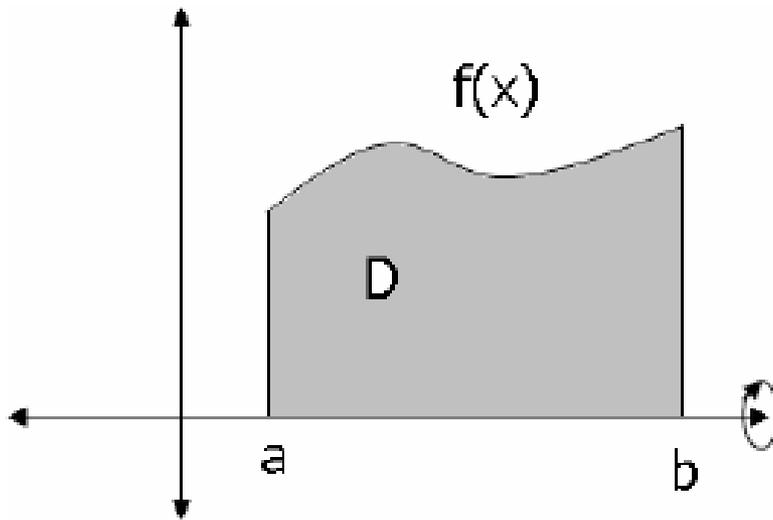


INTEGRAL

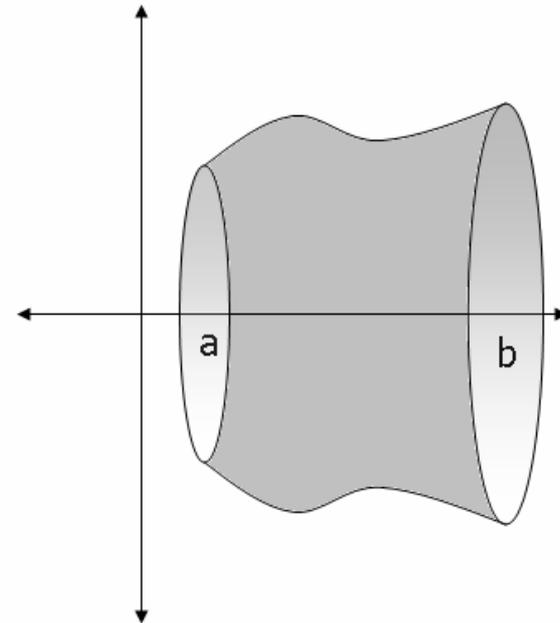
'MENGHITUNG VOLUME BENDA
PUTAR'

Metoda Cakram

- a. Daerah $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$
diputar terhadap sumbu x

