Diktat Perkuliahan
Matematika Terapan

# TURUNAN, INTEGRAL, PERSAMAAN DIFERENSIAL DAN TRANSFORMASI LAPLACE DALAM PENERAPANNYA DI BIDANG TEKNIK ELEKTRO

**oleh :**

**Deny Budi Hertanto, M.Kom.**

**FAKULTAS TEKNIK**
**UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA**
**SEMESTER GANJIL TAHUN 2009/2010**

## MATEMATIKA TERAPAN

**Materi**

**I. Review**

Definisi Dasar
- Fungsi
- Variabel

Turunan/Derivatif
- Beberapa aturan pada operasi turunan
- Latihan Soal

Integral
- Beberapa sifat pada operasi integral
- Beberapa sifat trigonometri yang perlu diperhatikan
- Latihan Soal

**II Persamaan Diferensial Biasa**

Pengertian persamaan diferensial
Pembentukan persamaan diferensial
Orde persamaan diferensial
Persamaan diferensial biasa
Solusi persamaan Diferensial
- Solusi umum
- Solusi khusus

Masalah nilai awal dan nilai batas
Latihan Soal

**III. Persamaan Diferensial Orde 1**

Bentuk Sederhana persamaan diferensial orde pertama
Pemisahan Variabel
Contoh Soal Cerita

**IV. Persamaan Diferensial Linear Orde 1**

Ciri-ciri sifat linearitas pada Persamaan Diferensial
Persamaan Diferensial Eksak
Metode Faktor Pengintegralan
Solusi Persamaan Diferensial Non Eksak Dengan Faktor Pegintegaralan

**V. Persamaan Diferensial Orde 2**

Persamaan Diferensial linear Orde 2
Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde 2 dengan Koefisien Konstan (*Second* ***Order Homogeneous Linear Differential Equations With Constant Coefficients*****)**
- Akar-akarnya adalah bilangan riil dan sama
- Akar-akarnya adalah bilangan riil dan berbeda
- Akar-akarnya adalah bilangan kompleks

Persamaan Diferensial Linear Non-Homogen Orde 2 dengan Koefisien Konstan (*Second Order Homogeneous Linear Differential Equations With Constant Coefficients*)

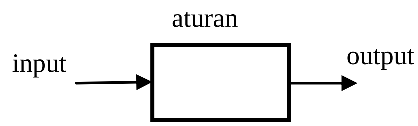
**VI. Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Bidang Teknik Elektro**

# I. *REVIEW*

**Definisi Dasar**

- **Fungsi**

Secara mudah, fungsi dapat dipandang sebagai “aturan” yang menghubungkan input dan output. Input yang diberikan akan dilewatkan ke sebuah blok fungsi, dan menghasilkan output sesuai dengan karakteristik blok fungsi. Hal ini dapat diilustrasikan sebagai berikut :




Gambar 1. Hubungan antara input, output, dan blok fungsi

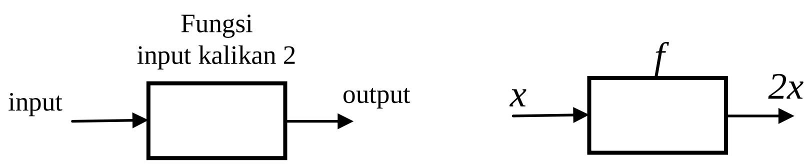
Sebuah fungsi “pengali input dua kali” akan menghasilkan nilai output dua kali dari nilai input. fungsi tersebut apabila dituliskan secara matematis adalah sebagai berikut :

$f : x \rightarrow 2x$ ,

atau ditulis secara lebih kompak

$f(x) = 2x$

dan digambarkan sebagai berikut :

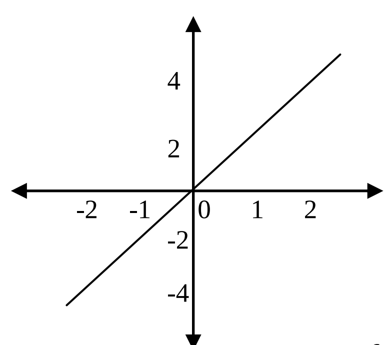



Gambar 2. Sebuah fungsi dengan blok fungsi “input kalikan 2”

Input suatu fungsi disebut sebagai argumen. Pada fungsi $f(x) = 2x$, yang menjadi argumen adalah x. Jika x diganti dengan nilai 3, maka : $f(3) = 2.3 = 6$, dengan nilai argumen adalah 3.

Sebuah fungsi dapat digambarkan secara grafik dengan memakai kordinat kartesius. Fungsi $f(x) = 2x$ dapat digambarkan dengan menguji nilai $f(x)$ untuk beberapa nilai x sebagai berikut.

x = 2, → $f(x)$ = 4
x = 1, → $f(x)$ = 2
x = 0, → $f(x)$ = 0
x = -1, → $f(x)$ = -2
x = -2, → $f(x)$ = -4
dst.




Gambar 3. koordinat kartesius fungsi $f(x) = 2x$

- **Variabel**

Pada fungsi $y = f(x) = 2x$, x dan y dapat memiliki kemungkinan sejumlah nilai tertentu, sehingga x dan y dinamakan sebagai variabel. x adalah variabel *independent* (variabel bebas) dan y adalah variabel *dependent* (variabel tak-bebas), mengingat nilai y ditentukan oleh nilai variabel x.

**Contoh I.1**

a. $y = x^4 + 5x^2$, variabel *dependent* = y. variabel *independent* = x

b. $\frac{dq}{dt} + 6q = 3t^2$, variabel *dependent* = q. variabel *independent* = t

c. $\frac{d^2 y}{dt^2} - 9x = e^t$, variabel *dependent* = y, variabel *independent* = x, t

pada contoh b dan c terlihat bahwa pada persamaan differensial, variabel *dependent*-nya adalah variabel dalam bentuk turunannya.

**TURUNAN/DERIVATIF**

Berikut ini adalah turunan dari beberapa fungsi.

Tabel I.1. Beberapa fungsi yang sering digunakan beserta turunannya

| **Fungsi, *y(x)*** | **Turunan, *y'*** | **Fungsi, *y(x)*** | **Turunan, *y'*** |
|---|---|---|---|
| Konstanta | 0 | $\sin^{-1}(ax+b)$ | $\frac{a}{\sqrt{1-(ax+b\ )^2}}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\cos^{-1}(ax+b)$ | $\frac{-a}{\sqrt{1-(ax+b\ )^2}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\tan^{-1}(ax+b)$ | $\frac{a}{1+(ax+b)^2}$ |
| $e^{-x}$ | $-e^{-x}$ | $\sinh(ax+b)$ | $a\cosh(ax+b)$ |
| $e^{ax}$ | $ae^{ax}$ | $\cosh(ax+b)$ | $a\sinh(ax+b)$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $\tanh(ax+b)$ | $a\sec h^2(ax+b)$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\cos ech(ax+b)$ | $-a\cos ech(ax+b)\coth(ax+b)$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\sec h(ax+b)$ | $-a\, s\, ech(ax+b)\tanh(ax+b)$ |
| $\sin(ax+b)$ | $a\cos(ax+b)$ | $\coth(ax+b)$ | $-a\cos ech^2(ax+b)$ |
| $\cos(ax+b)$ | $-a\sin(ax+b)$ | $\sinh^{-1}(ax+b)$ | $\frac{a}{\sqrt{(ax+b\ )^2+1}}$ |
| $\tan(ax+b)$ | $a\sec^2(ax+b)$ | $\cosh^{-1}(ax+b)$ | $\frac{a}{\sqrt{(ax+b\ )^2-1}}$ |
| $\cos ec(ax+b)$ | $-a\cos ec(ax+b)\cot(ax+b)$ | $\tanh^{-1}(ax+b)$ | $\frac{a}{\sqrt{1-(ax+b\ )^2}}$ |
| $\sec(ax+b)$ | $a\sec(ax+b)\tan(ax+b)$ | | |

**Beberapa Aturan Pada Operasi Turunan**

Jika *u* dan *v* adalah sebuah fungsi, dan *c* adalah konstanta, maka :

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $(cu)' = cu'$
4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. Jika $y = y(z)$, dan $z = z(x)$, maka : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dx}$

**Contoh I.2**

Carilah turunan dari fungsi y berikut ini :

1. $y = (x^2 + \sin x)$

   jawab :

   $y' = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(\sin x)}{dx}$

   $y' = 2x + \cos x$

2. $y = x \sin x$

   $misalkan : u = x, v = \sin x$.

   $u' = 1$, dan $v' = \cos x$

   maka y menjadi $y = uv$.

   $y' = (uv)'$

   $y' = u'v + uv'$

   $y = \sin x + x \cos x$

3. $y = 10 \cos x$

   Jawab :

   $y' = 10 \sin x$

4. $y = \frac{t^2}{2t+1}$.

   Jawab :

   Misalkan $u = t^2$ dan $v = 2t + 1$.

   $u' = 2t$, dan $v' = 2$

   $y = (\frac{u}{v})$, maka $y' = (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

   $y' = \frac{2t(2t+1) - t^2.2}{(2t+1)^2}$

   $y' = \frac{4t^2 + 2t - 2t^2}{(2t+1)^2} = \frac{2t^2 + 2t}{(2t+1)^2} = \frac{2t(t+1)}{(2t+1)^2}$

5. $y = z^6$, $z = x^2 + 1$. Carilah $\frac{dy}{dx}$ !

Jawab :

$y = (x^2+1)^6$ , $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} * \dfrac{dz}{dx}$

$\Rightarrow 6z^5.2x$

$\Rightarrow 12x.z^5$

$\Rightarrow 12x(x^2+1)^5$

**Latihan Soal I.1**

Temukan turunan dari

1. $y = e^{-7x}$
2. $y = \tan(3x-2)$
3. $y = x^5$
4. $y = \sin(\omega x + \theta)$
5. $y = \dfrac{1}{t^5}$
6. $y = \cos(4-t)$
7. $y = \pi$
8. $y = \cos^{-1}(4t-3)$
9. $y = \sin^{-1}(-2t-3)$
10. $y = \dfrac{1}{\sin(5x+3)}$
11. $y = 3\sin(5t) + 2e^{4t}$
12. $y = 2e^{3t} + 17 - 4\sin(2t)$
13. $y = \dfrac{1}{t^3} + \dfrac{\cos 5t}{2}$
14. $y = \dfrac{2w^3}{3} + \dfrac{e^{4w}}{2}$
15. $y = \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x})$
16. $y = 3\sin^{-1}(2t) - 5\cos^{-1}(3t)$
17. $y = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}(t+2) + 4\cos^{-1}(2t-1)$
18. Sebuah fungsi : $y(t) = \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{5t^2}{2} + 4t + 1$

(a) tentukan $\dfrac{dy}{dt}$

(b) jika turunan pertama fungsi tersebut adalah nol, berapa nilai t ?

**Latihan Soal I. 2**

Carilah turunan dari fungsi berikut ini :

1. $y = \sin x \cos x$
2. $y = \sqrt{x} e^x$
3. $y = e^t \sin t \cos t$
4. $y = e^t \sin t \cos t$

(nomor 1-4, gunakan aturan perkalian)

5. $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
6. $y = \dfrac{e^{2t}}{t^3 + 1}$
7. $y = \dfrac{3x^2 + 2x - 9}{x^3 + 1}$
8. $y = \ln(x^2 + 1)$
9. $y = \sin^3(3t + 2)$
10. $y = \dfrac{1}{t + 1}$

**INTEGRAL**

Proses mengintegralkan suatu fungsi merupakan kebalikan turunan/derivatif. Suatu fungsi f(x) dapat kita turunkan menjadi : $\dfrac{d(fx)}{dx}$. Apabila kita ingin mencari suatu fungsi f(x) dari turunan/derivatif-nya, maka dinamakan : integral

Tabel I.2. Beberapa fungsi yangs sering digunakan beserta integral fungsi tersebut

| **Fungsi, f(*x*)** | $\int f(x)dx$ | **Fungsi, f(*x*)** | $\int f(x)dx$ |
|---|---|---|---|
| K, Konstanta | $kx + c$ | $\tan ax$ | $\dfrac{\ln\lvert\sec ax\rvert}{a} + c$ |
| $x^n$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$ | $\tan(ax+b)$ | $\dfrac{\ln\lvert\sec(ax+b)\rvert}{a} + c$ |
| $e^x$ | $e^{-x} + c$ | $\cos ec(ax+b)$ | $\dfrac{1}{a}\{\ln\lvert co\sec(ax+b) - \cot(ax+b)\rvert\} + c$ |
| $e^{-x}$ | $-e^{-x} + c$ | $sec(ax+b)$ | $\dfrac{1}{a}\{\ln\lvert\sec(ax+b) + \tan(ax+b)\rvert\} + c$ |
| $e^{ax}$ | $\dfrac{e^{ax}}{a} + c$ | $\cot(ax+b)$ | $\dfrac{1}{a}\{\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert\} + c$ |
| $x^{-1}$ | $\ln\lvert x\rvert + c$ | $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ | $\sin^{-1}\dfrac{x}{a} + c$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $-\cos x + c$ | $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$ | $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + c$ |
| $\sin ax$ | $\dfrac{-\cos ax}{a} + c$ | | |
| $\sin(ax+b)$ | $\dfrac{-\cos(ax+b)}{a} + c$ | | |
| $\cos x$ | $\sin x + c$ | | |
| $\cos ax$ | $\dfrac{\sin ax}{a} + c$ | | |
| $\cos(ax+b)$ | $\dfrac{\sin(ax+b)}{a} + c$ | | |
| $\tan x$ | $\ln\lvert\sec x\rvert + c$ | | |

**Contoh I.3**

Temukan fungsi y jika :

(a) $y' = 6x$

(b) $y' = 4x^3$

(c) $y' = \cos x + x$

jawab :

1. $y = \int 6x dx$

   $y = 3x^2 + c$ , dengan c adalah suatu konstanta sembarang.

   Perlu diingat, bahwa turunan dari suatu konstanta adalah nol.

