MODUL PERSIAPAN OLIMPIADE

TEORI BILANGAN

Oleh:

MUSTHOFA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2007

TEORI BILANGAN

Dalam teori bilangan, semesta pembicaraan adalah himpunan semua bilangan bulat yang dinyatakan dengan huruf-huruf latin kecil seperti a, b, c, dan sebagainya. Salah satu relasi yang menjadi topik utama dalam teori bilangan adalah relasi keterbagian. Beberapa sifat dan relasi yang lain seperti kekongruenan dikembangkan dari masalah keterbagian.

A. RELASI KETERBAGIAN

Perhatikan bentuk-bentuk persamaan berikut:

- $13 = 2 \times 5 + 3$
- $7 \ = 2 \times 5 + 1$
- $18 = 3 \times 5 + 3$

Secara umum, jika a adalah suatu bilangan bulat dan b suatu bilangan bulat positif, maka ada tepat satu bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga $a = qb + r$, $0 \leq r <$ b.

Bilangan bulat q disebut hasil bagi dan r disebut sisa pembagian. Jika $r = 0$ maka dikatakan a habis dibagi oleh b dan ditulis $b \mid a$. Jika $r \neq 0$ maka ditulis $b \nmid a$.

Sifat-sifat keterbagian:

1. $a \mid a$ (sifat refleksif)
2. $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$ (sifat transitif)
3. $a \mid b$ maka $a \mid mb$, untuk setiap bilangan bulat m.
4. $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid b + c$, $a \mid b - c$ atau $a \mid bc$
5. $ab \mid c$ maka $b \mid c$ dan $a \mid c$
6. $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (bx + by)$ untuk setiap bilangan bulat x dan y.

Bukti:

Di sini akan dibuktikan sifat ke -2 dan ke-5.

(2). $a \mid b$ maka $b = ka$. $b \mid c$ maka $c = mb = m (ka) = (mk) a$. Jadi $a \mid c$.

(5). $ab \mid c \Rightarrow c = (ab)\,k = a\,(bk) \Rightarrow a \mid c$

$ab \mid c \Rightarrow c = (ab)\,k = (ba)k = b\,(ak) \Rightarrow a \mid c$

KETERBAGIAN OLEH 2^n

Suatu bilangan habis dibagi oleh 2^n jika n digit terakhir bilangan tersebut habis dibagi oleh 2^n.

Jadi dapat disimpulkan sebagai berikut:

a. suatu bilangan habis dibagi 2 jika digit terakhhir bilangan itu habis dibagi 2.
b. Suatu bilangan habis dibagi 4 jika 2 digit bilangan terakhir habis dibagi 4.
c. Suatu bilangan habis dibagi 8 jika 3 digit bilangan terakhir habis dibagi 8.
d. Dan seterusnya

BUKTI

Misalkan bilangan itu:

$a = \ldots\ldots\ldots a_3a_2a_1a_0$

$= 10(\ldots a_3a_2a_1) + a_0$

Karena $10(\ldots a_3a_2a_1)$ habis dibagi 2 maka agar a habis dibagi 2 maka haruslah a_0 habis dibagi 2.

CONTOH

Tentukan apakah 456777788777332 habis dibagi 0leh:

a)2 b) 4 c)8

Jawab:

a).Karena $2 \mid 2$ maka $2 \mid 456777788777332$

b).Karena $4 \mid 32$ maka $4 \mid 456777788777332$

c).Karena $8 \nmid 332$ maka $8 \nmid 456777788777332$

KETERBAGIAN OLEH 3, 9 DAN 11

Misalkan bilangan $a = a_n\, a_{n\text{-}1} \ldots a_1\, a_0$

- ☞ Bilangan a habis dibagi 3 jika jumlah angka-angkanya ($a_n + a_{n\text{-}1} + \ldots + a_1 + a_0$) habis dibagi 3
- ☞ Bilangan a habis dibagi 9 jika jumlah angka-angkanya ($a_n + a_{n\text{-}1} + \ldots + a_1 + a_0$) habis dibagi 9
- ☞ Bilangan a habis dibagi 11 jika jumlah silang tanda ganti angka-angkanya ($a_n - a_{n\text{-}1} + a_{n\text{-}2} - \ldots$) habis dibagi 11

BUKTI

Disini akan dibuktikan sifat keterbagian oleh 9.

