

Olimpiade Matematika untuk Mahasiswa 2008

STRUKTUR ALJABAR

13 MEI 2008

WAKTU: 75 MENIT

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 8 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 2 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Definisi dan notasi:

\mathbb{Z} : daerah integral (*integral domain*) bilangan bulat

\mathbb{R} : lapangan (*field*) bilangan real

\mathbb{Z}_n : ring bilangan bulat modulo n

$R[x]$: ring polinom atas ring R

\trianglelefteq : subgrup normal

Nama: _____

Univ./PT: _____

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya polinom berderajat dua yang berbeda dalam $\mathbb{Z}_2[x]$ adalah ...

2. Misalkan $G = A(S)$, grup yang memuat semua permutasi dari $\{x_1, x_2, x_3\}$ dan $H = \{\sigma \in G \mid x_1\sigma = x_1\}$. Banyaknya koset kanan dari H di G adalah ...

3. Banyak pembagi nol di \mathbb{Z}_{2008} terhadap perkalian adalah ...

4. Suatu contoh pasangan grup tak komutatif G dan $N \trianglelefteq G$ yang memenuhi G/N grup komutatif adalah $(G, N) = \dots$

5. Contoh gelanggang R dimana hukum pembatalan tidak berlaku, yaitu terdapat $a, b, c \in R, a \neq 0$ sehingga $b \neq c$, tetapi $ab = ac$, adalah ...

6. Diberikan grup $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ terhadap operasi biner $*$ yang didefinisikan sebagai $(a, b) * (c, d) = (ac, b + d)$ untuk setiap $(a, b), (c, d) \in G$. Banyaknya unsur berorde 2 di G adalah ...

7. Bilangan asli $n \geq 2$ yang mengakibatkan \mathbb{Z}_n grup terhadap operasi $*$ dengan $\bar{a} * \bar{b} = \overline{ab + \bar{a} + \bar{b}}$, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ adalah ...

8. Semua ideal dari $\mathbb{Z}_7 \times Q$ adalah ...

Nama: _____

Univ./PT: _____

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan G grup komutatif. Jika terdapat $a, b \in G, a \neq b$ sehingga $o(a) = o(b) = 2$, tunjukkan bahwa $o(G)$ merupakan kelipatan 4. Apakah hal ini tetap berlaku apabila G bukan grup komutatif?

Nama: _____

Univ./PT: _____

2. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Misalkan $\psi_{ab} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $\psi_{ab}(x) = ax + b$. Misalkan $G = \{\psi_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ dan $N = \{\psi_{1b} \in G\}$. Tunjukkan bahwa G/N isomorf dengan $\mathbb{R} - \{0\}$, grup semua bilangan real tak nol terhadap operasi perkalian.