2. $y = \int 4x^3 dx$

   $$y = \frac{4}{(3+1)} x^{(3+1)}, \Rightarrow y = x^4 + c$$

3. $y = \int (\cos x + x) dx$

   $$y = \sin x + \frac{1}{2} x^2 + c$$

**Beberapa sifat pada operasi integral (sifat linearitas):**

1. $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$
2. $\int A f dx = A \int f dx$
3. $\int (Af + Bg) dx = A \int f dx + B \int g dx$

(sifat 1-3 dinamakan sifat linearitas)

4. $\int uv' dx = uv - \int vu' dx$

**Beberapa sifat trigonometri yang perlu diingat :**

1. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$
2. $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$
3. $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$
4. $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$
5. $\sin 2t = 2\sin t \cos t$
6. $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = \cos^2 t - \sin^2 t$
7. $\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$
8. $1 + \cot 2t = co\sec^2 t$
9. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$
10. $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
11. $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan(A \pm B)}{1 \mp \tan A \tan B}$
12. $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
13. $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
14. $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

**Latihan Soal I.3**

Temukan fungsi y jika :

1. $y = \sin(3x+2)$
2. $y = 5.9$
3. $y = e^{-3t}$
4. $y = \dfrac{1}{x^5}$

nomor 5 dst, gunakan sifat linear integral

5. $y = 3t^2 - \sqrt{t}$
6. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{2}$
7. $y = 7\cos ec(\dfrac{\pi}{2})$
8. $y = 4\cos(9x+2)$

nomor 9 dst. Carilah :

9. $\int \cos^2 t dt$
10. $\int \sin^2 t dt$
11. $\int xe^{2x} dx$
12. $\int e^t \sin t dt$
13. $\int (3x+1)^5 dx$
14. $\int_1^2 \sin t \cos^2 t dt$
15. $\int \dfrac{4}{(5x-7)} dx$

## II. Persamaan Diferensial Biasa
## (*Ordinary Differential Equations*)

### II. 1 Pengertian Persamaan Diferensial

**Persamaan Diferensial/PD** adalah persamaan yang di dalamnya berisi turunan (*derivative* atau *differential*) satu atau lebih variabel. Persamaan diferensial orde 1 dengan $y$ sebagai variabel *independent* dan *x* sebagai variabel *dependent* ditulis secara matematis sebagai berikut : $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Sedangkan persamaan diferensial dalam orde 2 ditulis secara matematis sebagai : $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$ dengan catatan, tidak semua variabel dari fungsi $f$ harus muncul dalam persamaan. Contoh dari persamaan diferensial antara lain:

(1) $\frac{dy}{dx} = e^x + \boldsymbol{sin}\, x$

(x adalah *variabel independent*, y adalah *variabel dependent* yang nilainya tergantung x)

(2) $y'' - 2y' + y = \boldsymbol{cos}\, x$

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$

(4) $3x^2 dx + 2ydy = 0$

### II Pembentukan persamaan diferensial

Persamaan diferensial muncul ketika terjadi perubahan pada suatu besaran, yang biasanya dinyatakan dalam suatu fungsi matematis. Contoh (1), (2), (3) dan (4 ) merupakan persamaan diferensial yang secara matematis diekspresikan tanpa mengetahui latar belakang pembentukan/terjadinya persamaan diferensial tersebut.

Contoh pembentukan persamaan diferensial dalam dunia riil adalah persamaan differensial yang terbentuk dari suatu objek yang sedang bergerak. Dimisalkan objek tersebut bergerak dengan karakteristik persamaan : $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 2x = 3t$ dengan :

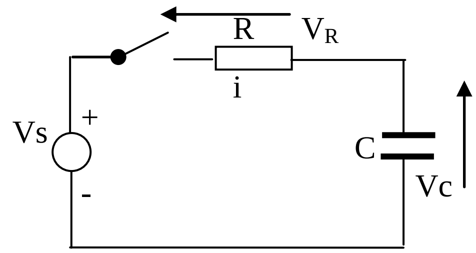
*x* menyatakan jarak

$\frac{d^2x}{dt^2}$ (yaitu turunan kedua fungsi jarak) menyatakan percepatan, dan

$\frac{dx}{dt}$ (turunan pertama) menyatakan kecepatan.

Contoh yang lain adalah muatan listrik yang bergerak, dimisalkan memiliki persamaan : $\frac{dq}{dt} + 8q = \sin t$ dengan $q$ merupakan muatan listrik, $\frac{dq}{dt}$ merupakan laju aliran muatan (yang diistilahkan sebagai aliran arus listrik).

Contoh lain pembentukan persamaan diferensial adalah pada rangkaian listrik yang terdiri dari komponen RC sebagaimana diperlihatkan dalam gambar berikut :




Gambar II.1 Suatu Rangkaian listrik dengan saklar

Berdasarkan hukum kirchof, jumlah tegangan pada loop tertutup dari suatu rangkaian listrik adalah nol. Jika dituliskan : $V_S = V_R + V_C$ , atau $V_R = V_S - V_C$.

Vs = tegangan sumber
Vc = tegangan pada kapasitor
$V_R$ = tegangan pada resistor

Berdasarkan hukum Ohm, arus yang mengalir pada resistor (pada rangkaian tertutup) dapat dicari dengan rumus : $i = \dfrac{Vs - Vc}{R}$.

Arus yang mengalir pada kapasitor adalah : $i = C\dfrac{dVc}{dt}$.

Oleh karena arus yang mengalir pada kapasitor = arus yang mengalir pada resistor, maka :

$$\frac{Vs - Vc}{R} = C\frac{dVc}{dt}.$$

Sehingga didapatkan : $RC\dfrac{dVc}{dt} + Vc = Vs$ .Persamaan ini merupakan persamaan diferensial dengan Vc adalah *variabel dependent*, dan t merupakan *variabel independent*.

Lebih lanjut tentang aplikasi persamaan diferensial dalam bidang elektro, dapat dipelajari di bagian akhir bab ini.

**Orde Persamaan Diferensial**

Orde persamaan diferensial adalah orde tertinggi dari turunan yang ada di dalam persamaan diferensial tersebut.

$R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = 3$, adalah persamaan diferensial orde pertama dalam q

$\dfrac{d\theta}{dt} = \sin(\theta)$, adalah persamaan diferensial orde pertama dalam θ

$x'' + 4t^2 = 0$ , adalah persamaan diferensial orde kedua dalam x

$\dfrac{d^3u}{dt^3} - \dfrac{du}{dt} + u = 4t^2$, adalah persamaan diferensial orde ketiga dalam u

**Persamaan Diferensial Biasa**

Persamaan diferensial yang hanya melibatkan satu variabel *independent* disebut sebagai persamaan diferensial biasa. Sehingga contoh (1), (2), dan (4) di muka merupakan contoh persamaan diferensial biasa, sedangkan contoh (3) bukan merupakan persamaan diferensial biasa. Selanjutnya, (3) merupakan persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*,PDE).

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih variabel *independent*. Contoh : persamaan diferensial parsial orde 1 dengan 2 variabel independent : x1 dan x2 ditulis dalam bentuk : $\frac{\delta y}{\delta x1} = f(x1, x2, y)$, dan bukan $\frac{dy}{dx1} = f(x1, x2, y)$.

**Solusi Persamaan Diferensial**

Solusi persamaan differensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial yang dimaksudkan. Pada kedua kasus di atas adalah dimaksudkan untuk mencari nilai *x(t)* dan *q(t)*. Solusi persamaan differensial dapat berupa solusi analitis, dimana jawaban dari persamaan differensial tersebut dapat dinyatakan dalam fungsi-fungsi dasar seperti $e^t$, *sin t*, *cos t*, dst. Tidak semua persamaan diferensial dapat dicari solusinya secara analitis. Solusi persamaan differensial dapat juga dicari dengan menggunakan metode numerik yang menghasilkan solusi dengan nilai pendekatan.

**Contoh II.1**: Tunjukkan bahwa x = $t^3$ adalah solusi dari persamaan diferensial : $\frac{dx}{dt} = 3t^2$

Jawab :

Untuk membuktikan bahwa x = $t^3$ adalah solusi dari persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = 3t^2$, maka substitusikan $x = t^3$ kedalam persamaan $\frac{dx}{dt} = 3t^2$.

$\frac{d(t^3)}{dt} = 3t^2$, $\Rightarrow 3t^2 = 3t^2$, berlaku untuk semua nilai *t*, sehingga $x = t^3$ adalah solusi dari $\frac{dx}{dt} = 3t^2$.

**Contoh II.2** : Tunjukkan bahwa $y = t^2 - 3t + 3.5$ adalah solusi dari persamaan diferensial $y'' + 3y' + 2y = 2t^2$.

Jawab : $y = t^2 - 3t = 3.5$, $y' = 2t - 3$, $y'' = 2$. Substistusikan ke dalam persamaan diferensial $y'' + 3y' + 2y = 2t^2$, sehingga :

$$2 + 3(2t - 3) + 2(t^2 - 3t + 3.5) = 2t^2$$

$$\Rightarrow 2t + 6t - 9 + 2t^2 - 6t + 7 = 2t^2$$

$$\Rightarrow 2t^2 = 2t^2$$

Solusi ini berlaku untuk semua nilai t. Sehingga $y = t^2 - 3t + 3.5$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $y'' + 3y' + 2y = 2t^2$

**Solusi Umum dan Khusus**

Persamaan diferensial boleh jadi memiliki banyak solusi. Sebagai contoh, persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = 3t^2$ dapat memiliki solusi x = $t^3$, x = $t^3$+9, x = $t^3$-6, dst. Solusi solusi ini disebut sebagai solusi khusus, sedangkan x = $t^3$ + C merupakan solusi umum dari $\frac{dx}{dt} = 3t^2$.

Persamaan differensial dalam bidang teknik umumnya digunakan untuk memodelkan sistem dinamis, yaitu sistem yang berubah terhadap waktu. Contoh dari beberapa sistem dinamis antara lain:

1. Rangkaian listrik dengan arus/tegangan yang merupakan fungsi waktu.
2. Dalam produksi kimia, dimana tekanan, laju aliran, dst selalu berubah terhadap waktu.
3. Peralatan semikonduktor, dimana kerapatan *hole* dan elektron selalu berubah.

**Masalah Nilai Awal dan Nilai Batas**

Jika dalam suatu persamaan diferensial diberikan suatu kondisi tambahan dengan sebuah nilai yang sama pada variabel *independent*-nya (baik fungsi maupun turunannya), maka dikatakan bahwa persamaan diferensial tersebut sebagai masalah nilai-awal (*initial-value problem*). Jika kondisi tambahan yang diberikan merupakan nilai yang berbeda pada variabel *independent*-nya, maka dikatakan sebagai masalah nilai-batas (*boundary-value problem*).

**Contoh II.3 :**

Sebuah persamaan diferensial :

$$y'' + 2y' = e^x ; y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2$$

merupakan bentuk *initial-value problem*, karena terdapat dua kondisi tambahan yaitu pada $x = \pi$ , dengan $y(\pi) = 1$ dan $y'(\pi) = 2$.

Sedangkan pada persamaan diferensial :

$$y'' + 2y' = e^x ; y(0) = 1, y(1) = 1$$

merupakan bentuk *boundary-value problem*, karena dua kondisi tambahan diberikan pada nilai x yang berbeda, yaitu pada $x = 0$ and $x = 1$.

**Latihan Soal II.1:**

1. Tunjukkan bahwa : $y = 3\sin 2x$ adalah solusi dari persamaan diferensial : $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$
2. Jika $y = Ae^{2x}$ adalah solusi umum dari $\frac{dy}{dx} = 2y$ , carilah solusi khusus yang memenuhi y(0) = 3.
3. Identifikasi variabel dependent dan independent dari persamaan diferensial berikut ini. Dan sebutkan orde persamaan diferensial tersebut!

   (a) $\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{dy}{dx} = \cos x$

   (b) $\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

   (c) $(\frac{dy}{dx})(\frac{d^2y}{dx^2}) + 9\frac{dy}{dx} = 0$
4. Solusi umum dari : $(\frac{d^2y}{dx^2}) - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ adalah : $y = Axe^x + Be^x$ . Carilah solusi khusus yang memenuhi : y(0) = 0, $\frac{dy}{dx}(0) = 1$

## III. Persamaan Diferensial Orde 1

Sebelum membahas persamaan diferensial orde tinggi, akan dibahas terlebih dahulu persamaan diferensial orde 1.

**Bentuk Sederhana**

Bentuk sederhana persamaan diferensial orde 1 adalah : $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Fungsi y dapat dicari dengan cara mengintegralkan *f(x)*, yaitu : $y = \int f(x)dx$. Namun d, kebanyakan pada demikian, persamaan diferensial yang dijumpai dalm soal umumnya tidak sesederhana itu bentuknya..

**Contoh III.1**

$\frac{dy}{dx} = 5\sin 2x$ . Untuk mencari fungsi *y (x)*, persamaan tersebut diintegralkan :

Maka $y = \int 5\sin 2x dx$ , $\Rightarrow y = -\frac{5}{2}\cos 2x + C$

**Pemisahan Variabel**

Jika persamaan diferensial memiliki bentuk : $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ , maka penyelesaian persamaan diferensial tersebut dapat dicari dengan metode pemisahan variabel, yaitu : $\int \frac{1}{g}(y)dy = \int f(x)dx$ .

Berikut ini adalah contoh penyelesaian persamaan diferensial dengan metode pemisahan variabel. Perhatikan bahwa variabel dikelompokkan sesuai dengan variabel sejenisnya, yaitu variabel x dengan *dx*, variabel y dengan *dy*.

**Contoh III.2**

Temukan solusi persamaan diferensial berikut dengan metode pemisahan variabel :

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y\left(1 + x^3\right)}$

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ , *y(0)* = 1

(d) $\frac{dm}{dt} = 2\sqrt{m}\sin t, \quad m(0) = 4$

Jawab :

(a) Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$ menjadi $ydy = x^2 dx$ sehingga

$$\int y\,d\,y = \int x^2\,d\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 2C}$$, cukup ditulis:

$$y = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + C}$$

(b) Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y\left(1+x^3\right)}$ menjadi $ydy = \frac{x^2}{1+x^3}d\,x$ sehingga

$$\int y\,d\,y = \int \frac{x^2}{1+x^3}d\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}\ln\left(1+x^3\right) + C \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}\ln\left(1+x^3\right) + C'}$$

(c) Pisahkan variabel yang sama sehingga persamaan diferensialnya menjadi :

$\int ydy = \int -xdx$ , integralkan kedua ruas :

$\int ydy = \int -xdx \to \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$ ,

Kalikan kedua ruas dengan 2 sehingga menjadi : $y^2 = -x^2 + c$ ( seharusnya adalah 2c, namun karena masih bersifat konstanta, cukup ditulis c saja). Untuk mencari nilai c, substitusikan nilai *y(0)* = 1.