Misalkan $a = a_n\, a_{n\text{-}1} \ldots a_1\, a_0$

$$= a_n \times 10^n + a_{n\text{-}1} \times 10^{n\text{-}1} + \ldots + a_1 \times 10 + a_0 \times 10^0$$

$$= a_n \times (9{+}1)^n + a_{n\text{-}1} \times (9{+}1)^{n\text{-}1} + \ldots + a_1 \times (9{+}1) + a_0$$

$$= a_n\,[\,9^n + n\,9^{n\text{-}1} + \ldots + 9n] + a_n + a_{n\text{-}1}[9^{n\text{-}1} + (n\text{-}1)9^{n\text{-}2} + \ldots + 9(n\text{-}1)] +$$

$$a_{n\text{-}1} + \ldots + 9a_1 + a_1 + a_0$$

Suku-suku yang merupakan kelipatan 9 sudah jelas habis dibagi 9. Suku-suku yang bukan kelipatan 9 adalah $a_n + a_{n\text{-}1} + \ldots + a_1 + a_0$. Sehingga agar a habis dibagi 9 maka haruslah $9 \mid a_n + a_{n\text{-}1} + \ldots + a_1 + a_0$

CONTOH:

1. Tentukan apakah 9123333456789 habis dibagi :

a).3 b). 9 c).11

Jawab:

9+1+2+3+3+3+3+4+5+6+7+8+9 = 63

a). Karena $3 \mid 63$ maka $3 \mid 9123333456789$

b). Karena $9 \mid 63$ maka $9 \mid 9123333456789$

c).9-1+2-3+3-3+3-4+5-6+7-8+9 = 13. Karena $11 \nmid 13$ maka $11 \nmid 9123333456789$

2. Bilangan 6 angka $a1989b$ habis dibagi oleh 72. Tentukan nilai a dan b.

Jawab :

$72 = 8 \times 9$. Sehingga $8 \mid a1989b$ dan $9 \mid a1989b$.

$8 \mid a1989b \Rightarrow 8 \mid 89b \Rightarrow \mathrm{b} = 6$

$9 \mid a1989b \Rightarrow 9 \mid \mathrm{a}+1+9+8+9+b = a+33 \Rightarrow a = 3$

B. FPB DAN ALGORITMA PEMBAGIAN

Faktor Persekutuan dari a dan b adalah bilangan bulat d yang memenuhi $d \mid a$ dan $d \mid b$. Nilai terbesar dari d disebut faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b, ditulis $(a, b) = d$.

Contoh : (10,12) = 2, (12, 15) = 3, (16, 20) = 4.

Jika a dan b dua buah bilangan bulat positif dan $(a, b) = 1$ maka dikatakan a dan b saling prima atau a relatif prima terhadap b.

TEOREMA (ALGORITMA PEMBAGIAN)

Jika a dan b bilangan-bilangan bulat dengan $b > 0$, maka ada dengan tunggal pasangan bilangan-bilangan bulat q dan r yang memenuhi $a = qb + r$, dengan $0 \le r < b$.

Selanjutnya FPB dari a dan b dapat dicari dengan mengulang-ulang algoritma pemabgian ini.

CONTOH

1. Tentukan (4840, 1512)

Jawab :

$4840 = 3 \times 1512 + 304$

$1512 = 4 \times 304 + 296$

$304 = 1 \times 296 + 8$

$296 = 37 \times 8 +0$

Jadi (4840, 1512) = 8

2. Buktikan bahwa jika $(a, b) = 1$ dan $a \mid bc$, maka $a \mid c$.

Bukti :

$(a, b) = 1 \Rightarrow$ terdapat m dan n sedemikian sehingga $1 = ma + nb$.

$a \mid bc \Rightarrow$ terdapat k sedemikian sehingga $bc = ak$.

Diperoleh $1 = ma + nb$

$c \cdot 1 = mac + nbc$

$c = mac + nak$

$c = a (mc + nk) \Leftrightarrow a \mid c$

C. PERSAMAAN DIOPHANTINE

Suatu persamaan berbentuk $ax + by = c$ dengan a, b, c bilangan-bilangan bulat dan a, b dua-duanya bukan nol disebut persamaan linear Diophantine jika penyelesaiannya dicari untuk bilangan-bilangan bulat.