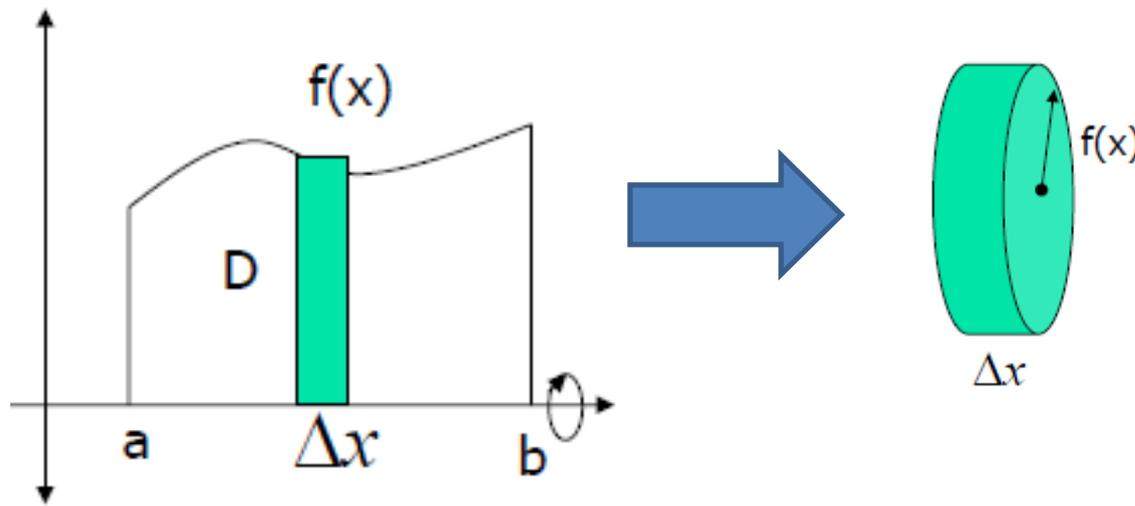


Daerah D



Benda putar

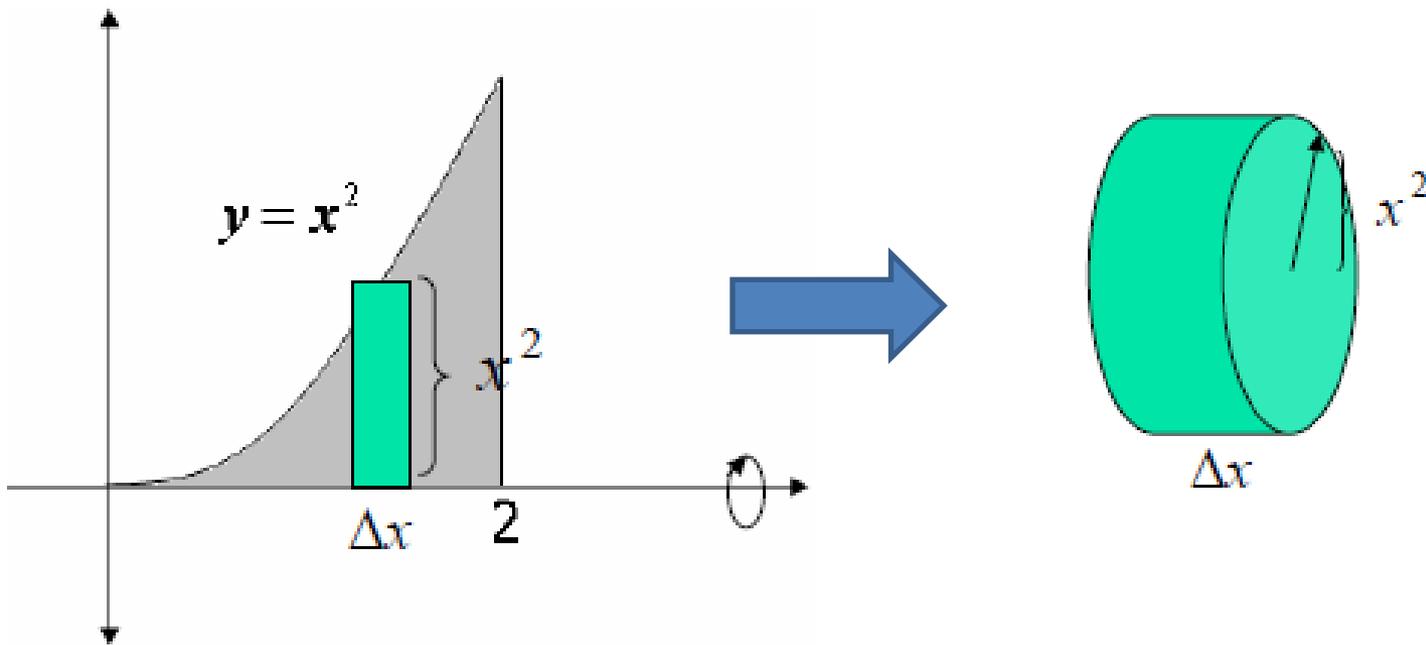
- Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δx dan jari-jari $f(x)$.



$$\Delta V \approx \pi f^2(x) \Delta x \quad \longrightarrow \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

- Contoh:

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x , dan garis $x=2$ diputar terhadap sumbu x



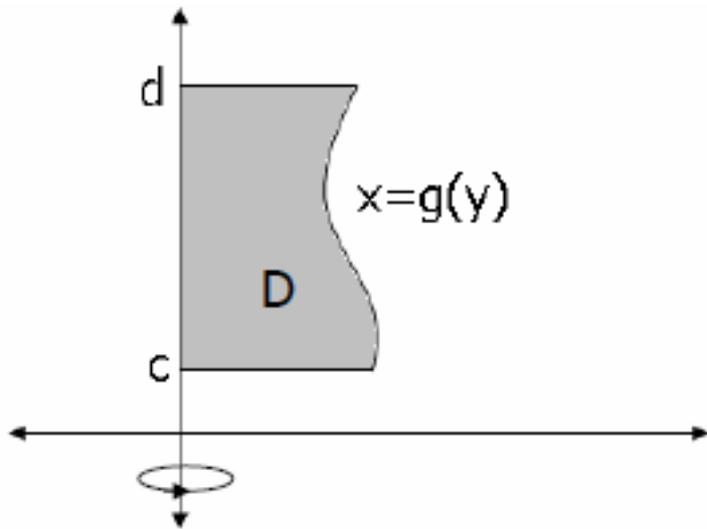
Jika irisan diputar terhadap sumbu x akan diperoleh cakram dengan jari-jari x^2 dan tebal Δx . Sehingga:

