

Olimpiade Matematika untuk Mahasiswa 2006

STRUKTUR ALJABAR

16 MEI 2006

WAKTU: 90 MENIT

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui $G = \{1, -1\}$ grup dengan operasi kali dan $G^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in G\}$ grup dengan operasi untuk setiap $x_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $x_2 = (a_2, b_2, c_2) \in G^3$:
 $x_1 * x_2 = (a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2)$.
Banyaknya subgrup dari G^3 dengan order 4 adalah ...
2. Penulisan permutasi $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ sebagai perkalian dari permutasi siklik yang saling disjoint adalah ...
3. Perhatikan grup dihedral dengan order 8 :
 $D_4 = \{e, y, y^2, y^3, x, xy, xy^2, xy^3\}$, $x^2 = y^4 = e$ dan $xy = y^{-1}x$.
Grup D_4 ini mempunyai subgrup berorder 4 yang tidak siklik yaitu ...
4. Perhatikan ring kuosien $\mathbb{Z}_5[x]/I$ dengan I adalah ideal yang dibangun oleh $h = x^3 + 3x + 2$. Unsur $(x + 2) + I$ di $\mathbb{Z}_5[x]/I$ mempunyai balikan dengan balikkannya adalah ...
5. Contoh ideal maksimal di \mathbb{Z}_{18} adalah ...
6. Perhatikan ring polinom $\mathbb{Z}_3[x]$ dan jika $f \in \mathbb{Z}_3[x]$ notasi $\langle f \rangle$ menyatakan ideal yang dibangun oleh f . Bilangan $c \in \mathbb{Z}_3$ sehingga $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + cx^2 + 1 \rangle$ membentuk *field* adalah ...
7. Polinom $x^4 + 4$ di ring $\mathbb{Z}_5[x]$ dapat difaktorkan atas polinom tak tereduksikan yaitu ...
8. Jika F adalah *field* dengan order 81 maka karakteristik F adalah ...

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan G suatu himpunan tak kosong dan $*$ suatu operasi biner pada G yang bersifat asosiatif dan untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a^2 * b = b = b * a^2$. Buktikan bahwa G adalah grup komutatif.
Catatan : $a^2 = a * a$.

2. Misalkan R suatu ring dengan karakteristik n (hingga). Untuk setiap $a \in R$ notasi

$$G(a) = \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$$

menyatakan subgrup siklik dari R terhadap operasi tambah yang dibangun oleh a .

- a. Buktikan bahwa jika R *integral domain* maka untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ berlaku subgrup $G(a)$ dan $G(b)$ isomorfik.
- b. Apakah jika pada pernyataan a. di atas, syarat *integral domain* kita hilangkan, pernyataan “untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ berlaku subgrup $G(a)$ dan $G(b)$ isomorfik” masih berlaku? Jelaskan.

3. Dari R ring dan himpunan tak kosong $J \subset R$ dibentuk himpunan

$$N(I) = \{r \in R \mid rx = 0, \quad \forall x \in J\}.$$

- a. Tunjukkan $N(J)$ tidak kosong
- b. Apakah $N(J)$ merupakan ideal? Jelaskan!
- c. Jika $J \subset J' \subset R$, apa yang dapat saudara simpulkan tentang hubungan $N(J)$ dan $N(J')$. Jelaskan!