TEOREMA:

Persamaan linear Diophantine $ax + by = c$ mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika $(a, b) \mid c$.

Bukti :

Misalkan $(a, b) = d$ dan $d \mid c$.

$d \mid c \Leftrightarrow$ ada k sehingga $c = kd$.

$d \mid (a, b) \Leftrightarrow$ ada m dan n sehingga $am + bn = d$

$\Leftrightarrow a(km) = b\,(kn) = kd$

$\Leftrightarrow a(km) + b(kn) = c$

Diperoleh $x = m\,k$ dan $y = nk$

TEOREMA :

Jika $d = (a, b)$ dan x_0, y_0 penyelesaian persamaan Diophantine $ax + by = c$, maka penyelesaian umum persamaan tersebut adalah

$x = x_0 + (b/d)\,k$ dan $y = y_0 – (a/d)k$ dengan k parameter bilangan bulat.

CONTOH

1. Tentukan penyelesaian umum persamaan diphantine $738\,x + 621\,y = 45$.

Penyelesaian:

$738 = 1 \times 621 + 117$

$621 = 5 \times 117 + 36$

$117 = 3 \times 36 + 9$

$36 = 4 \times 9 + 0$

Jadi $(738, 621) = 9$. Karena $9 \mid 45$ maka persamaan di atas mempunyai penyelesaian.

$9 = 117 – 3.36$

$= 117 – 3(621 - 5 \times 117)$

$= -3 \times 621 + 16 (738 – 621)$

$= 16 \times 738 – 19 \times 621$

Kalikan kedua ruas dengan 5

$45 = 80 \times 738 – 95 \times 621$

Didapat $x_0 = 80$ dan $y_0 = -95$

Penyelesaian umumnya adalah

$x= 80 + (621/9) k = 80 + 69 k$

$y = -95 – (738/9)k = -95-82 k$

2. Tentukan bilangan bulat positif x dan y yang memenuhi $7x + 5y = 100$

Penyelesaian :

$(7, 5) =1$. Karena $1 \mid 100$ maka persamaan di atas mempunyai penyelesaian.

$1 = 3.7 – 4.5$

$100 = 7 \times 300 + 5 \times (-400)$. Didapat $x_0 = 300$ dan $y_0 = -400$

Penyelesaian umumnya adalah :

$x = 300 + 5\,k$

$y = -400 – 7\,k$

Karena yang dicari adalah solusi positif maka haruslah

$300 + 5k > 0$ dan $-400 – 7\,k > 0$, yaitu $-60 < k < -57\frac{1}{7}$.

Sehingga didapat $k = -58$ dan $k = -59$.

Jadi persamaan Diophantine $7x + 5y = 100$ mempunyai tepat dua solusi positif yaitu $x_1 = 10, y_1 = 6$ dan $x_2 = 5$, $y_2 = 13$.

D. KEKONGRUENAN

Misalkan a dan b adalah suatu bilangan bulat. Jika m suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, maka a dikatakan kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \equiv b \pmod{m}$) jika m membagi habis ($a – b$).

Atau $a \equiv b \pmod{m}$ jika a dan b memberikan sisa yang sama bila dibagi oleh m.

CONTOH

1. Buktikan bahwa $(am + b)^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Bukti :

Akan dibuktikan ada k sedemikian sehingga $(am + b)^n - b^n = km$.

$(am + b)^n – b^n = (am) + n(am).b^{n-1} + \ldots + n(am)\,b^{n-1} + b^n – b^n$

$$= \{\, a(am)^{n-1} + an(am)^{n-2} + \ldots + an(b)^{n-1} \,\}\, m = k\,m$$

Cara di atas dapat digunakan untuk menentukan sisa pembagian bilangan yang cukup besar.

2. Tentukan sisa jika 3^{1990} jika dibagi 41.

Penyelesaian :

$$
\begin{aligned}
3^{1990} \text{ (mod 41)} &\equiv 3^{4 \times 497 + 2} \text{ (mod 41)} \\
&\equiv (3^4)^{497} \times 3^2 \text{ (mod 41)} \\
&\equiv (2 \times 41 - 1)^{497} \times 9 \text{ (mod 41)} \\
&\equiv (-1)^{497} \times 9 \text{ (mod 41)} \\
&\equiv -9 \text{ (mod 41)} \\
&\equiv (41 - 9) \text{ (mod 41)} \\
&\equiv 32 \text{ (mod 41)}
\end{aligned}
$$

Jadi sisa 3^{1990} dibagi oleh 41 adalah 32.