$1^2 = 0^2 + c$ , $c = 1$

Sehingga solusi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ adalah : $x^2 + y^2 = 1$

(d) $\frac{dm}{dt} = 2\sqrt{m}\sin t, \quad m(0) = 4$. Pisahkan variabel yang sama sehingga :

$\frac{dm}{\sqrt{m}} = 2\sin t dt$ , → $\int \frac{dm}{\sqrt{m}} = 2\int \sin t\,dt$ ,

$\int m^{-\frac{1}{2}}dm = 2\int \sin t\,dt$ , → $2m^{\frac{1}{2}} = -2\cos t + c$ , → $\sqrt{m} = -\cos t + c$

oleh karena *c* = 3, maka $m = \left(3 - \cos t\right)^2$

**Latihan Soal**

1. $\frac{dx}{dt} = 10$
2. $\frac{dy}{dx} = e^{2x}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2x}}{y^2}$
4. $\frac{dx}{dt} = \frac{9\cos 4t}{x^2}$

5. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3\cos 2t + 8\sin 4t}{x^2 + x}$

6. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3\sin t}{y}$ , y(0) = 2

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{y}$ , y(0) = 1

8. $x^2 \dfrac{dy}{dx} = 2y^2 + yx$

9. $y\dfrac{dy}{dx} = \sin x$

10. temukan solusi umum dari persamaan diferensial : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{(x^2 - 1)}{t}$. Tentukan solusi khusus yang memenuhi : x(0) = 5

**Contoh Soal Cerita**

**Contoh III.3**

Laju pertumbuhan penduduk suatu negara adalah 1,3 kali jumlah penduduk saat ini. Jika jumlah penduduk saat ini adalah 80, berapakah jumlah penduduk setelah 100 minutes ?

Jawab :

Langkah 1 → Pemodelan menjadi persamaan diferensial

$$\frac{dN}{dt} = 1.3N$$

Langkah 2 → Integralkan

$$\int \frac{dN}{N} = \int 1.3dt,\ \ln|N| = 1.3t + c$$

Langkah 3 → Jadikan N sebagai subjek :

$$N = e^{1.3t+c}$$

Langkah 4 → Susun kembali persamaan N dengan konstanta yang bersangkutan:

$N = e^{1.3t}e^{c}$, $N = Ae^{1.3t}$ dengan A = $e^c$

Langkah 5 → Cari nilai konstanta :

$80 = Ae^0 \Rightarrow A = 80$ (didapat dari *N(0)* = 80)

Langkah 6 → Temukan solusinya :

$N = 80e^{1.3\times 100}$, $N = 2.298\times 10^{58}$ individu

**Contoh III.4**

Jawab :

Blok es deng berat 10kg meleleh dalam lingkungan yang temperaturnya naik. Laju pengurangan berat es per detik adalah sebanding dengan 20 dikurangi berat es yang tersisa. Setelah 60 detik, berat es adalah 9.5 kg. berapa berat es setelah 120 detik ?

Langkah 1 → Susun persamaan diferensialnya :

$\dfrac{dM}{dt} = k(20 - M)$, *M*(0) = 10, *M*(60) = 9.5

Langkah 2 → Integralkan :

$$\frac{dM}{dt} = -k(20-M)\,, \quad \int \frac{dM}{20-M} = -k\int dt$$
$$-\ln|20-M| = -kt + c$$

Langkah 3 → Jadikan M sebagai subjek :

$$\ln|20-M| = kt + c\,, \quad 20 - M = e^{kt+c}\,, \quad M = 20 - e^{kt+c}$$

Langkah 4 → Susun kembali persamaan M dengan konstanta yang bersangkutan:

$$M = 20 - e^{kt}e^{+c}\,, \quad M = 20 - Ae^{kt}\text{, dengan A} = e^{c}$$

Langkah 5 → Cari nilai konstanta

Gunakan nilai kondisi awal : *M(*0*)* = 10*, M(*60*)* = 9.5

$10 = 20 - Ae^{0} \Rightarrow A = 10\,,$

$9.5 = 20 - Ae^{60k}\,, \; 10e^{60k} = 10.5\,, \; e^{60k} = 1.05\,,$

$60k = \ln 1.05\,, \; k = 0.000813$

maka $M = 20 - 10e^{0.000813t}$

Langkah 6 → Temukan solusinya :

$$M = 20 - 10e^{0.000813t}\,, \quad M(120) = 20 - 10e^{0.000813\times 120}\,,$$
$$M(120) = 8.975 \text{ kg}$$

**Contoh III.5**

<u>Jawab :</u>

Laju pertumbuhan suatu kultur bakteri adalah sebanding (proporsional) dengan fungsi eksponensial pangkat t, dengan t adalah waktu (dalam jam). Disebabkan karena pertumbuhan bakteri yang sangat cepat, maka terjadi *overcrowding*, sehingga laju pertumbuhan bakteri juga berbanding terbalik dengan pangkat empat dari jumlah bakteri saat itu. Lewat eksperimen diketahui bahwa konstanta proporsionalnya adalah 1. Jika pada awalnya hanya terdapat 1 bakteria, berapa banyak bakteria dalam waktu 5 jam ?

Solusi :

pemodelan matematis : $\frac{dn}{dt} = \frac{e^{t}}{n^{4}}\,, \quad n(0) = 1$ , ditanyakan : $n(5)$ = ???

$\sqrt{4} = -\cos 0 + c \Rightarrow 2 = -1 + c$

$n^{4}dn = e^{t}\,d\,, \; \int n^{4}dn = \int e^{t}\,dt\,, \; \frac{n^{5}}{5} = e^{t} + c\,, \; n^{5} = 5e^{t} + c$

evaluasi nilai c : $1^{5} = 5e^{0} + c \Rightarrow 1 = 5 + c$
$\Rightarrow c = -4$

$n^{5} = 5e^{t} - 4\,, \; n = \sqrt[5]{5e^{t} - 4}\,, \quad n(5) = \sqrt[5]{5e^{5} - 4}$
$\approx 4$

## IV. Persamaan Linear Orde Pertama

Adakalanya persamaan diferensial memiliki bentuk : $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, maka dikatakan bahwa persamaan diferensial tersebut dinamakan persamaan diferensial linear orde pertama. P(x) dan Q(x) merupakan fungsi x. Contoh persamaan diferensial linear orde pertama adalah

$\frac{dy}{dx} + 5xy = 7x^2$, → P(x) = 5x

→ Q(x) = $7x^2$

$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = 4e^{-x}$, → P(x) = $-\frac{2}{x}$

→ Q(x) = $4e^{-x}$

**Metode Faktor Pengintegralan**

Persamaan linear orde pertama dapat dicari solusinya dengan metode : faktor pengintegralan, yaitu dengan cara mengalikan persamaan diferensial linear tersebut dengan μ sehingga : $\mu \frac{dy}{dx} + \mu Py = \mu Q$, dengan P dan Q merupakan fungsi dengan variabel x.

Faktor pengintegralan/ μ dapat dicari dengan rumus : $\mu = e^{\int Pdx}$. Ide dari penggunaan faktor pengintegaralan ini adalah menjadikan persamaan diferensial tersebut bersifat eksak, yakni sisi kiri persamaan diferensial $\mu \frac{dy}{dx} + \mu Py = \mu Q$ dapat ditulis sebagai : $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$.

Ingat bahwa : $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu \frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu}{dx}$ ( dari rumus $(uv)' = u'v + uv'$). Sehingga :

$$\mu \frac{dy}{dx} + \mu Py = \mu \frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu}{dx}$$, disederhanakan menjadi :

$$y\frac{d\mu}{dx} = \mu Py$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P \text{ , } \rightarrow \frac{d\mu}{dx} = \mu P$$

maka akan didapatkan : $\mu = e^{\int Pdx}$

kembali ke persamaan diferensial mula-mula :

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x) \text{ , } \Rightarrow \mu y = \int \mu Q dx$$

$$y = \frac{1}{\mu}\int \mu Q dx$$

**Contoh IV.1**

Tentukan penyelesaian dari : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 5$ dengan faktor pengintegralan

<u>Jawab :</u>

dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 5$, terlihat bahwa $P = \frac{1}{x}$ dan $Q = 5$.

Maka : $y = \frac{1}{\mu}\int \mu Q dx$, dengan $\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

$$y = \frac{1}{x}\int 5x dx$$

$$y=\frac{1}{x}\frac{5}{2}x^2+C\,,\ \Rightarrow y=\frac{5}{2}x+C$$

**Latihan Soal :**

1. Buktikan bahwa solusi dari persamaan diferensial $\frac{d\mu}{dx}=\mu P$ adalah : $\mu=e^{\int Pdx}$.
2. $\frac{dy}{dx}+4y=8, y(0)=1$
3. $\frac{dx}{dt}=3x-8$
4. $\frac{dy}{dx}+y=2x+8$
5. $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$

**Persamaan Diferensial Eksak**

Sebuah persamaan diferensial dengan bentuk :

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

dinamakan persamaan diferensial eksak (*exact differential equation*) jika terdapat sebuah fungsi *f* sedemikian rupa sehingga $M=\frac{\partial f}{\partial x}$ and $N=\frac{\partial f}{\partial y}$ pada daerah tertentu. Oleh karenanya, persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi : $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$ . Solusi dari persamaan ini adalah $f(x,y)=k$ , *k* adalah nilai konstanta tertentu.

Apabila $M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$ maka persamaan diferensial dalam bentuk $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ dikatakan eksak jika dan hanya jika $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ .

**Contoh IV.2**

Buktikan bahwa persamaan diferensial berikut bersifat eksak dan tentukan solusi persamaan diferensial tersebut :

(a) $\left(9x^2+y-1\right)dx-\left(4y-x\right)dy=0$

(b) $\left(e^x\sin y-2y\sin x\right)dx+\left(e^x\cos y+2\cos x\right)dy=0$

jawab :

(a) Untuk persamaan diferensial

$$M(x,y) = 9x^2 + y - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N(x,y) = -4y + x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

oleh karenanya, persamaan diferensial tersebut eksak. Fungsi diferensialnya adalah :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + y - 1 \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int \left(9x^2 + y - 1\right)dx = 3x^3 + xy - x + C_1(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + x \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = -2y^2 + xy + C_2(x)$$

dengan membandingkan kedua persamaan di atas maka didapatkan :

$$f(x,y) = 3x^3 + xy - x - 2y^2$$

Oleh karenanya, solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah :

$$3x^3 + xy - x - 2y^2 = k$$

(b) Untuk persamaan diferensial ini :

$$M(x,y) = e^x \sin y - 2y \sin x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y - 2\sin x$$

$$N(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y - 2\sin x$$

adalah merupakan persamaan diferensial bersifat eksak. Fungsi diferensialnya adalah :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y - 2y \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = e^x \sin y + 2y\cos x + C_1(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + 2\cos x \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = e^x \sin y + 2y\cos x + C_2(x)$$

dengan membandingkan kedua persamaan di atas maka didapatkan :

$$f(x,y) = e^x \sin y + 2y\cos x$$

Oleh karenanya, solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah :

$$e^x \sin y + 2y\cos x = k$$

**Solusi Persamaan Diferensial Non Eksak Dengan Faktor Pegintegaralan**

Apabila persamaan diferensial dalam bentuk :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

jika tidak eksak, faktor integralnya dicari terlebih dahulu. Pedoman mencari faktor pengintegralannya adalah sebagai berikut :

a. jika $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$, dengan *f(x)* adalah fungsi dalam x, maka faktor integralnya adalah : $e^{\int f(x)dx}$

b. jika $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-g(y)$, dengan *g(y)* adalah fungsi dalam y, faktor integralnya adalah $e^{\int g(y)dy}$

**Contoh IV.3**

Temukan faktor pengintegralan dari persamaan diferensial biasa berikut dan tentukan solusinya :

$$\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$$

***solusi:***

$$M(x,y)=3x^2y+2xy+y^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2x+3y^2 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial M}{\partial x}=6xy+2y$$

$$N(x,y)=x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2x \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial y}=2y$$

terlihat bahwa $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=3$. Oleh karenanya, faktor pengintegralannya adalah : $\exp\left(\int 3d\,x\right)=e^{3x}$ sehingga persamaan diferensial-nya menjadi

$$e^{3x}\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+e^{3x}\left(x^2+y^2\right)dy=0$$

fungsi diferensialnya adalah $f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{3x}\left(3x^2y+2xy+y^3\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{3x}\left(x^2+y^2\right) \quad \Rightarrow \quad f(x,y)=e^{3x}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)+C(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}=e^{3x}\left(2xy\right)+3e^{3x}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)+C'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}=e^{3x}\left(2xy+3x^2y+y^3\right)+C'(x)$$

dengan membandingkan kedua persamaan di atas, didapatkan :

$$C'(x)=0, \qquad \textit{sehingga} \qquad C(x)=\text{constant}$$

solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah :

$$f(x,y) = e^{3x}\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) = k$$

**Contoh IV.3**

Selesaikan : $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

Jawab :

Kita periksa terlebih dahulu apakah persamaan diferensial tersebut bersifat eksak ataukah tidak.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3e^y 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

persamaannya tidak eksak karena $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$. Selanjutnya dicari faktor integralnya :

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^3e^y + 8xy^2 + 4 \text{, dan } \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4}{y} = -g(y)$$

maka faktor integralnya adalah : $e^{-4\int \frac{dy}{y}} = e^{-4\ln y} = \frac{1}{y^4}$

kalikan persamaan diferensial $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ dengan faktor integralnya, yaitu : $\frac{1}{y^4}$, sehingga persamaan diferensialnya berbentuk :

$(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3})dx + (x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^3}) = 0$ dan persamaan diferensial ini eksak.

