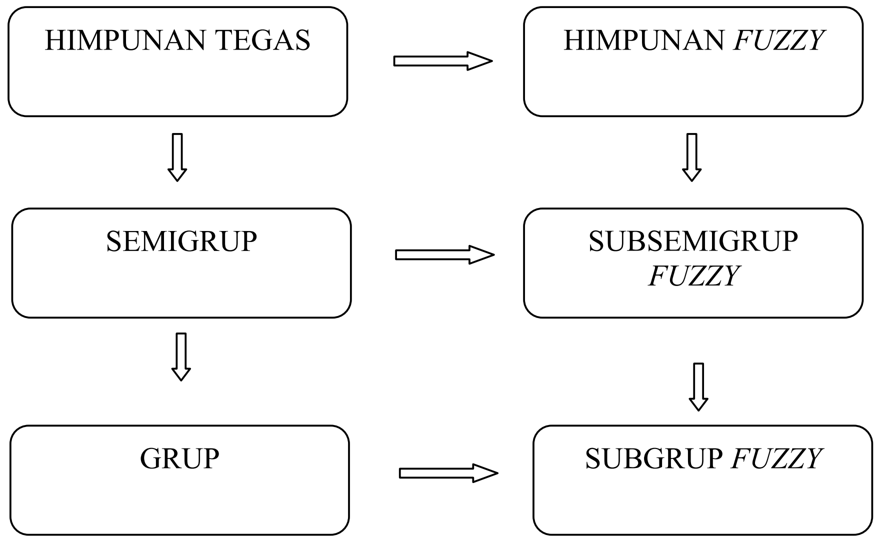
BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Struktur grup adalah himpunan (klasik) yang di dalamnya didefinisikan operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma : bersifat asosiatif, terdapat elemen identitas dan mempunyai invers untuk setiap elemennya. Jika operasi binernya bersifat komutatif, maka grup tersebut disebut grup abelian. Terkait dengan srtuktur grup telah dikenal grup-grup khusus, misal grup normal, grup siklik dan sebagainya. Selain jenisnya, terkait dengan hal tersebut adalah homomorfisma yang dibentuk dari grup ke grup dan sifat-sifatnya.

Himpunan yang mempunyai struktur grup di atas yang dimaksud adalah himpunan klasik atau himpunan tegas. Himpunan ini mempunyai kelemahan yaitu apabila untuk merepresentasikan suatu himpunan hanya mengenal apakah himpunan tersebut anggota atau bukan anggota. Ketentuan anggota dan bukan anggota sangat tidak signifikan. Misalnya A adalah himpunan orang tinggi, maka muncullah pertanyaan: bilamana seseorang dikatakan tinggi? Hal ini dapat saja diberikan syarat misalnya , seseorang dikatakan tinggi jika tinggi badannya mencapai 170 cm. Jika seseorang mempunyai tinggi badan 169,9 cm tidak termasuk orang yang tinggi, sebab tingginya kurang dari 170 cm. Jika diperhatikan, maka perbedaan orang tinggi dengan orang pendek sangat kecil/tipis sekali. Kenyataan ini sangat ironis, sehingga muncullah teori himpunan *fuzzy* yang dikenalkan oleh Zadeh pada tahun 1965. Oleh beberapa peneliti telah dikembangkan dan diaplikasikan pada struktur aljabar, misalnya adalah subsemigrup *fuzzy*.

Berikut ini bagan hubungan antara himpunan tegas dengan himpunan *fuzzy*:



Dari kondisi tersebut, maka penelitian ini akan difokuskan pada penelitian tentang subgrup *fuzzy*. Hal ini mengingat bahwa, baik grup maupun semigrup sama – sama melibatkan satu operasi biner. Hanya saja, grup adalah bentuk khusus dari semigrup. Grup adalah semigrup yang mempunyai elemen identitas dan setiap elemennya mempunyai invers. Berdasarkan kekhususan ini, maka akan diselidiki sifat-sifat yang berlaku pada subgrup *fuzzy*.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut, maka dalam penelitian ini akan diseliki masalah-masalah sebagai berikut:

a. Bagaimana sifat-sifat subgrup *fuzzy*?
b. Bagaimana sifat-sifat subgrup normal *fuzzy*?

C. Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Menyelidiki sifat-sifat subgrup *fuzzy*
2. Menyelidiki sifat-sifat subgrup normal *fuzzy*

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberikan manfaat pada pengembangan ilmu, khususnya struktur aljabar yang didasarkan pada teori himpunan *fuzzy*, juga bermanfaat bagi peneliti lain untuk memberikan ide dasar bagi penelitian berikutnya

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada tahun 1965, Lotfi A Zadeh memperkenalkan konsep himpunan *fuzzy*, suatu himpunan yang batasannya tidak kaku / *strict*. Konsep ini kontras dengan konsep himpunan klasik, yang batasannya sangat kaku, dalam arti himpunan klasik adalah koleksi sesuatu dimana jika diberikan sesuatu akan merupakan elemen didalamnya atau tidak. Kontradiksi dengan konsep himpunan klasik, himpunan *fuzzy* tidak mempunyai batasan yang kaku, dalam arti untuk menjadi anggota suatu himpunan *fuzzy* tidak berdasarkan ada di dalam atau di luar definisinya. Keanggotaan himpunan *fuzzy* dinyatakan dengan derajat keanggotaannya.

A. Fungsi Keanggotaan *Fuzzy*

Setiap himpunan *fuzzy*, μ, didefinisikan dalam batasan himpunan klasik X oleh suatu fungsi karakteristik. Fungsi tersebut disebut fungsi keanggotaan , yang mengawankan setiap elemen $x \in X$ ke $\mu(x) \in [0,1]$, yang menyatakan derajat keanggotaan x pada μ. Fungsi keanggotaan dinyatakan sebagai fungsi , $\mu : X \to [0,1]$. Dalam hal ini himpunan X selalu diasumsikan sebagai himpunan klasik.

B. Operasi pada Himpunan *Fuzzy*

Pada himpunan klasik dikenal tiga operasi dasar, yaitu komplemen, gabungan dan irisan. Operasi – operasi ini adalah tunggal pada teori himpunan klasik, namun perluasannya pada teori himpunan *fuzzy* tidak demikian. Untuk setiap operasi klasik terdapat operasi yang analog pada himpunan *fuzzy*. Terkait operasi-operasi tersebut, didefinisikan operasi standar *fuzzy* pada himpunan *fuzzy* yang dirujuk pada Klir, et.al. dan Zimmermann sebagai berikut:

1. Komplemen *Fuzzy*

Diberikan himpunan *fuzzy* μ yang didefinisikan pada himpunan X. Komplemen dari himpunan *fuzzy* μ, yang dinotasikan dengan $\overline{\mu}$ adalah himpunan *fuzzy* dimana derajat keanggataan dari $x \in X$, $\overline{\mu}(x)$ mengekspresikan derajat $x \in X$ bukan anggota μ. Secara formal, hal ini dapat dinyatakan bahwa $\overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$

2. Gabungan *Fuzzy*

Misalkan X adalah suatu himpunan klasik dan μ, γ adalah himpunan *fuzzy* yang didefinisikan pada X. Gabungan *fuzzy* himpunan *fuzzy* μ dan γ, yang dinotasikan dengan $\mu \cup \gamma$, didefinisikan sebagai fungsi keanggotaan dengan rumus:

$$(\mu \cup \gamma)(x) = \max\{\mu(x), \gamma(x)\}, \text{ untuk setiap } x \in X$$

3. Irisan *Fuzzy*

Misalkan X adalah suatu himpunan klasik dan A, B adalah himpunan *fuzzy* yang didefinisikan pada X. Irisan *fuzzy* himpunan *fuzzy* A dan B, yang dinotasikan dengan $\mu \cap \gamma$, didefinisikan sebagai fungsi keanggotaan dengan rumus:

$$(\mu \cap \gamma)(x) = \min\{\mu(x), \gamma(x)\}, \text{ untuk setiap } x \in X$$

Berikutnya didefinisikan himpunan *fuzzy* $t-$level ($t-$cut) pada suatu himpunan *fuzzy* sebagai berikut:

Definisi 2.1. (Kandasamy:7, Klir et.al: 98, Zimmermann: 18). *Misalkan μ adalah himpunan fuzzy yang didefinisikan pada suatu himpunan X. Untuk suatu $t \in [0,1]$ himpunan $X_\mu^t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$ disebut subhimpunan fuzzy $t-$level dari himpunan fuzzy μ.*