3. Tentukan angka terakhir dari 777^{333}.

Penyelesaian:

Mencari angka terakhir = menentukan sisa pembagian oleh 10.

$$
\begin{aligned}
777^{333} &\equiv (77 \times 10 + 7)^{333} \text{ (mod 10)} \\
&\equiv 7^{333} \text{ (mod 10)} \\
&\equiv 7^{2 \times 166+1} \text{ (mod 10)} \\
&\equiv (7^2)^{166} \times 7 \text{ (mod 10)} \\
&\equiv 9^{2 \times 83} \times 7 \text{ (mod 10)}
\end{aligned}
$$

$\equiv (81)^{83} \times 7 \pmod{10}$

$\equiv 1^{83} \times 7 \pmod{10}$

$\equiv 7 \pmod{10}$

Jadi angka terakhir dari 777^{333} adalah 7.

E. BILANGAN PRIMA DAN KOMPOSIT

Bilangan prima adalah bilangan asli yang hanya mempunyai tepat 2 faktor, yaitu satu dan bilangan itu sendiri. Contoh bilangan prima yaitu 2,3,5, 7,11,… . Bilangan asli yang mempunyai lebih dari 2 faktor disebut bilangan komposit. Contoh bilangan komposit yaitu, 4, 6, 8, 9,10,… .

TEOREMA

Untuk setiap bilangan komposit n, maka terdapat bilangan prima p sehingga $p \mid n$ dan $p \leq \sqrt{n}$.

Jadi jika tidak ada bilangan prima p yang dapat membagi n dengan $p \leq \sqrt{n}$, maka n adalah bilangan prima.

CONTOH

1. Tentukan apakah bilangan-bilangan berikut merupakan bilangan prima atau majemuk.

a).157 b).221

Jawab:

a). Bilangan-bilangan prima yang $\leq \sqrt{157}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11. Karena tidak ada diantara bilangan-bilangan tersebut yang dapat membagi 157 maka157 merupakan bilangan prima.

b). Bilangan-bilangan prima yang $\leq \sqrt{221}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena $13 \mid 221$ maka 221 adalah bilangan komposit.

2. Tentukan semua pasangan-pasangan bilangan asli a dan b sehingga

$a^2 - b^2 = 1991.$

Penyelesaian:

$1991 = 11 \times 181.$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 1991$

$(a + b)(a - b) = 1 \times 1991$ atau $(a + b)(a - b) = 11 \times 181.$

Kemungkinan 1	Kemungkinan 2
$a + b = 1991$	$a + b = 181$
$a - b = 1$	$a - b = 11$
------------------------- +	--------------------- +
$2a = 1992$	$2a = 192$
$a = 996$	$a = 96$
$b = 995$	$b = 85$

TEOREMA

Jika p bilangan prima dan $p \mid ab$ maka $p \mid a$ atau $p \mid b$.

Bukti :

Andaikan $p \nmid a$. Karena p prima maka $(a,p) = 1$ atau $(a, p) = p$. Karena $p \nmid a$ maka $(a,p)=1$ sehingga $p \mid b$. Dengan jalan yang sama jika diandaikan $p \nmid b$ maka dapat dibuktikan $p \mid a$.

CONTOH

Tentukan nilai maksimum n sehingga 3^n merupakan faktor dari 100!

Penyelesaian:

$100! = 100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

Himpunan bilangan kelipatan $3 \leq 100 = \{ 3, 6, 9, \ldots , 99 \}$ $\Rightarrow$ada 33

Jelas bahwa $3^{33} \mid 100!$

Himpunan bilangan kelipatan $3^2 \leq 100 = \{ 9, 18, 27, \ldots, 99\}$ $\Rightarrow$ ada 10