Selanjutnya : ambil $\mu = \int M dx = \int (2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3})dx$

$$= x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + \theta(y)$$

sehingga : $\frac{\partial \mu}{\partial y} = x^2e^y + \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4} + \theta'(y) = \text{N}$

$$x^2e^y + \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4} + \theta'(y) = x^2e^y + \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}$$

sehingga $\theta'(y) = 0$, maka $\theta(y) =$ konstanta

oleh karenanya, solusi persamaan diferensial

$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

adalah : $x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C$

**Soal latihan**

periksalah apakah persamaan diferensial di bawah ini eksak atau tidak, kemudian carilah solusinya.

1. $(x2 + y2 + x)dx + (xy)dy = 0$
2. $(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)dx + 2(y^3 + x^2y + x)dy = 0$

## V. Persamaan Diferensial Orde 2

**Persamaan Diferensial linear Orde 2**

Persamaan diferensial linear orde 2 memiliki bentuk umum sebagai berikut : :

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=f(x)$$

dengan $p(x), q(x), r(x)$ dan $f(x)$ adalah fungsi dengan variabel x. Apabila $f(x)$ = 0, maka persamaan diferensial ini dikatakan **homogen**. Sebaliknya, jika $f(x)\neq 0$, maka dikatakan sebagai persamaan diferensial linear **tidak homogen** orde 2.

$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0$, →**homogen**

$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=\sin x$**,** →**tidak homogen**

contoh persamaan diferensial linear orde 2 antara lain :

- $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\sin x$

**Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde 2 dengan Koefisien Konstan (*Second Order Homogeneous Linear Differential Equations With Constant Coefficients*)**

**Orde 2** : pangkat tertinggi dari turunan (derivatif) yang terdapat pada persamaan diferensial :

Contoh : $\frac{d^2x}{dt^2}$

**Homogen** : tiap elemen mengandung unsur : $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x$

Contoh : $x\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-\frac{x}{t}=0$ → homogen

$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-t=3$ → tidak homogen

**Linear** : tiap elemen persamaan mengandung setidaknya satu unsur : $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x$ dan tidak terdapat unsur : $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ atau $x\frac{d^2x}{dt^2}$.

Persamaan diferensial dikatakan linear jika :

1. Variabel dependent dan turunannya berpangkat satu. Jadi bentuk $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ adalah non linear (mengapa ??)
2. Tidak ada perkalian antara varibel dependent dan turunannya. Sehingga bentuk $x\frac{d^2x}{dt^2}$ adalah non-linear (mengapa??)
3. Variabel dependent tidak berbentuk fungsi non-linear, seperti fungsi sinus, cosinus,

eksponensial, dst.

Contoh : $\frac{dx}{dt} = 4t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 4t$

$t\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = 0 \rightarrow$ Linear, karena syarat (1),(2),(3) terpenuhi

$t\frac{d^2x}{dt^2} + 3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{x}{t} = 0$, $\rightarrow$ Tidak linear karena menyalahi syarat (2)

$\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 0$, Tidak linear karena menyalahi syarat (1)

$\frac{dy}{dx} + \cos y = 0$, Tidak linear karena menyalahi syarat (3)

**Koefisien Konstan** : koefisien $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x$ adalah konstanta

**Solusi Umum**

Contoh dari persamaan diferensial linear homogen orde 2 dengan koefisien konstan antara lain : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 0$, $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$, dst

Berikut ini contoh dalam mencari solusi umum persamaan diferensial linear homogen orde 2 dengan koefisien konstan

**Contoh V.1**

Carilah solusi dari persamaan diferensial :

$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$.

<u>Jawab :</u>

Misalkan $x = Ce^{\lambda t}$, maka $\frac{dx}{dt} = C\lambda e^{\lambda t}$, dan $\frac{d^2x}{dt^2} = C\lambda^2 e^{\lambda t}$

Substitusikan sehingga menjadi : $C\lambda^2 e^{\lambda t} + 4C\lambda e^{\lambda t} + 3Ce^{\lambda t} = 0$, $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

Bentuk $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ merupakan persamaan karakteristik. Selanjutnya substitusikan $x = Ce^{\lambda t}$ ke persaman $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$ menghasilkan persamaan $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ , dengan $\lambda$ = -3, -1. oleh karenanya terdapat 2 solusi, yaitu $x = Ce^{-3t}$ dan $x = Ce^{-t}$. Oleh karenanya, solusi umum persamaan diferensial $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$ adalah : $x = C_1e^{-3t} + C_2e^{-t}$

**Contoh V.2**

Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial berikut :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 15x = 0$$

jawab : misalkan $x = Ce^{\lambda t}$, maka $\frac{dx}{dt} = C\lambda e^{\lambda t}$, dan $\frac{d^2x}{dt^2} = C\lambda^2 e^{\lambda t}$

$C\lambda^2 e^{\lambda t} - 2C\lambda e^{\lambda t} - 15Ae^{\lambda t} = 0$, $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$

Didapatkan $\lambda$ = 5, -3.

Solusi umum : $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-3t}$

**Catatan :**

$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$ memiliki persamaan karakteristik $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 15x = 0$ memiliki persamaan karakteristik $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$

jadi : $\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \lambda^2$, $\frac{dx}{dt} \rightarrow \lambda$, $x \rightarrow 1$

maka : $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0 \rightarrow \quad \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

Akar-akar persamana karakteristik dapat memiliki 3 kemungkinan :

1. Akar-akarnya adalah bilangan riil dan berbeda
2. Akar-aknya adalah bilangan kompleks dan sama
3. Akar-akarnya adalah bilangan kompleks
4. Akar-aknya adalah bilangan riil dan sama

**Latihan Soal :**

Tuliskan persamaan karakteristik dari :

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - x = 0$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = 0$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0$

**Akar-akarnya adalah bilangan riil dan berbeda**

Jika akar persamaan karakteristik adalah $\alpha$ dan $\beta$, maka solusi dari persamaan diferensial tersebut adalah : $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$, jika y adalah variabel *dependent* dan x adalah variabel *independent*.

**Contoh V.3**

Temukan solusi dari persamaan diferensial :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

3 langkah penyelesaian :

1. Tuliskan persamaan karakteristik dan cari nilai $\lambda$
2. Tuliskan solusi umum
3. Cari nilai konstanta dari solusi umum

Jawab :

(1) $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \ (\lambda+3)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda = -3, -1$

(2) $x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t}$

(3) (i) $x(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 + C_2$

(ii) $x' = -3C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-t}$ , $x'(0) = 0 \Rightarrow 0 = -3C_1 - C_2$

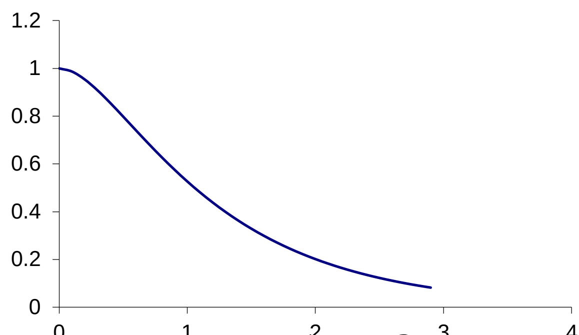
maka dicari nilai $C1$ dan $C2$ dari persamaan : 1 = $C_1$ + $C_2$ dan 0 = -3$C_1$ -$C_2$

$C_1 = 1 - C_2$ , $\Rightarrow 0 = -3(1 - C_2) - C_2$

$\Rightarrow C_2 = \dfrac{3}{2}$ , $\Rightarrow C_1 = \dfrac{-1}{2}$

sehingga solusi dari $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 3x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ adalah $x = \dfrac{-1}{2} e^{-3t} + \dfrac{3}{2} e^{-t}$

apabila digambar dalam grafik akan terlihat seperti gambar berikut :




Gambar. Grafik dari $x = \dfrac{-1}{2} e^{-3t} + \dfrac{3}{2} e^{-t}$

**Contoh V.4**

Temukan solusi dari persamaan diferensial :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 7\frac{dx}{dt} + 12x = 0 \Rightarrow x(0) = 1 \quad x'(0) = 0$$

Jawab :

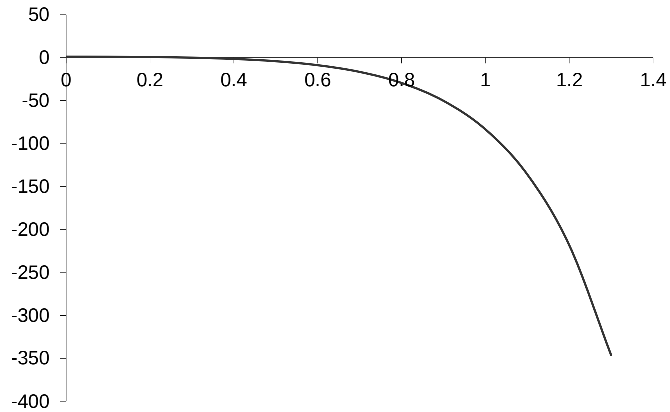
(1) $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \ (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \ \lambda = 3, 4$

(2) $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t}$, $x'(0) = 0 \Rightarrow 0 = 3C_1 + 4C_2$

(3) 1 = $C_1$ + $C_2$ dan 0 = 3 $C_1$ + 4 $C_2$

$\Rightarrow C_2 = -3$ , $\Rightarrow C_1 = 4$

Jadi solusi selengkapnya dari persamaan diferensial $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 7\dfrac{dx}{dt} + 12x = 0$ dengan $x(0) = 1 \quad x'(0) = 0$ adalah : $x = 4e^{3t} - 3e^{4t}$ . Grafik $x = 4e^{3t} - 3e^{4t}$ ditunjukkan pada gambar



Gambar V.1 grafik fungsi $x = 4e^{3t} - 3e^{4t}$

**Jika akar-akar persamaan karakteristik merupakan bilangan kompleks dan sama.**

Jika akar persamaan karakteristik adalah $\pm\alpha$, maka solusi dari persamaan diferensial tersebut adalah : $y = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$

Perhatikan contoh soal berikut :

**Contoh V.5**

Tentukan solusi dari : $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

Jawab :

Persamaan karakteristik dari $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ adalah :

$\lambda^2 + 4 = 0$, $\lambda^2 = -4$, maka $\lambda = \pm 2$

oleh karenanya, solusi umum yang didapatkan adalah :

$$y = C_1 e^{2jx} + C_2 e^{-2jx}$$

berdasarkan sifat trigonometri :

$$e^{2jx} = \cos 2x + j\sin 2x$$

$$e^{-2jx} = \cos 2x - j\sin 2x$$

maka didapatkan :

$$y = C_1(\cos 2x + j\sin 2x) + C_2(\cos 2x - j\sin 2x)$$

jika $C_1 + C_2 = A$

$$C_1 j - C_2 j = B$$

maka : $y = A\cos 2x + B\sin 2x$

**Jika akar-akar persamaan karakteristik merupakan bilangan kompleks**

Jika akar persamaan krakteristik adalah $\lambda = a \pm bj$, maka solusi dari persamaan diferensial tersebut adalah :

$y = e^{-ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

**Contoh V.6**

Tentukan solusi dari persamaan diferensial :

$y'' + 2y' + 4y = 0$

jawab :
Persamaan karakteristik : $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$
Akar persamaan dicari dengan menggunakan rumus abc :

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}, \rightarrow \lambda = -1 \pm 3j$$

maka solusi umumnya adalah :

$$y = e^{-x}(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)$$

**Jika akar persamaan karakteristik berupa bilangan riil dan sama**
maka solusi umumnya berbentuk : $y = x.e^{\lambda x}$

**Contoh V.6**
$y'' - 9 = 0$
Persamaan karakteristik : $\lambda^2 - 9 = 0$, $\rightarrow \lambda = \pm 3$
Solusi dari persamaan diferensial tersebut adalah : $y = x.e^{3x}$

**Latihan Soal**

1. tentukan persamaan karakteristik dari : $L\frac{di^2}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$
2. tentukan solusi dari persamaan diferensial homogen orde 2 berikut :
   a. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 8y = 0$
   b. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$
   c . $\frac{d^2x}{dt^2} - 16x = 0$
   d. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{5dx}{dt} + 6x = 0$
   e. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$

**Persamaan Diferensial Linear Non-Homogen Orde 2 dengan Koefisien Konstan (*Second Order Homogeneous Linear Differential Equations With Constant Coefficients*)**

Dari bentuk umum persamaan diferensial linear orde 2

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = f(x)$$

jika $f(x) \neq 0$, maka solusi khusus persamaan diferensial tersebut dicari dengan mencobanya dengan menggunakan ketentuan sebagai berikut : :

| **f(x)** | **Solusi coba-coba** |
|---|---|
| Konstanta | Konstanta |
| Polinomial x dengan derajat n | Polinomial x dengan derajat n |
| $\cos kx$ | $a\cos kx + b\sin kx$ |
| $\sin kx$ | $a\cos kx + b\sin kx$ |
| $ae^{kx}$ | $ae^{kx}$ |

Solusi total merupakn penjumlahan dari solusi khusus dan solusi umum.
Solusi_total = Solusi_Umum + Solusi_Khusus

**Contoh V.7**
Carilah solusi dari persamaan diferensial :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 3\cos x$$

(1). Mencari solusi umum

Persamaan karakteristik dari $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 0$ adalah : $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$

Sehingga solusi umumnya adalah : $C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$

(2) Mencari solusi khusus
Beberapa langkah yang harus dilakukan dalam mengerjakan solusi khusus :

1. Cari fungsi yang merupakan solusi khusus berdasarkan tabel
   Berdasarkan tabel, maka solusi khusus dimisalkan adalqh fungsi :

   $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$

2. Cari turunan pertama dan kedua, kemudian substitusikan ke dalam persamaan diferensial

   Turunan pertamanya : $y'_p(x) = -a\sin x + b\cos x$

   Turunan keduanya : $y''_p(x) = -a\cos x - b\sin x$

   Selanjutnya substitusikan ke persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 3\cos x$