Definisi 2.2. (Kandasamy: 9). *Dua himpunan fuzzy μ dan γ dikatakan disjoin jika tidak ada $x \in X$ sedemkian sehingga $\mu(x) = \gamma(x)$.*

Definisi 2.3. (Kandasamy: 10). *Misalkan μ dan γ adalah himpunan fuzzy pada himpunan X. Himpunan fuzzy μ dikatakan memuat himpunan fuzzy γ, yang inotasikan dengan $\gamma \subseteq \mu$ jika $\mu(x) \leq \gamma(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jika $\mu(x) = \gamma(x)$*

untuk setiap $x \in X$, *maka dikatakan* μ *sama dengan* γ, *yang dinotasikan dengan* $\mu = \gamma$.

Selanjutnya didefinisikan himpunan *fuzzy* normal, diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.4. (Kandasamy: 12). *Himpunan fuzzy* μ *pada himpunan* X *disebut normal jika* $\sup_{x \in X} \mu(x) = 1$. *Selanjutnya Himpunan fuzzy* μ *pada himpunan* X *disebut ternormalisasi jika terdapat* $x \in X$ *sedemikian sehingga* $\mu(x) = 1$

C. Subgrup dan Subgrup Normal *Fuzzy*

Untuk kajian pustaka terkait dengan subgrup *fuzzy* maupun subgrup normal *fuzzy* akan merujuk pada tulisan Ajmal, Aktas, Asaad, Kandasami, Mordeson dan Malik, serta Shabir.

Definisi 2.5. *Misalkan* G *adalah grup. Subhimpunan fuzzy* μ *dari grup* G *disebut subgrup fuzzy jika* $\mu : G \to [0,1]$ *suatu fungsi yang memenuhi :*

(i) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ *untuk setiap* $x, y \in G$

(ii) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$ *untuk setiap* $x \in G$

Definisi 2.6. *Misalkan* G *adalah grup. Subhimpunan fuzzy* μ *dari grup* G *disebut subgrup normal fuzzy jika* $\mu(x) = \mu(y^{-1}xy)$ *untuk setiap* $x, y \in G$

BAB III
METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literature. Seperti pada penelitian emikian, maka dalam penelitian ini ditempuh langkah-langkah sebagai berikut:

a. Dipelajari tentang grup, grup normal, sifat-sifat grup, homomorfisma grup serta sifat-sifatnya
b. Dipelajari tentang teori himpunan *fuzzy*
c. Dikaji suatu himpunan *fuzzy* μ yang merupakan fungsi dari grup ke interval [0,1].
d. Diselidiki sifat - sifat μ
e. Dikaji suatu subgrup normal *fuzzy* μ
f. Diselidiki sifat-sifat subgrup normal *fuzzy*.

BAB IV

PEMBAHASAN

Menurut Zadeh, subhimpunan *fuzzy* x dari suatu himpunan S adalah suatu fungsi $\mu: S \rightarrow [0, 1]$. Dalam Asaad (1991), didefinisikan suatu subgrup *fuzzy* yaitu: misalkan G adalah grup , subhimpunan *fuzzy* μ disebut subgrup *fuzzy* dari grup G jika memenuhi aksioma :

(i) $\mu(x,y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}\ \forall x,y \in G$

(ii) $\mu(x) = \mu(x^{-1}), \forall x \in G.$

Subgrup *fuzzy* μ dari G disebut normal jika $\mu(x) = \mu(y^{-1}xy),\ \forall x,y \in G.$

Teorema berikut, memberikan jaminan bahwa subhimpunan level $G_\mu{}^t = \{x \in G \mid \mu(x) \geq t\}\ t \in [0,1]$ merupakan subgrup:

Teorema 4.1. *Misalkan G adalah grup dan* μ *adalah subgrup fuzzy dari G, maka subhimpunan level* G_μ^t*,* $t \in [0,1]$*,* $t \leq \mu(x)$ *adalah subgrup G dengan e adalah elemen identitas dari G.*

Bukti:

Akan dibuktikan $(x \in \mu_t)\ (y^{-1} \in \mu_t) \Rightarrow (xy^{-1}) \in \mu_t$, yaitu $\mu(xy^{-1}) \geq t.$

$\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y^{-1})\}$

$= \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

$\geq \min\{t, t\}$

$= t$

Jadi terbukti $\mu(xy^{-1}) \geq t.$

Teorema berikut ini menjamin bahwa $\mu(e)$ mencapai nilai suprimum, dengan e adalah elemen identitas pada grup G .