Himpunan bilangan kelipatan $3^3 \leq 100 = \{ 27, 54, 81\}$ $\Rightarrow$ ada 3

Himpunan bilangan kelipatan $3^4 \leq 100 = \{ 81 \}$ $\Rightarrow$ ada 1

-- +

Jumlah 48

Jelas $3^{48} \mid 100!$, jadi $n = 48$.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Jika n bilangan asli, buktikan bahwa $n^3 + 5n$ habis dibagi 6
2. Jika $3 \mid a + 4b$ tunjukkan bahwa $3 \mid (10a + b)$
3. Jika ditulis dalam basis 10 tentukan banyaknya angka bilangan $4^{16} \times 5^{25}$
4. Tentukan 2 angka terakhir dari bilangan 3^{1234}
5. Tunjukkan bahwa $5555^{2222} + 2222^{5555}$ habis dibagi 7
6. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan Diophantine
   $754\,x + 221\,y = 13$
7. Tentukan bilangan 4 digit yang memenuhi $4 \times (abcd) = dcba$
8. Tunjukkan bahwa $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 7.
9. Jika $n > 4$ merupakan bilangan komposit, tunjukkan bahwa $n \mid (n-1)!$
10. Jika $p > 3$ bilangan prima, tunjukkan bahwa $24 \mid p^2 - 1$.

PEMBAHASAN

1. Jika n bilangan asli, buktikan bahwa $n^3 + 5n$ habis dibagi 6

   Bukti :

   $n^3 + 5n = n^3 - n + 6n$

   $= (n-1)\, n\, (n+1) + 6n.$

   $(n-1)\, n\, (n+1)$ merupakan 3 bilangan yang berurutan, jadi selalu habis dibagi 6. Jelas bahwa $6 \mid 6n$. jadi $6 \mid n^3 + 5n$.

2. Jika $3 \mid a + 4b$ tunjukkan bahwa $3 \mid (10a + b)$

   Bukti :

   $3 \mid a+4b \Rightarrow 3 \mid a+b+3b$ Karena $3 \mid 3b \Rightarrow 3 \mid a+b$.

   $10a + b = 9a + a + b$. Karena $3 \mid a + b$ dan $3 \mid 9a$ maka $3 \mid 10a + b$.

3. Jika ditulis dalam basis 10 tentukan banyaknya angka bilangan $4^{16} \times 5^{25}$

   $$\begin{aligned} 4^{16} \times 5^{25} &= 2^{32} \times 5^{25} \\ &= 2^7 \times 2^{25} \times 5^{25} \\ &= 128 \times (2 \times 5)^{25} \\ &= 128 \times 10^{25} \\ &= 1,28 \times 10^{27} \end{aligned}$$

   Banyaknya angka adalah 28 angka.

4. Tentukan 2 angka terakhir dari bilangan 3^{1234}

   Dua angka terakhir 3^{1234} = sisa pembagian 3^{1234} oleh 100

   $$\begin{aligned} 3^{1234} \pmod{100} &\equiv 3^{5 \times 206 + 4} \pmod{100} \\ &\equiv (3^5)^{206} \times 3^4 \pmod{100} \\ &\equiv (243)^{206} \times 81 \pmod{100} \\ &\equiv (43)^{2 \times 103} \times 81 \pmod{100} \\ &\equiv (1849)^{103} \times 81 \pmod{100} \end{aligned}$$

$\equiv (49)^{2 \times 51 + 1} \times 81 \pmod{100}$

$\equiv (2401)^{51} \times 49 \times 81 \ (\bmod 100)$

$\equiv 1^{51} \times 3969 \ (\bmod 100)$

$\equiv 69 \pmod{100}$

Dua angka terakhir dari 3^{1234} adalah 69

5. Tunjukkan bahwa $5555^{2222} + 2222^{5555}$ habis dibagi 7

Bukti :

$5555^{2222} + 2222^{5555} \ (\bmod 7)$

$\equiv (7 \times 793 + 4)^{2222} + (7 \times 317 + 3)^{5555} \quad (\bmod 7)$

$\equiv 4^{2222} + 3^{5555} \quad (\bmod 7)$

$\equiv (4^{3 \times 740 + 2})+ (3^{3 \times 1851+2}) \quad (\bmod 7)$

$\equiv (4^3)^{740} \times 4^2 + (3^3)^{1851} \times 3^2 \quad (\bmod 7)$

$\equiv 64^{740} \times 16 + 27^{1851} \times 9 \quad (\bmod 7)$

$\equiv 1^{740} \times 16 + (-1) \times 9 \quad (\bmod 7)$

$\equiv (16 - 9) \quad (\bmod 7)$

$\equiv 7 \quad (\bmod 7)$

$\equiv 0 \pmod 7$

6. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan Diophantine

$754 x + 221 y = 13$

Jawab :

$754 = 3 \times 221 + 91$

$221 = 2 \times 91 + 39$

$91 = 2 \times 39 + 13$

$39 = 3 \times 13 + 0$

Jadi (754, 221) = 13 $\mid$ 13. Sehingga persamaan di atas mempunyai penyelesaian bulat.