( $y''_p(x) = -a\cos x - b\sin x$ )–6( $y'_p(x) = -a\sin x + b\cos x$ )+ ( $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$ )

= 3cos x

2. Kelompokkan koefisien- koefisien yangs sejenis, dan cari nilai konstantanya
   Untuk koefisien cos x :

   $(-a - 6b + 8a)\cos x + (-b + 6a + 8b)\sin x = 3\cos x$

   $(-a - 6b + 8a)\cos x = 3\cos x$

   $(7a - 6b) = 3$

Untuk koefisien sin x :

$(-b+6a+8b)\sin x = 0$

$(-b+6a+8b) = 0$

$(6a+7b) = 0$

Maka dapat dicari nilai a dan b, yaitu : $a = \dfrac{21}{85}, b = \dfrac{-18}{85}$

3. Substitusikan nilai konstanta yang didapat ke dalam solusi khusus persamaan diferensial

Solusi khusus : $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$ adalah :

$$y_p(x) = \frac{21}{85}\cos x - \frac{18}{85}\sin x$$

solusi_total = Solusi_Umum + Solusi_Khusus

$$= C_1e^{2x} + C_2e^{4x} + \frac{21}{85}\cos x - \frac{18}{85}\sin x$$

**Latihan Soal :**

Temukan solusi khusus dari :

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 8y = x$

**LATIHAN SOAL TERPADU**

1. Tentukan solusi dari persamaan diferensial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$, dengan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ adalah konstanta.
2. Temukan solusi persamaan diferensial berikut dengan metode pemisahan variabel :

   (a) $\dfrac{dy}{dx} + y^2 \sin x = 0$
3. Pergerakan suatu benda yang jatuh ke bumi memiliki persamaan :

   $$\frac{dv}{d\ t} = g - bv$$

   Tentukan kecepatan benda tersebut pada waktu t, jika $v(0) = 0$.
4. Inti bahan radioaktif mengalami peluruhan dengan fungsi peluruhan :

   $$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

   $N$ adalah konsentrasi(massa) inti bahan radioaktif tersebut and $\lambda$ adalah konstanta peluruhan. Temukan $N(t)$ dengan kondisi awal $N(0) = N_o$.

5. Dari persamaan diferensial berikut, tentukan :

   (a) apakah bersifat linear

   (b) sebutkan orde persamaan diferensial tersebut

(c) buktikan bahwa fungsi yang diberikan merupakan solusi dari persamaan diferensial tersebut :

i. $t\frac{dy}{dt} = y, \Rightarrow y = ct^4$

ii. $y\frac{dy}{dt} = t, \Rightarrow y^2 = t^2 + c, y >= 0$

iii. $t\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = 4, \Rightarrow y = 3t.e^{-t} + 4$

iv. $3y^2\frac{d^2y}{dt^2} + 6y(\frac{dy}{dt})^2 = 2, \Rightarrow y^3 = t^2$

6. Temukan solusi dari persamaan diferensial dengan kondisi awal berikut ini :

a. $\frac{dy}{dt} - 6t = 0, \Rightarrow y(1) = 6$

b. $\frac{dy}{dt} + 5y = \sin(12t), \Rightarrow y(0) = 0$

c. $\frac{dy}{dt} - 3y = 0, \Rightarrow y(0) = 1$

d. $4\frac{dy}{dt} - y = 4, \Rightarrow y(0) = -2$

e. $\frac{1}{2}\frac{dy}{dt} + 6y - 3\sin(5t) = 2\cos(5t), \Rightarrow y(0) = 0$

f. $3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}, \Rightarrow y(0) = 3$

7. Temukan faktor pengintegralan dari persamaan diferensial biasa berikut dan tentukan solusinya :

(a) $y^2dx + xydy = 0$

(b) $(x^2 + y^2 + x)dx + xy \quad dy = 0$

8. Buktikan bahwa persamaan diferensial berikut bersifat eksak dan tentukan solusi dari persamaan diferensial tersebut :

(a) $(ax + by)dx + (bx + cy)dy = 0$

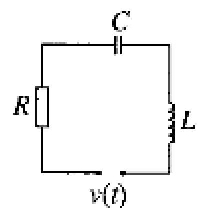
(b) $(2x^2y + 2x)dy + (2xy^2 + 2y)dx = 0$

**Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Bidang Teknik Elektro**

Rangkaian LRC pada gambar dapat dimodelkan ke dalam persamaan diferensial dengan aturan-aturan sebagai berikut :

1. Hukum II Kirchoff's tentang tegangan : jumlah/sigma keseluruhan tegangan dalam loop tertutup adalah nol (*the sum of all the voltage drops around any closed loop is zero*).
2. Tegangan pada pada resistor, *V*R, adalah sebanding dengan arus yang melewatinya, yang dirumuskan dengan : $V_R = iR$ (Hukum Ohm's ), dengan R adalah resistansi dari resistor.

3. Tegangan pada kapasitor adalah sebanding dengan muatan elektrik pada kapasitor, yaitu *q*, yang dirumuskan dengan : $Vc = \frac{1}{C}.q$ , dengan C adalah kapasitansi kapasitor (dalam satuan farad) dan muatan q dalam satuan coulombs.
4. Tegangan pada induktor sebanding dengan laju perubahan arus listrik yang mengalir dalam satu satuan waktu. Dirumuskan sebagai : $V_L = L\frac{di}{dt}$ , dengan L adalah induktansi induktor yang diukur dalam satuan : henri.



Gambar VI. Rangkaian RLC dalam loop tertutup.

Berdasarkan hukum II Kirchof (KVL II) :

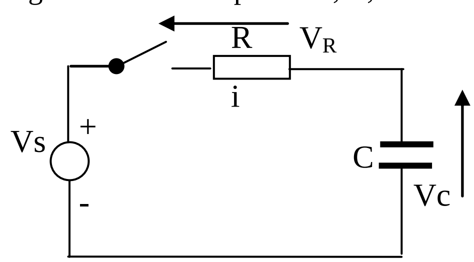
$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C}q = v(t)\ .$$

Oleh karena $i(t) = \frac{dq}{dt}$ , maka: $\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{dq}{dt}) = \frac{d^2q}{dt^2}$ . Sehingga persamaan

$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C}q = v(t)$ menjadi : $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = v(t)$

**Contoh VI.1**

Sebuah rangkaian listrik yang terdiri dari komponen R, C, dan sumber tegangan sebagai berikut :




Jika pada saat t=0 switch tertutup, tegangan pada kapasitor adalah Vo, yaitu Vc (0) = Vo maka :

1. Buktikan bahwa persamaan diferensial yang terbentuk merupakan persamaan diferensial linear orde pertama
2. Carilah solusi dari persamaan diferensial tersebut menggunakan metode faktor pengintegaraln
3. Carilah solusi khusus dari persamaan diferensial tersebut jika tegangan pada kpasitor mula-mula adalah Vo = 0. Solusi pada kondisi ini dinamakan : respon keadaan nol (*zero state- response*)
4. Carilah solusi persamaan diferensial yang terbentuk, jika tegangan sumber = 0 (Vs = 0). Solusi pada kondisi ini dinamakan : respon input nol (*zero input- response*)
5. buktikan bahwa solusi (2) merupakan penjumlahan antara *zero state- response*dan *zero input- response*

**Jawab :**

1. berdasark hukum II Kirchof tentang tegangan : $Vs(t) = V_R + Vc$ .

Arus yang mengalir pada resistor = arus yang mengalir pada kapasitor

$\frac{Vs - V_R}{R} = C\frac{dVc}{dt}$, sehingga persamaan diferensial yang terbentuk adalah :

$RC\frac{dVc}{dt} + Vc = Vs$, yang dapat disederhanakan menjadi bentuk :

$\frac{dVc}{dt} + \frac{Vc}{RC} = \frac{Vs}{RC}$ (persamaan diferensial orde pertama linear)

2. dari pembentukan persamaan diferensial di atas terlihat bahwa :

P = $\frac{1}{RC}$, Q = $\frac{Vs}{RC}$, sehingga faktor pengintegralan ( $\mu$ ) diberikan sebagai :

$\mu = e^{\int Pdt}$, $\mu = e^{\int Pdt}$, $\Rightarrow \mu = e^{\int \frac{1}{RC}dt}$

$\Leftrightarrow \mu = e^{-\frac{t}{RC}}$

solusi dapat dicari dengan rumus : $Vc = \frac{1}{\mu}\int \mu Qdt$, dengan $Vs = V\cos\omega t$ . Maka :

$$\Leftrightarrow Vc = \frac{1}{e^{\frac{t}{(RC)}}}\int e^{\frac{t}{(RC)}}\frac{1}{RC}V\cos\omega t$$

$$\Leftrightarrow Vc = \frac{V}{RC.e^{\frac{t}{(RC)}}}\int e^{\frac{t}{(RC)}}\cos\omega t .$$

Sedangkan $\int e^{\frac{t}{(RC)}}\cos\omega t = \frac{R^2C^2e^{\frac{t}{(RC)}}}{R^2C^2\omega^2+1}\left[\omega\sin\omega t + \frac{\cos\omega t}{RC}\right]$ + K. Maka :

$$Vc = \frac{V.R^2C^2e^{\frac{t}{(RC)}}}{RCe^{\frac{t}{(RC)}}(R^2C^2\omega^2+1)}\left[\omega\sin\omega t + \frac{\cos\omega t}{RC}\right] + \text{K}.e^{-\frac{t}{(RC)}}$$

$$Vc = \frac{VR\ C}{(R^2C^2\omega^2+1)}\left[\omega\sin\omega t + \frac{\cos\omega t}{RC}\right] + \text{K}.e^{-\frac{t}{(RC)}}$$

Dengan kondisi pada saat t=0, Vc = Vo, maka :

$$Vc = \frac{VR\ C}{(R^2C^2\omega^2+1)}\left[\omega\sin\omega t + \frac{\cos\omega t}{RC}\right] + \text{K}.e^{-\frac{t}{(RC)}}$$

dengan menerapkan t=0, Vc = Vo

$\Leftrightarrow Vo = \frac{VR\ C}{(R^2C^2\omega^2+1)}\left[\frac{1}{RC}\right] + K$, sehingga :

$K = Vo - \dfrac{V}{(R^2C^2\omega^2+1)}$. Substitusikan nilai K ke persamaan sehingga :

$$Vc = \frac{VR\ C}{(R^2C^2\omega^2+1)}\left[\omega \sin \omega t + \frac{\cos \omega t}{RC}\right] + (Vo - \frac{V}{(R^2C^2\omega^2+1)})\ e^{-\frac{t}{(RC)}}$$

3. Dengan mengganti Vo = 0, maka didapatkan :fungsi *zero state- response* nya adalah :

$$Vc = \frac{VR\ C}{(R^2C^2\omega^2+1)}\left[\omega \sin \omega t + \frac{\cos \omega t}{RC}\right] - \frac{V}{(R^2C^2\omega^2+1)}\ e^{-\frac{t}{(RC)}}$$

4. Dengan mengganti Vs = V = 0,maka dari persamaan diferensial

$$Vc = \frac{VR\ C}{(R^2C^2\omega^2+1)}\left[\omega \sin \omega t + \frac{\cos \omega t}{RC}\right] + (Vo - \frac{V}{(R^2C^2\omega^2+1)})\ e^{-\frac{t}{(RC)}}$$ didapatkan

fungsi *zero input- response* nya adalah :

$$Vc = Vo.e^{-\frac{t}{(RC)}}$$

5. Terlihat bahwa solusi persamaan diferensial dari point (2) merupakan jumlah antara *zero state- response* dan *zero input- response*

$$Vtotal = Vo.e^{-\frac{t}{(RC)}} + (Vc = \frac{VR\ C}{(R^2C^2\omega^2+1)}\left[\omega \sin \omega t + \frac{\cos \omega t}{RC}\right] - \frac{V}{(R^2C^2\omega^2+1)})$$

yang merupakan solusi yang didapatkan dari (2), yaitu :

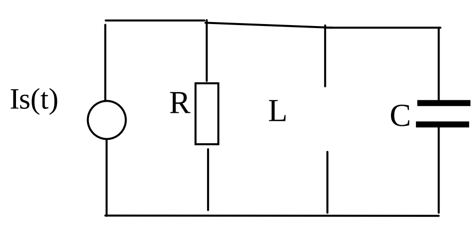
$$Vc = \frac{VR\ C}{(R^2C^2\omega^2+1)}\left[\omega \sin \omega t + \frac{\cos \omega t}{RC}\right] + (Vo - \frac{V}{(R^2C^2\omega^2+1)})\ e^{-\frac{t}{(RC)}}$$

**Latihan soal :**

1. Buktikan bahwa : $\int e^{\frac{t}{(RC)}} \cos \omega t = \dfrac{R^2C^2e^{\frac{t}{(RC)}}}{R^2C^2\omega^2+1}\left[\omega \sin \omega t + \dfrac{\cos \omega t}{RC}\right]$

**Contoh VI.2**

Sebuah rangkaian listrik yang terdiri dari R, L, n C tersusun paralel seperti pada gambar :




Sumber arus adalah Is(t), arus yang mengalir adalah I, dengan persamaan :

$LC\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} + i = i_s(t)$, untuk $t \geq 0$

dengan i merupakan arus yang mengalir pada induktor.

Jika L = 10 H, R = $10\Omega$, dan C = 0.1 F, dengan sumber arus $i_s(t) = e^{-2t}$. Dengan nilai kondisi awal i=1 dan $\dfrac{di}{dt} = 2$ pada saat t=0.

1. Persamaan diferensial bentuk apakah $LC\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di}{dt}+i=i_s(t)$ ?
2. Carilah solusi untuk persamaan diferensial $LC\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di}{dt}+i=i_s(t)$
3. Carilah *zero input- response*, yaitu kondisi pada saat $i_s(t)=0$
4. Carilah *zero state- response*, yaitu saat i=0 dan $\frac{di}{dt}=2$ untuk t=0
5. Tunjukkan bahwa solusi (1) merupakan penjumlahan antara *zero input- response* dan *zero state- response*

jawab :

1. $LC\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di}{dt}+i=i_s(t)$, $\rightarrow$ $\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{di}{dt}+i=e^{-2t}$

   persamaan karkteristik adalah : $\lambda^2+\lambda+1=0$.