Teorema 4.2. *Jika G grup dengan elemen identitas e, maka* $\mu(x) \leq \mu(e),\ \forall x \in G$

Bukti :

Ambil sebarang $x \in G$. Diperoleh

$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(x^{-1})\}$

$= \min\{\mu(x), \mu(x)\}$

$= \mu(x)$

Sehingga $\mu(e) \geq \mu(x)$, $\forall x \in G$, yang berarti bahwa $\mu(e)$ mencapai nilai suprimum, dengan e adalah elemen identitas pada grup G.

Teorema 4.3. *Subhimpunan fuzzy μ dari grup G merupakan subgrup fuzzy dari grup G jika dan hanya jika $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in G$.*

Bukti :

1. Syarat perlu ($\Rightarrow$)

Diketahui μ adalah subgrub *fuzzy* dari G.

Akan dibuktikan $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Bukti:

$\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y^{-1})\}$ (aksioma i)

$= \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ (aksioma ii)

Jadi terbukti $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

2. Syarat cukup ($\Leftarrow$)

Diketahui $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Akan dibuktikan :

(1) $\mu(x,y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ $\forall x,y \in G$

(2) $\mu(x) = \mu(x^{-1})$, $\forall x \in G$

Bukti :

Untuk mempermudah daam pembuktian,maka akan dibuktikan aksioma ke dua pada grup *fuzzy*:

<u>Aksioma ii.</u>

$\mu(x) = \mu(ex) \geq \min\{\mu(e), \mu(x^{-1})\}$

μ (x) $\geq \mu(x^{-1})$ 3.1

$\mu(x^{-1}) = \mu\,(ex^{-1}) \geq \min\,\{\,\mu\,(e),\,\mu\,(x)\,\}$

$= \mu(x)$

$\mu\,(x^{-1}) \geq \mu\,(x)$ 3.2

Dari persamaan 3.1 dan 3.2 diperoleh $\mu(x) = \mu(x^{-1})$.

<u>Aksioma i</u>

$\mu\,(xy) \geq \min\,\{\,\mu(x),\,\mu(y^{-1})\,\}$

$= \min\,\{\,\mu(x),\,\mu(y)\,\}$.

Jadi $\mu\,(xy) \geq \min\,\{\,\mu(x),\,\mu(y)\,\}$

Selanjutnya diberikan teorema yang mengungkap tentang syarat cukup dan perlu $\mu(x)=\mu(e)$.

Teorema 4.4. *Misalkan μ adalah subgrup fuzzy dari G dan $x \in G$. Untuk setiap $y \in G$ berlaku $\mu\,(xy) = \mu(y)$ jika dan hanya jika $\mu(x) = \mu(e)$.*

Bukti :

1. Syarat perlu ($\Rightarrow$)

Diketahui $\mu\,(xy) = \mu\,(y)$. Harus dibuktikan $\mu\,(x) = \mu\,(e)$.

$\mu\,(xy) \geq \min\,\{\,\mu(x),\,\mu(y)\,\}$

$\min\,\{\,\mu(x),\,\mu(y)\,\} = \mu(y)$, $\forall\, y \in G$.

$\mu(y) \leq \mu\,(x)$

$\mu\,(x) = \mu(e)$

2. Syarat cukup ($\Leftarrow$)

Diketahui $\mu(x) = \mu(e)$. Akan dibuktikan $\mu(xy) = \mu(y)$.

$\mu\,(xy) \geq \min\,\{\,\mu\,(x),\,\mu\,(y)\,\}$

$= \min\,\{\,\mu\,(e),\,\mu\,(y)\,\}$

$= \mu\,(y)$

Jadi $\mu\,(xy) \geq \mu\,(y)$ 3.3

$\mu\,(y) = \mu\,(ey) \geq \min\,\{\,\mu\,(e)\,,\,\mu\,(y)\,\}$

$= \min\,\{\,\mu\,(x),\,\mu\,(y)\,\}$

$= \mu\,(xy)$

Jadi $\mu\,(y) \geq \mu\,(xy)$ 3.4

Dari persamaan 3.3 dan 3.4 diperoleh $\mu\,(xy) = \mu\,(y)$

Selanjutnya diberikan teorema berikut yang memberikan syarat cukup G_μ^t *adalah subgrup normal dari grup G.*