$13 = 91 - 2 \times 39$

$= 91 - 2 \times (221 - 2 \times 91)$

$= -2 \times 221 + 5 \times 991$

$= -2 \times 221 + 5(754 - 3 \times 221)$

$= 5 \times 754 - 17 \times 221$

Didapat $x_0 = 5$ dan $y_0 = -17$

Penyelesaian umumnya:

$x = 5 + (221/13)\, k = 5 + 17\, k$

$y = -17 - (754/13)\, k = -17 - 58\, k$

7. Tentukan bilangan 4 digit yang memenuhi $4 \times (abcd) = dcba$

   Jawab :

   $4 \times (\ abcd\ ) = dcba \Rightarrow$ 4 digit $\Rightarrow$ nilai a yang mungkin adalah 1 atau 2.

   $4 \times (\ abcd\ ) = \ldots a \Rightarrow$ bersatuan genap $\Rightarrow a = 2$.

   Karena a=2 $\Rightarrow$ haruslah $d = 8$.

$$\begin{array}{l} {\scriptstyle 3} \\ 2\ bc\ 8 \\ 4 \\ \text{--------} \times \\ 8cb2 \end{array}$$

   $4 \times b < 10$ maka nilai b yang mungkin adalah 0,1 atau 2.

   $4 \times c + 3$ tidak mungkin bersatuan 0 atau 2. Jadi b=1.

   Karena $b = 1$ maka haruslah $c = 7$.

   Jadi bilangan tersebut adalah 2178.

8. Tunjukkan bahwa $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 7.

$$\begin{aligned} 3^{105}+4^{105} \pmod 7 &= 3^{105} + (7-3)^{105} \pmod 7 \\ &= 3^{105} + (-3)^{105} \pmod 7 \\ &= 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

9. Jika $n > 4$ merupakan bilangan komposit, tunjukkan bahwa $n \mid (n-1)!$

   Bukti :

   Karena n bilangan komposit maka $n = n_1 n_2$ dengan $n_1, n_2 > 1$ dan $n_1, n_2 < n$.

Kemungkinan 1 : $n_1 \neq n_2$.

$n_1 \neq n_2 \Rightarrow$ kedua bilangan termasuk di dalam perkalian

$(n\text{-}1)! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n\text{-}1)$, sehingga $n \mid (n\text{-}1)!$

Kemungkinan 2 : $n_1 = n_2$.

$n_1 = n_2 \Rightarrow n = n_1^2$. Karena $n > 4 \Rightarrow n_1 > 2$.

Jadi , $n = n_1 \cdot n_1 > 2n_1$. Akibatnya n_1 dan $2\,n_1$ termasuk di dalam perkalian

$(n\text{-}1)! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n\text{-}1)$.

Jadi , $2n_1^2 \mid (n\text{-}1)!$. Sehingga $n \mid (n\text{-}1)!$.

10. Jika $p > 3$ bilangan prima, tunjukkan bahwa $24 \mid p^2 - 1$.

    Bukti :

    Karena $p > 3$ bilangan prima maka $p - 1$ dan $p + 1$ bilangan genap yang satuannya dapat dibagi 2 dan satunya lagi dapat dibagi 4.

    Akibatnya $8 \mid p^2 - 1$ …………………………………….. (*)

    Salah satu dari bilangan $p - 1, p, p + 1$ dapat dibagi 3. Karena $p > 3$ prima maka $3 \nmid p$, sehingga $3 \mid p^2 - 1$ ………………………… ….. (**).

    Karena 3 dan 8 saling prima maka dari (*) dan (**) didapat $24 \mid p^2 - 1$.

Sumber:

Sembiring,Suwah. 2002. *Olimpiade Matematika Untuk SMU.*Yrama Widya: Bandung

Sukirman. 2006. *Pengantar Teori Bilangan.*Hanggar Kreator : Yogyakarta