   Akar persamaan karkteristik adalah : $\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

   $\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.1}}{2.1}$,

   $\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, $\rightarrow$ $\lambda=\frac{-1}{2}\pm\sqrt{3}j$

   solusi umumnya oleh karenanya adalah :

   $i=e^{-t/2}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$

   solusi khusus dicari dengan mencoba-coba, oleh karena f(x) = $e^{-2t}$, maka diandaikan $i=\alpha e^{-2t}$, $i'=-2\alpha e^{-2t}$, $i''=4\alpha e^{-2t}$, subtitusikan ke persamaan diferensial :

   $i''+i'+1=e^{-2t}$

   $4\alpha e^{-2t}$ $-2\alpha e^{-2t}$ + $\alpha e^{-2t}=e^{-2t}$

   sehingga $3\alpha=1$, $\alpha=\frac{1}{3}$

   sehinggs solusi khususnya adalah : $i=\frac{1}{3}e^{-2t}$

   solusi keseluruhan =solusi umum + solusi khusus

   $$i=e^{-t/2}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{1}{3}e^{-2t}$$

   untuk mencari nilai konstanta A dan B, maka digunakan bantuan kondisi awal.
   Saat t=0, i=1, sehingga :

   $i=A+\frac{1}{3}$, $A=\frac{2}{3}$

   $\frac{di}{dt}$:

$$\frac{di}{dt} = e^{-t/2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{2}e^{-t/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{2}{3}e^{-t/2}$$

saat t=0, $\frac{di}{dt} = 2$, sehingga

$$2 = \frac{\sqrt{3}}{2}B - \frac{1}{2}A - \frac{2}{3}$$

$$2 = \frac{\sqrt{3}}{2}B - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}$$

$$2 = \frac{\sqrt{3}}{2}B - 1$$

$$3 = \frac{\sqrt{3}}{2}B$$

$$B = 2\sqrt{3}$$

sehingga solusi lengkapnya adalah :

$$i = e^{-t/2}\left(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3}e^{-2t}$$

2. *zero input- response*, yaitu kondisi pada saat $i_s(t) = 0$
   dari (1) telah didapatkan solusi umumnya, yaitu :

$$i_s(t) = e^{-t/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

3. kerjakan
4. kerjakan

## MATLAB

**Solusi persamaan diferensial biasa linear**

MatLab merupakan perangkat lunak yang dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial secara mudah. Sintaks perintah yang digunakan untuk mencari persamaan diferensial adalah perintah dsolve.

Sebagai contoh, persamaan diferensial orde 2 sebagai berikut :
y" + y = cos(2x)
dengan kondisi y'(0) = 0 dan y(0) = 1,
dengan y" = $d^2y/dx^2$ dan y' = dy/dx.

```
y=dsolve('D2y + y = cos(2*x)', 'Dy(0)=0', 'y(0)=1')
y =
-2/3*cos(x)^2+1/3+4/3*cos(x)
```

```
pretty(y)

- 2/3 cos(x)^2  + 1/3 + 4/3 cos(x)
```

solusi tersebut dapat disederhanakan :

```
y = simple(y)
y =
-1/3*cos(2*x)+4/3*cos(x)
pretty(y)
- 1/3 cos(2 x) + 4/3 cos(x)
```

contoh 2 : cari solusi persamaan diferensial homogen linear orde 2 dengan koefisien konstan berikut : y'' + 2y' + 5y = 0.
Jawab :

```
dsolve('D2y+2*Dy+5*y')
ans =
C1*exp(-x)*sin(2*x)+C2*exp(-x)*cos(2*x)
```

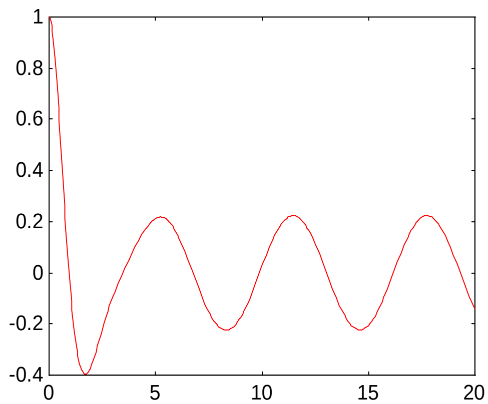
Apabila persamaan diferensial di atas berbentuk y'' + 2y' + 5y = -sin(x),dengan `y'(0) = 0 and y(0) = 1.`

```
y = dsolve('D2y+2*Dy+5*y = -sin(x)', 'Dy(0)=0','y(0)=1')
y =
3/40*sin(2*x)*cos(3*x)-1/40*sin(2*x)*sin(3*x)-
1/8*sin(2*x)*cos(x)+1/8*sin(2*x)*sin(x)+1/8*cos(2*x)*cos(x)+1/8*c
os(2*x)*sin(x)-1/40*cos(2*x)*cos(3*x)-
3/40*cos(2*x)*sin(3*x)+11/20*exp(-x)*sin(2*x)+9/10*exp(-
x)*cos(2*x)

y = simple(y)
y =
-1/5*sin(x)+1/10*cos(x)+11/20*exp(-x)*sin(2*x)+9/10*exp(-
x)*cos(2*x)
```

apabila digambarkan/diplot :

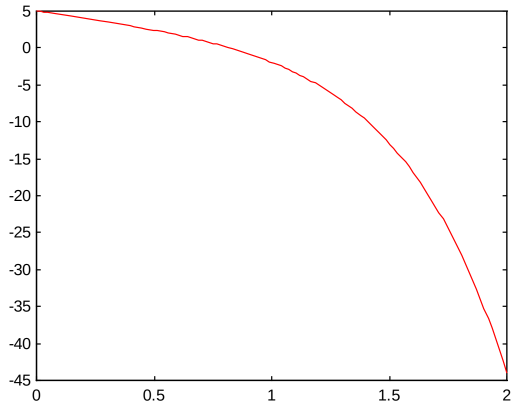
```
fplot(y,[0 20])
```




persamaan diferensial untuk orde ketiga :
$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4$
dengan y''(0) = 1, y'(0) = -5, dan y(0) = 5

```
y=dsolve('D3y-2*D2y-Dy+2*y=2*x^2-6*x+4','D2y(0)=1','Dy(0)=-
5','y(0)=5')
y =
-2*x+3+x^2+exp(x)-exp(2*x)+2*exp(-x)
```

```
fplot(y,[0 2])
```




**BAB 2. TRANSFORMASI LAPLACE**

**2.1 Pengertian Transformasi**

- **2.1.1 Latar Belakang Penggunaan Transformasi**
- **2.1.2 Contoh Sederhana Penggunaan Transformasi**

**2.2 Pengertian Transformasi Laplace dan inverse Transformasi Laplace**

- **2.2.1 Latar Belakang Penggunaan Transformasi Laplace**
- **2.2.2 Mengubah Persamaan Deferensial ke kawasan S**
- **2.2.3 Transformasi Laplace Beberapa Fungsi Sederhana**

**2.3 Beberapa Sifat Transformasi Laplace**

- **2.3.1 Linearitas**
- **2.3.2 Pergeseran dalam s**
- **2.3.3 Pergeseran dalam S dan inversenya**
- **2.3.4 Konvolusi**
- **2.3.5 Integrasi**
- **2.3.6 perkalian dengan konstanta**
- **2.3.7 scaling**

**2.4 Menyelesaikan Partial Fraction dari Transformasi Laplace**

- **2.4.1. Metode Cover Up**
- **2.4.2. Metode Substitusi**
- **2.4.3. Metode Equate Coefficient**

**2.5 Transformasi Laplace Untuk Mencari Solusi Persamaan Deferensial Biasa**

**2.6 Contoh Soal & Aplikasi Transformasi Laplace**

**2.7 Menyelesaikan Transformasi Laplace Dengan Bantuan Matlab**

# BAB 2. TRANSFORMASI LAPLACE

## 2.1 Pengertian Transformasi

Transformasi adalah teknik atau formula matematis yang digunakan untuk mengubah representasi persamaan matematika dari satu bentuk ke bentuk representasi yang lain. Adanya transformasi mengharuskan juga adanya inverse transformasi, yang melakukan hal yang sebaliknya.

### 2.1.1 Latar Belakang Penggunaan Transformasi

Transformasi diperlukan sebagai alat bantu untuk memecahkan persoalan matematika yang rumit. Penggunaan transformasi dan inversenya dapat diilustrasikan pada gambar di bawah ini.


**Gambar.** Penggunaan Transformasi dan Inversenya

Terdapat beberapa tipe/jenis transformasi yang digunakan, tergantung pada persamaan matematika yang ingin dicari penyelesaiannya. Beberapa contoh transformasi yang digunakan dalam bidang teknik antara lain :

1. Transformasi Laplace
2. Transformasi Z
3. Trasnformasi Fourier
4. Trasnformasi Wavelet
5. DLL

Dalam hal ini, Transformasi Laplace digunakan untuk memecahkan Persamaan Differensial Biasa (ODE, *Ordinary Differential Equation*).

### 2.1.2 Contoh Sederhana Penggunaan Transformasi

Contoh sederhana pemakaian transformasi dalam matematika adalah penggunaan logaritma dan inverse-nya, yaitu fungsi perpangkatan. Apabila diinginkan untuk menghitung hasil dari : 1234 x 5678 tanpa menggunakan kalkulator, namun dengan menggunakan tabel logaritma, maka solusi hasil perhitungan 1234 x 5678 dapat dicari dengan mudah.

Langkah pertama adalah mengubah/lakukan transformasi perhitungan 1234 x 5678 menjadi logaritma basis 10. Langkah ke dua adalah menyelesaikan kalkulasi algoritmanya. Langkah terakhir adalah mencari inverse logaritma ( $10^x$ ), sehingga hasil akhir dari inverse logaritma ini adalah solusi dari 1234 x 5678. Apabila dikerjakan menjadi :

*Langkah ke-1*. Ubah/transformasi ke logaritma basis 10

1234 x 5678 => Log (1234 x 5678)

*Langkah ke-2*. Selesaikan kalkulasi algoritma.

Log (1234) + Log (5678) = 3,0913 + 3,7542

= 6,8455

*Langkah ke-3*. Gunakan inverse transformasi untuk mencari solusi dari 1234 x 5678. Dalam hal ini, inverse transformasinya adalah : $10^x$, sehingga :

6,8455 => $10^{6,8455}$

= 7.006.482

Dengan menggunakan kalkulator, didapatkan jawaban eksak dari 1234 x 5678 = 7.006.652. Tampak bahwa jawaban yang didapat dengan menggunakan transformasi logaritma (dan inverse logaritma) mendekati jawaban eksaknya.

Perhitungan menggunakan transformasi Laplace dapat dilakukan secara langsung melalui penggunaan formula/rumus transformasi, dan dengan menggunakan bantuan tabel Tranformasi Laplace. Pada tabel telah dicantumkan Transformasi Laplace dari bentuk-bentuk umum Persamaan Differensial Biasa yang sering digunakan. Penggunaan tabel Transformasi Laplace ini memudahkan pencarian solusi, karena tidak diperlukan kalkulasi Transformasi Laplace dengan menggunakan rumus transformasi.

## 2.2 Pengertian Transformasi Laplace

Transformasi Laplace *Y* (*s*) dari fungsi *y(t)*, untuk t > 0 adalah :

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} y(t)dt$$

Transformasi Laplace digunakan untuk mengubah fungsi *y*(*t*) yang berada dalam kawasan waktu ke kawasan s. Solusi dari persamaan diferensial didapat dengan mengubah persamaan diferensial (yang merupakan fungsi waktu) dari kawasan waktu ke kawasan s dengan menggunakan transformasi laplace, sebagaimana ditunjukkan pada gambar di bawah.


Gambar. Penggunaan Transformasi Laplace dan Inversenya

Rumus Tranformasi Laplace di atas, apabila digunakan secara langsung pada permasalahan. maka akan seringkali dijumpai kesulitan dalam kalkulasinya, sehingga dianjurkan untuk menggunakan bantuan tabel transformasi laplace. Penggunaan tabel transformasi laplace menghindarkan dari rumitnya perhitungan transformasi.

### 2.2.1 Latar Belakang Penggunaan Transformasi Laplace

Adapun Latar belakang penggunaan Transformasi Laplace adalah :

1. Solusi Persamaan Diferensial Biasa Linear Homogen melibatkan bentuk eksponensial yang relatif cukup sulit untuk dikerjakan
2. Transformasi Laplace dapat digunakan untuk mengubah persamaan diferensial menjadi bentuk persamaan aljabar,sehingga mengurangi kerumitan penggunaan bentuk eksponensial menjadi bentuk ekspresi persamaan aljabar
3. Solusi persamaan dalam bentuk aljabar dapat ditulis sebagai penjumlahan tiap-tiap komponennya dengan tiap komponen merupakan Transformasi Laplace dari bentuk eksponensial.