Teorema 4.5. *Jika* μ *adalah subgrup normal fuzzy dari grup G,* $t \in [0,1]$, *maka* G_μ^t *adalah subgrup normal dari grup G.*

Bukti :

Ambil sebarang $a,b \in G_\mu^t$. Jelas bahwa $ab \in G_\mu^t$ sebab G_μ^t adalah subgrup (Teorema 4.1). Sehingga tinggal dibuktikan bahwa $a\, G_\mu^t\, a^{-1} = G_\mu^t$.

Ambil sebarang $x \in a\, G_\mu^t\, a^{-1}$. Diperoleh $x = a\, b\, a^{-1}$, untuk suatu $b \in G_\mu^t$.

$\mu\,(x) = \mu\,(\, aba^{-1}) = \mu\,(b)$

$x \in a\, G_\mu^t$

Jadi , $a\, G_\mu^t\, a^{-1} \subseteq a\, G_\mu^t$ 3.5

Ambil sebarang $x \in G_\mu^t$.

Diperoleh $\mu\,(x) \geq t.$

$\Leftrightarrow \mu\,(\, b^{-1}xb\,) \geq t$

Ambil $a = b^{-1}$, $x = y$ untuk suatu y, $\mu(aya^{-1}\,) \geq t$

$\Leftrightarrow x = aya^{-1}$, untuk suatu y

$\Leftrightarrow x \in a\, G_\mu^t\, a^{-1}$

Jadi $G_\mu^t \subseteq a\, G_\mu^t\, a^{-1}$

3.6

Dari 3.5 dan 3.6 diperoleh bahwa G_μ^t subgrup normal dari G.

BAB V
SIMPULAN DAN SARAN

A. Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Misalkan G adalah grup dan μ adalah subgrup *fuzzy* dari G, maka subhimpunan level G_μ^t, $t \in [0,1]$, $t \leq \mu(x)$ adalah subgrup G dengan e adalah elemen identitas dari G.
2. Jika G grup dengan elemen identitas e, maka $\mu(x) \leq \mu(e)$, $\forall x \in G$
3. Subhimpunan *fuzzy* μ dari grup G merupakan subgrup *fuzzy* dari grup G jika dan hanya jika $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in G$
4. Misalkan μ adalah subgrup *fuzzy* dari G dan $x \in G$. Untuk setiap $y \in G$ berlaku $\mu(xy) = \mu(y)$ jika dan hanya jika $\mu(x) = \mu(e)$
5. Jika μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari grup G, $t \in [0,1]$, maka G_μ^t adalah subgrup normal dari grup G

B. Saran

Dalam penelitian ini difokuskan pada suatu struktur yang melibatkan satu operasi biner, yaitu grup. Sehingga diduga dapat digeneralisasi untuk struktur lain, misalnya semigrup. Selain itu dapat juga diselidiki lebih lanjut terkait dengan subgrup level-nya.

DAFTAR PUSTAKA

Ajmal, Naseem. 1994. Homomorphism of *Fuzzy* groups, Corrrespondence Theorm and *Fuzzy* Quotient Groups. *Fuzzy Sets and Systems 61, p:329-339*. North-Holland

Aktaş, Haci. 2004. On *Fuzzy* Relation and *Fuzzy* Quotient Groups. *International Journal of Computational Cognition Vol 2 ,No 2, p: 71-79*

Asaad, Mohamed.1991. Group and *Fuzzy* Subgrup. *Fuzzy Sets and Systems 39, p:323-328*. North-Holland

Kandasamy, W.B.V. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press and W.B. Vasantha Kandasamy Rehoboth. USA

Klir, G.J, Clair, U.S, Yuan, B. 1997. *Fuzzy Set Theory: Foundation and Applications*. Prentice-Hall, Inc. USA

Mordeson, J.N, Malik, D.S. 1998. *Fuzzy Commutative Algebra.* World Scientifics Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore

Shabir, M. 2005. Fully *Fuzzy* Prime Semigroups. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences:1 p:163-168*

Zimmermann, H.J, 1991. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers. USA.