### 2.2.2 Mengubah Persamaan Diferensial ke kawasan S

Untuk melakukan transformasi laplace terhadap persamaan diferensial, maka harus diingat terlebih dahulu bahwa :

$$\frac{d\left[u \cdot v\right]}{dt} = u\frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt}v$$

$$\int u\frac{dv}{dt}dt = u \cdot v - \int \frac{du}{dt}vdt$$

Bila Transformasi Laplace adalah $:Y(s) = L\left\{y(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}y(t)dt$ , maka Transformasi Laplace dari turunan (*derivative*) pertama adalah : $L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{dy}{dt}dt$

jika $u$ adalah $e^{-st}$ dan $v$ adalah $y$, maka :

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\frac{dy}{dt}dt=\left[e^{-st}y\right]_0^\infty-\int_0^\infty \frac{de^{-st}}{dt}ydt$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=\left[e^{-st}y\right]_0^\infty-\int_0^\infty -se^{-st}ydt$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=\left[e^{-st}y\right]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}ydt$$

Jika diasumsikan bahwa pada saat $t\to\infty$ grafik $y(t)$ mengalami kenaikan cukup lambat dibanding dengan grafik $e^{-st}$, maka $e^{-st}y(t)\to 0$ untuk $t\to\infty$

Sehingga : $\Rightarrow\left[e^{-st}y\right]_0^\infty=0-e^0y(0)=-y(0)$

Bentuk di atas dapat disederhanakan menjadi : $L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=\left[e^{-st}y\right]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}ydt$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=-y(0)+sY(s)$$

Dari uraian di atas, maka Transformasi Laplace dari turunan pertama sebuah fungsi adalah : $L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=sY(s)-y(0)$ atau $L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=sL\left\{y(t)\right\}-y(0)$

Transformasi Laplace dari turunan kedua suatu fungsi juga dapat dicari dengan cara yang sama.

$$L\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}=s^2Y(s)-\frac{dy}{dt}(0)-sy(0)$$

Sedangkan transformasi Laplace dari turunan ke-n suatu fungsi adalah :

$$\left\{\frac{d^ny}{dt^n}\right\}=s^nY(s)-\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)-\ldots-s^{n-2}\frac{dy}{dt}(0)-s^{n-1}y(0)$$

**contoh 1.**

Ubah persamaan diferensial berikut dari kawasan t ke kawasan s dengan menggunakan metode Transformasi Laplace.

$L\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$, dengan $y(0)=1,\frac{dy}{dt}(0)=0$

***jawab:***

*Langkah ke-1*. Lakukan Transformasi Laplace

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} y(t)dt$$

$$L\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + y\right\} = L\{0\} \quad \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st}\left[\frac{d^2y}{dt^2} + y\right]dt = \int_0^\infty e^{-st}[0]dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st}\frac{d^2y}{dt^2}dt + \int_0^\infty e^{-st}ydt = 0$$

Gunakan secara langsung Transformasi Laplace untuk turunan kedua, maka didapatkan:

$$\left[s^2Y(s) - \frac{dy}{dt}(0) - sy(0)\right] + [Y(s)] = 0$$

susun kembali menjadi : $\left[s^2 + 1\right]Y(s) = \frac{dy}{dt}(0) + sy(0)$

*Langkah ke-2*. Cari Persamaan polinomial Y(s) dengan bantuan nilai awal

$$y(0) = 1, \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \left[s^2 + 1\right]Y(s) = 0 + s$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Yang perlu diingat adalah bentuk $L\{f(t)\} = F(s)$ merupakan Transformasi Laplace dari fungsi *f*(*t*).

### 2.2.3 Transformasi Laplace Beberapa Fungsi Sederhana

berikut adalah transformasi Laplace dari beberapa fungsi

1. Konstanta

   Transformasi Laplace dari sebuah konstanta *C* ( *y*(*t*) = *C* ), adalah :

   $L\{C\} = \int_0^\infty e^{-st}Cdt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}C\right]_0^\infty = 0 - \left[-\frac{C}{s}\right] = \frac{C}{s}$, sehingga $L\{C\} = \frac{C}{s}$

2. Transformasi Laplace fungsi *y(t)* = *t*

$$L\{t\}=\int_0^\infty e^{-st}t\,dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}t\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt \quad \Rightarrow L\{t\}=0-0+\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}$$

sehingga $L\{t\}=\frac{1}{s^2}$

3. Transformasi Laplace fungsi $y(t) = t^n$

$$L\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}t^n\right]_0^\infty+\int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}nt^{n-1}dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\}=-0+0+\frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}nt^{n-1}dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\}=\frac{n}{s}L\{t^{n-1}\}$$

dengan cara yang sama :

$$L\{t^{n-1}\}=\frac{n-1}{s}L\{t^{n-2}\}$$

$$L\{t^{n-2}\}=\frac{n-2}{s}L\{t^{n-3}\}$$

$$\vdots$$

$$L\{t^1\}=\frac{1}{s}L\{t^0\}$$

sehingga $L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$

4. Transformasi Laplace fungsi eksponensial, $y(t) = e^{at}$

$$L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$

$$\Rightarrow L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}=\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow L\{e^{at}\}=0-\left[-\frac{1}{s-a}e^{-0}\right]=\frac{1}{s-a}$$

, sehingga $L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$

5. Fungsi cosinus dan sinus

$$L\{\cos \omega t\} = L\left\{\frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\right\} \quad \Rightarrow L\{\cos \omega t\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + i\omega}$$

$$\Rightarrow L\{\cos \omega t\} = \frac{1}{2}\left[\frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{s - i\omega}{s^2 + \omega^2}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

sehingga $L\{\cos \omega t\} = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$

dengan cara yang sama, Transformasi Laplace dari fungsi sinus adalah : $L\{\sin \omega t\} = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Ringkasan Transformasi Laplace beberapa fungsi tersebut dapat ditulis dalam tabel berikut.

Tabel. Transformasi Laplace beberapa fungsi sederhana

| **Fungsi *y(t)*** | **Transformasi Laplace Y(s)** |
|---|---|
| $y(t) = C$ | $\dfrac{C}{s}$ |
| $y(t) = t$ | $\dfrac{1}{s^2}$ |
| $y(t) = t^n$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $y(t) = e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}$ |
| $y(t) = \cos \omega t$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $y(t) = \sin \omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |

## 2.3 Beberapa karakteristik Transformasi Laplace

Beberapa karakteristik Transformasi Laplace antara lain :

1. **Linearitas**

Jika $f(t)$ dan $g(t)$ adalah sebuah fungsi, dengan :

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad \text{dan}$$

$$G(s) = L\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

maka $L\{cf(t)\} = cF(s)$ dan $L\{af(t)+bg(t)\} = aF(s)+bG(s)$

2. **Pergeseran dalam S**

   Jika $F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$

Maka $L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt = F(s-a)$, sehingga $L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

3. **Pergeseran dalam S dan inversenya**

   Jika $L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$, maka $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} L^{-1}\{F(s)\} = e^{at} f(t)$

**contoh 2**. Gunakan sifat pergeseran dalam s untuk mecari Inverse Transformasi Laplace dari : $\dfrac{1}{(s-a)^2}$

***jawab :*** $F(s-a) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$ , $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$

sehingga $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} L^{-1}\{F(s)\}$, $\Rightarrow L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-a)^2}\right\} = e^{at} L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = e^{at} t$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2}\right\} = e^{at} t$$

4. **Teorema Konvolusi**

   Jika Transformasi Laplace dari fungsi *f*(*t*) dan *g*(*t*) adalah *F*(*s*) dan *G*(*s*), dengan

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad , G(s) = L\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

Maka :

$$\boxed{L\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s)}$$

yang disebut sebagai **integral konvolusi**. Jika inverse Transformasi Laplace dari *F*(*s*) dan *G*(*s*) adalah *f*(*t*) dan *g*(*t*), dengan : $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, dan $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$

maka

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \text{ atau } L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

***contoh 3***: Gunakan teorema konvolusi untuk mencari inverse Transformasi Laplace dari: $\frac{s}{(s^2+1)^2}$

***jawab*** : $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)}$ , $G(s)=\frac{1}{(s^2+1)}$ , maka $f(t)=\cos t$ , dan $g(t)=\sin t$

gunakan teorema konvolusi :

$L^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\}=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, maka $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\int_0^t \cos(t-\tau)\sin(\tau)d\tau$

ekspansikan menjadi :

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\int_0^t \cos(t-\tau)\sin(\tau)d\tau$$

$$=\cos t\int_0^t \cos\tau\sin\tau\ d\tau+\sin t\int_0^t \sin\tau\sin\tau\ d\tau$$

Apabila diselesaikan menjadi : $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\frac{1}{2}t\sin t$

**5. Integrasi**

Jika $F(s)=L\left\{f(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ , maka $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\int_0^t f(\tau)d\tau$

***contoh 4***: Gunakan teorema integrasi untuk mencari inverse dari : $\frac{1}{s(s+1)}$

***Jawab*** : $F(s)=\frac{1}{(s+1)}\Rightarrow f(t)=e^{-t}$ (dari tabel), maka :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+1})\right\}=\int_0^t e^{-\tau}d\tau=\left[-e^{-\tau}\right]_0^t$$

$$=-e^{-t}-(-1)=1-e^{-t}$$

## 2.4 Menyelesaikan Partial Fraction dari Transformasi Laplace

Di dalam penggunaannya, transformasi laplace seringkali melibatkan bentuk $\frac{Q(s)}{P(s)}$ dengan banyak fraksi, dimana $P(s)$ dan $Q(s)$ merupakan suku polinomial. Oleh karenanya, terlebih dahulu dipelajari bagaimana fraksi-fraksi yang terlibat/dihasilkan diubah ke fraksi pecahan (*partial fraction*) agar didapatkan solusi dari Persamaan

Differensial Biasa, Jadi, terlebih dahulu dipelajari bagaimana menggunakan partial fraction sebelum memecahkan Persamaan Differensial Biasa.

**Mengubah Fraction Menjadi Partial Fraction**

Jika :

$$\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{a_1}{(s-\alpha_1)}+\frac{a_2}{(s-\alpha_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(s-\alpha_n)}$$

dengan $P(s)=(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\ldots(s-\alpha_n)$

Maka terdapat 3 kemungkinan penyelesaian dari *P(s)*

a. *P(s)* akar-akarnya riil dan berbeda. Tuliskan masing-masing faktor *P(s)*, dan tambahkan koefisien yang sesuai (A, B, dst) pada bagian pembilang

Contoh :

1. $\frac{s+1}{s^2-4s+3}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s-3)}$

2. $\frac{1}{(s-2)(s+1)}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{B}{(s+1)}$

b. *P(s)* akar-akarnya riil dan sama, yaitu $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n$. Jika $\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{a_1}{(s-\alpha_1)^n}$

Maka uraikan menjadi :

$$\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{a_1}{(s-\alpha_1)}+\frac{a_2}{(s-\alpha_1)^2}+\ldots\frac{a_k}{(s-\alpha_k)}$$
$$+\frac{a_{k+1}}{(s-\alpha_{k+1})}+\ldots+\frac{a_n}{(s-\alpha_n)}$$

Contoh :

$$\frac{1}{s^2+6s+9}=\frac{1}{(s+3)^2}=\frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{(s+3)^2}$$

c. Jika akar-akarnya merupakan bilangan pasangan bilangan kompleks

$\alpha_1=a+bi,\alpha_2=a-bi,$

$$\Rightarrow\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{A+Bs}{(s+a)^2+b^2}+\frac{a_3}{(s-\alpha_3)}+\ldots+\frac{a_n}{(s-\alpha_n)}$$

Contoh :

$$\frac{1}{s^3+s^2-2}=\frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$
$$=\frac{1}{(s-1)(s-1-i)(s-1+i)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B+Cs}{(s-1)^2+1}$$

Dari pemecahan fraksi di atas, perlu dicari nilai dari koefisien A,B,C dan seterusnya. Terdapat 3 cara untuk menyelesaikan parsial fraksi di atas, yaitu :

1. *Cover up Rule*
2. Substitusi
3. *Equate coefficient*

## 1. Metode *Cover Up*

Langkah penyelesaian parsial fraksi dengan *Cover Up* adalah :

a. Kalikan dengan s-$\alpha_i$

**b.** Subtitusikan s = $\alpha_i$

**1. Jika *P(s)* akar-akarnya riil dan berbeda.**

**contoh 5.** Cari Parsial fraksi dari : $\dfrac{s+1}{(s-1)(s-3)}$

***jawab* :**

$$\frac{s+1}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-3)}$$

$$(s-1) \Rightarrow \frac{(s+1)}{(s-3)} = A + (s-1)\frac{B}{(s-3)}$$

kalikan dengan (s-1), substitusikan s = 1,

$$s = 1 \Rightarrow \frac{2}{-2} = A \Rightarrow A = -1$$

Selanjutnya kalikan dengan (s – 3)

$$\frac{s+1}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-3)}$$

$$\times s - 3 \Rightarrow \frac{(s+1)}{(s-1)} = (s-3)\frac{A}{(s-1)} + B$$

substitusikan s = 3,

$$s = 3 \Rightarrow \frac{4}{2} = B \Rightarrow B = 2$$

Maka diperoleh : $\dfrac{s+1}{(s-1)(s-3)} = -\dfrac{1}{(s-1)} + \dfrac{2}{(s-3)}$

**Contoh 6.** Cari Parsial fraksi dari : $\dfrac{1}{s(s+1)}$

***Jawab***: $\dfrac{1}{s(s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{(s+1)}$

Untuk mencari nilai A, kalikan persamaan di atas dengan s, dan subtitusikan nilai s = 0

sehingga menjadi : $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)}$

$\times s: \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(s+1)} = A + s\frac{B}{(s+1)}$

$s = 0: \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1} = A + 0 \Rightarrow A = 1$

Untuk mencari nilai B, kalikan dengan (*s* + 1) dan subtitusikan nilai *s* = -1

$\times(s+1): \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s} = (s+1)A + B$

$s = -1: \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-1} = 0 + B \Rightarrow B = -1$

Sehingga bentuk parsial fraksinya adalah :

$$\boxed{\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}}$$

**2. Jika *P(s)* akar-akarnya riil dan sama**

**contoh 7**. Cari Parsial fraksi dari : $\frac{s^2+3s+4}{(s+1)^3}$

***jawab* :** $\frac{s^2+3s+4}{(s+1)^3} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$

untuk mencari nilai C, kalikan dengan $(s + 1)^3$

$\Rightarrow s^2+3s+4 = A(s+1)^2 + B(s+1) + C$, substitusikan s = -1

$\Rightarrow 1-3+4 = C, \Rightarrow C = 2$

Untuk mencari nilai *A* dan *B*, digunakan metode substitusi. Ambil *s* = 0 dan subtitusikan ke persamaan.

$\Rightarrow \frac{0+0+4}{1} = \frac{A}{1} + \frac{B}{1} + \frac{C}{1} \Rightarrow 4 = A + B + C$. Subtitusikan C =2 sehingga

2 = *A* + *B*,

ambil s = 1: $\Rightarrow \frac{1+3+4}{2^3} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2^2} + \frac{C}{2^3} \Rightarrow 1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{C}{8}$, kalikan dengan 8 menjadi :

$\Rightarrow 8 = 4A + 2B + C,$ substitusikan C =2

$\Rightarrow 6 = 4A + 2B,$

apabila diselesaikan akan didapatkan : A = 1, B = 1, C = 2.

$$\frac{s^2+3s+4}{(s+1)^3}=\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^3}$$

**3. Jika *P(s)* akar-akarnya kompleks**

**contoh 8**. Cari parsial fraksi dari : $\frac{1}{(s-2)^2+(s^2+1)}$

***jawab*** **:** karena $P(s)$ mengandung ($s^2$ + 1), maka berikan koefisien $Cs + D$ pada bagian pembilang.

$$\frac{1}{(s-2)^2(s^2+1)}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)}$$

$$(s-2)^2 \Rightarrow \frac{1}{(s^2+1)}=(s-2)A+B+(s-2)^2\frac{Cs+D}{(s^2+1)}$$

$$s=2 \Rightarrow \frac{1}{(4+1)}=B \Rightarrow B=\tfrac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(s-2)^2(s^2+1)}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{1}{5(s-2)^2}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)}$$

Untuk mencari nilai koefisien yang lain (A,C dan D), maka digunakan metode substitusi

$$\frac{1}{(s-2)^2(s^2+1)}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{1}{5(s-2)^2}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)}$$

$$s=0 \Rightarrow \frac{1}{(0-2)^2(0^2+1)}=\frac{A}{(0-2)}+\frac{1}{5(0-2)^2}+\frac{D}{(0^2+1)}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{4}=-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{20}+D \Rightarrow -5A+10D=2$$

Untuk

$$s=1 \Rightarrow \frac{1}{(1-2)^2(1^2+1)}=\frac{A}{(1-2)}+\frac{1}{5(1-2)^2}+\frac{C+D}{(1^2+1)}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}=-A+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}D \Rightarrow -10A+5C+5D=3$$

Untuk

$$s=3 \Rightarrow \frac{1}{(3-2)^2(3^2+1)}=\frac{A}{(3-2)}+\frac{1}{5(3-2)^2}+\frac{3C+D}{(3^2+1)}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{10}=A+\tfrac{1}{5}+\tfrac{3}{10}C+\tfrac{1}{10}D \Rightarrow 10A+3C+D=-1$$

Sehingga : $\Rightarrow \frac{1}{(s-2)^2(s^2+1)}=-\frac{4}{25(s-2)}+\frac{1}{5(s-2)^2}+\frac{4s+3}{25(s^2+1)}$

## 2. Metode Subtitusi

Jika Parsial fraksi adalah : $\boxed{\frac{Q(b_i)}{P(b_i)}=\frac{a_1}{(b_i-\alpha_1)}+\frac{a_2}{(b_i-\alpha_2)}+\ldots+\frac{a_n}{(b_i-\alpha_n)}}$

Maka lakukan :

1. Subtitusikan s = b$i$, dengan $i$ = 1, 2, ..., n
2. pecahkan nilai $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$

**Contoh 9**. Cari nilai koefisien A dan B pada : $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)}$

***jawab* :**

Untuk $s$ = 1, $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{A}{1} + \frac{B}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = A + \frac{1}{2}B$

Untuk $s$ = 2, => $\frac{1}{6} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = A + \frac{2}{3}B$

(kurangkan persamaan 1 dan 2 ), Maka didapatkan : $\frac{1}{6} = -\frac{B}{6} \Rightarrow B = -1 \Rightarrow A = 1$

maka

$$\boxed{\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}}$$

**Contoh 10**. Tentukan nilai koefisin A, B dan C pada : $\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s+1)}$

***Jawab*** :

Gunakan aturan Cover Up

$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s+1)}$, kalikan dengan $s^2$, dan subtitusikan nilai s = 0 sehingga

$$\frac{1}{(s+1)} = As + B + \frac{Cs^2}{(s+1)} \quad \Rightarrow \frac{1}{(0+1)} = B \Rightarrow B = 1$$

untuk mendapatkan nilai C, kalikan dengan ($s$ + 1)

$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s+1)}$ substitusikan $s$ = -1.

$$\frac{1}{s^2} = \frac{A(s+1)}{s} + \frac{B(s+1)}{s^2} + C \quad \Rightarrow \frac{1}{(-1)^2} = C \Rightarrow C = 1$$

Oleh karenanya telah kita dapatkan : $\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s+1)}$

Untuk mencari nilai A, maka kita substutusikan nilai s yang mudah dikalkulasi. Ambil s = 1, maka : $\frac{1}{1^2(1+1)} = \frac{A}{1} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1+1)} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = A + 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow A = -1$

Persamaan Parsial fraksi yang kita dapatkan oleh karenanya adalah

$$\boxed{\frac{1}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s+1)}}$$

## 3. Metode *Equate Coefficient*

Langkah mengerjakan parsial fraksi dengan metode ini adalah :

1. Kalikan dengan P(s) dengan sehingga menjadi bentuk :
2. Samakan koefisien s di ruas kanan persamaan dengan di ruas kiri.

**contoh 11.** Gunakan metode *equate coefficient* untuk mencari nilai koefisien A dan B pada : $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)}$

***jawab*** :

1. Kalikan dengan $s(s + 1)$, $\Rightarrow 1 = A(s+1) + Bs$

$1 = As + Bs + A$, $\quad$ => $1 = (A+B)\, s + A$

2. Untuk koefisien $s^1$ : A+B = 0
3. Untuk koefisien $s^0$ : A = 1, sehingga B = -1

**contoh 12**. Gunakan metode equate coefficient untuk mencari nilai koefisien A, B dan C pada : $\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)}$

***jawab* :**

1. kalikan dengan $(s + 1)(s^2 + 1)$, sehingga menjadi :

$$\Rightarrow 1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)s^2 + (B+C)s + (A+C)$$

2. penyamaan koefisien s

untuk $s^2$ => 0 = A + B,

untuk $s^1$ => 0 = B + C,

untuk $s^0$ => 1 = A + C

maka didapatkan : $\Rightarrow A = \frac{1}{2},\ \ B = -\frac{1}{2},\ \ C = \frac{1}{2}$

Contoh 8 dapat juga dikerjakan dengan menggunakan metode *Equate Coefficient* sebagai berikut :

$\frac{1}{(s-2)^2(s^2+1)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)}$, kalikan dengan (s - 2)2(s2 + 1)

$$\Rightarrow 1 = (s-2)(s^2+1)A + B(s^2+1) + (s-2)^2(Cs+D)$$

sehingga $\Rightarrow 1 = As^3 - 2As^2 + As - 2A + Bs^2 + B + (s^2 - 4s + 4)(Cs+D)$

$$\Rightarrow 1 = As^3 - 2As^2 + As - 2A + Bs^2 + B + Cs^3 - 4Cs^2 + 4Cs + Ds^2 - 4Ds + 4D$$
$$\Rightarrow 1 = (A+C)s^3 + (-2A+B-4C+D)s^2 + (A+4C-4D)s + (-2A+B+4D)$$

maka didapatkan :
$$\begin{aligned} s^3 &: A + C = 0 \\ s^2 &: -2A + B - 4C + D = 0 \\ s &: A + 4C - 4D = 0 \\ 1 &: -2A + B + 4D = 1 \end{aligned}$$

apabila diselesaikan, didapat : $A = -\frac{4}{25}, B = \frac{1}{5}, C = \frac{4}{25}, D = \frac{3}{25}$

## 2.5 Solusi Persamaan Differensial Biasa Menggunakan Transformasi Laplace

Persamaan Diffrensial Linear dengan bentuk :

$$a_k \frac{d^k y}{dt^k} + \ldots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

dapat diselesaikan dengan menggunakan transformasi laplace. Sebagai contoh, kita dapat menyelesaikan persamaan diferensial :

1. $\frac{d^2 y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
2. $\frac{d^2 y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = \sin(t), y(0) = 1, y'(0) = -1$

Pada contoh kasus 1 (Persamaan Differensial Linear Homogen), ubah persamaan diferensial dengan transformasi laplace :

$$L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = s^k Y(s) - \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}}(0) - \ldots - s^{k-2}\frac{dy}{dt}(0) - s^{k-1} y(0)$$

Yang juga dapat ditulis dalam bentuk :

$$L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = s^k Y(s) - s^{k-1} y(0) - s^{k-2}\frac{dy}{dt}(0) - \ldots - \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}}(0)$$

untuk memudahkan dalam mengingatnya. Perlu dicermati bahwa pangkat dari s menurun, sedangkan turunan y mengalami kenaikan. Selanjutnya, transformasikan ke kawasan s dengan transformasi laplace :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$
$$L(\frac{d^2 y}{dt^2}) - L(4\frac{dy}{dt}) + L(3y) = 0$$
$$\Rightarrow \{s^2 Y(s) - y'(0) - sy(0)\} - \{4sY(s) + 4y(0)\} + 3Y(s) = 0$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 0 \Rightarrow s^2 Y(s) - s - 4sY(s) + 4 + 3Y(s) = 0$$
$$\Rightarrow (s^2 - 4s + 3)Y(s) = s - 4$$

didapatkan :

$$(s^2-4s+3)Y(s)=s-4 \Rightarrow Y(s)=\frac{s-4}{(s^2-4s+3)}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s-4}{(s-1)(s-3)}$$

Dari bentuk ini, kita ubah bagian fraksinya : $Y(s)=\dfrac{s-4}{(s-1)(s-3)}=\dfrac{A}{(s-1)}+\dfrac{B}{(s-3)}$

Kalikan dengan (*s* - 1) $\Rightarrow \dfrac{(s-4)}{(s-3)}=A+\dfrac{B(s-1)}{(s-3)}$ , substitusi s = 1, $\Rightarrow \dfrac{(1-4)}{(1-3)}=A+0$

$$\Rightarrow A=\frac{3}{2}$$

kalikan dengan (s – 3), substitusi s = 3, untuk mendapatkan koefisien B.

$\Rightarrow \dfrac{(s-4)}{(s-1)}=\dfrac{A(s-3)}{(s-1)}+B$, s = 3, $\Rightarrow \dfrac{(3-4)}{(3-1)}=0+B$, maka $B=-\dfrac{1}{2}$

sehingga parsial fraksinya menjadi:

$$Y(s)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{(s-1)}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(s-3)}$$

untuk mencari solusi Persamaan Deferensial asal, ubah *Y*(*s*) dari kawasan s ke kawasan t menggunakan inverse transformasi dengan bantuan tabel.

$$Y(s)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{(s-1)}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(s-3)}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{Y(s)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{3}{2}\times\frac{1}{(s-1)}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(s-3)}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\times L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}-\frac{1}{2}\times L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{3}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{3t}$$

Pada contoh kasus ke-2 (Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen) :

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=\sin(t)$$

$$L(\frac{d^2y}{dt^2})-L(4\frac{dy}{dt})+L(4y)=L\{\sin(t)\}$$

Langsung kita ubah ke kawasan s dengan transformasi laplace :

$$\Rightarrow \{s^2Y(s)-y'(0)-sy(0)\}-\{4sY(s)+4y(0)\}+4Y(s)=L\{\sin(t)\}$$

Dengan kondisi

$y(0)=1, y'(0)=-1$

$$\Rightarrow s^2Y(s)+1-s-4sY(s)+4+4Y(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow (s-2)^2Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+s-5$$

Sehingga bentuk Y(s) nya adalah :

$$(s-2)^2Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+s-5$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s-2)^2(s^2+1)}+\frac{s-5}{(s-2)^2}$$

Gunakan partial fraction untuk mengubah $Y(s)$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-2)^2(s^2+1)}+\frac{s-5}{(s-2)^2}\Rightarrow\frac{A}{(s-2)}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)}+\frac{E}{(s-2)}+\frac{F}{(s-2)^2}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\left(\frac{4}{25}\times\frac{1}{(s-2)}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{4s+3}{25(s^2+1)}\right)+\frac{s-5}{(s-2)^2}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\left(\frac{4}{25}\times\frac{1}{s-2}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{\left(s-2\right)^2}+\frac{4}{25}\times\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{25}\times\frac{1}{s^2+1}\right)+\left(\frac{1}{s-2}-3\frac{1}{\left(s-2\right)^2}\right)$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{29}{25}\times\frac{1}{s-2}-\frac{14}{15}\times\frac{1}{\left(s-2\right)^2}+\frac{4}{25}\times\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{25}\times\frac{1}{s^2+1}$$

Gunakan inverse transform untuk mendapatkan solusi akhir

$$Y(s)=\frac{29}{25}\times\frac{1}{s-2}-\frac{14}{15}\times\frac{1}{\left(s-2\right)^2}+\frac{4}{25}\times\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{25}\times\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{Y(s)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{29}{25}\times\frac{1}{s-2}-\frac{14}{15}\times\frac{1}{\left(s-2\right)^2}+\frac{4}{25}\times\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{25}\times\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{Y(s)\right\}=\frac{29}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-\frac{14}{15}L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-2\right)^2}\right\}+\frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{3}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow y=\frac{29}{25}e^{2t}-\frac{14}{15}te^{2t}+\frac{4}{25}\cos(t)+\frac{3}{25}\sin(t)$$

**Soal-soal**

1. $\dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\dfrac{A}{s+2}+\dfrac{B}{s+3}$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+8y=2 \quad y(0)=y'(0)=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \cos t \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

**DAFTAR PUSTAKA**

Ayres, Frank, JR,PhD, & Ault, JC, MSc, & Ratna, Lily, Dra. 1999: **Persamaan Diferensial dalam satuan SI metric** (seri buku schaum, teori dan soal-soal). Erlangga, Jakarta.

Kartono. 1994. **Penuntun Belajar Persamaan Diferensial**. Cetakan pertama, Andi Offset, Yogyakarta.

Spiegel, Murray, PhD. 1994. **Matematika Lanjutan Untuk Para Insinyur Dan Ilmuwan**. (alih bahasa : Drs. Koko Martono). Cetakan ketiga. Erlangga, Jakarta.

Croft, Anthony & Davidson, Robert & Hargreaves, Martin. 2001. **Engineering Mathematics, A Foundation For Electronic, Electrical, Communication and Systems Engineers**. Third edition. Pearson, Addison-Wesley. UK.