$$\Delta V \approx \pi (x^2)^2 \Delta x = \pi x^4 \Delta x$$

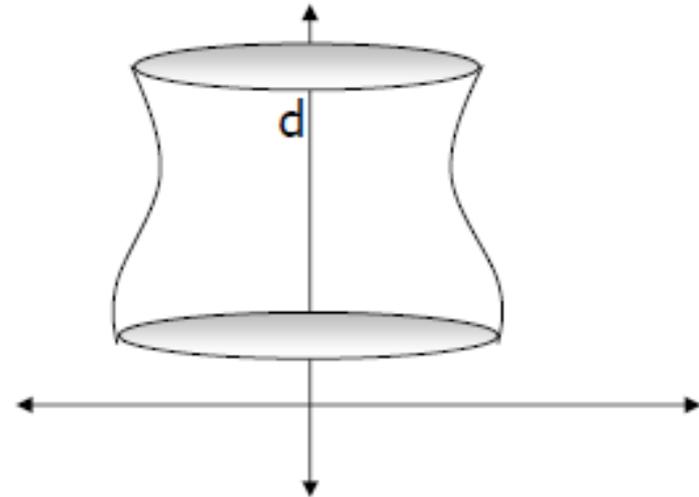
Volume benda putar:

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{5} \pi$$

b. Daerah $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq g(y)\}$
diputar terhadap sumbu y

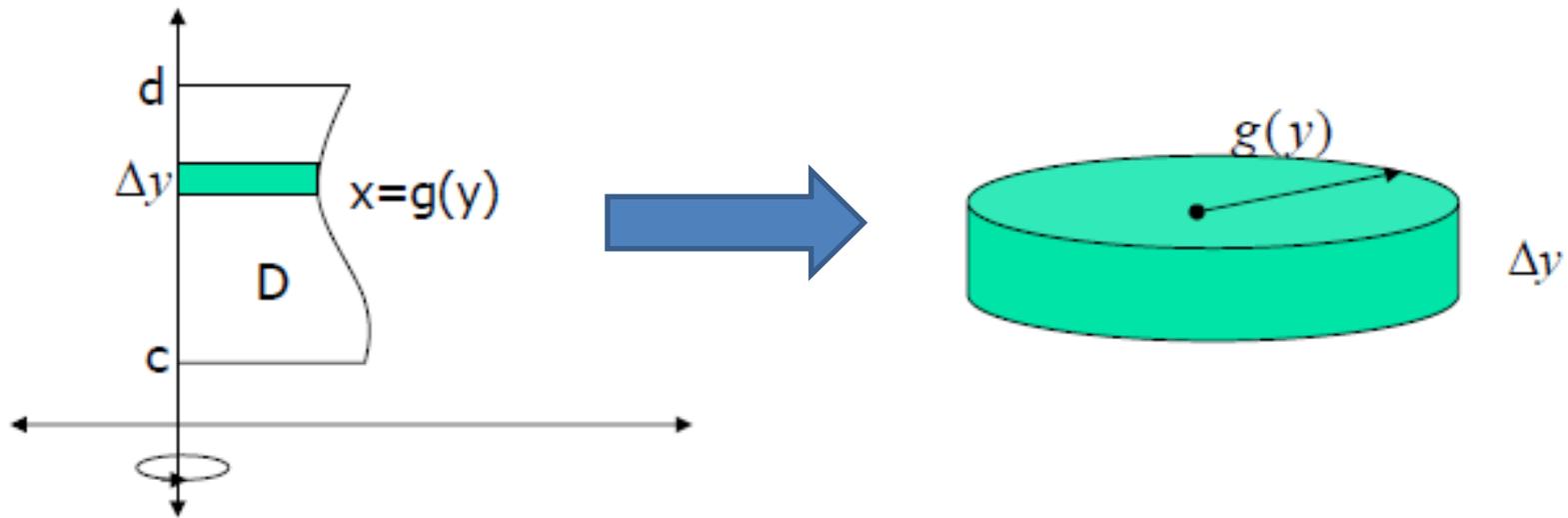


Daerah D



Benda putar

- Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $g(y)$ dan alas Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δy dan Jari-jari $g(y)$.
sehingga:

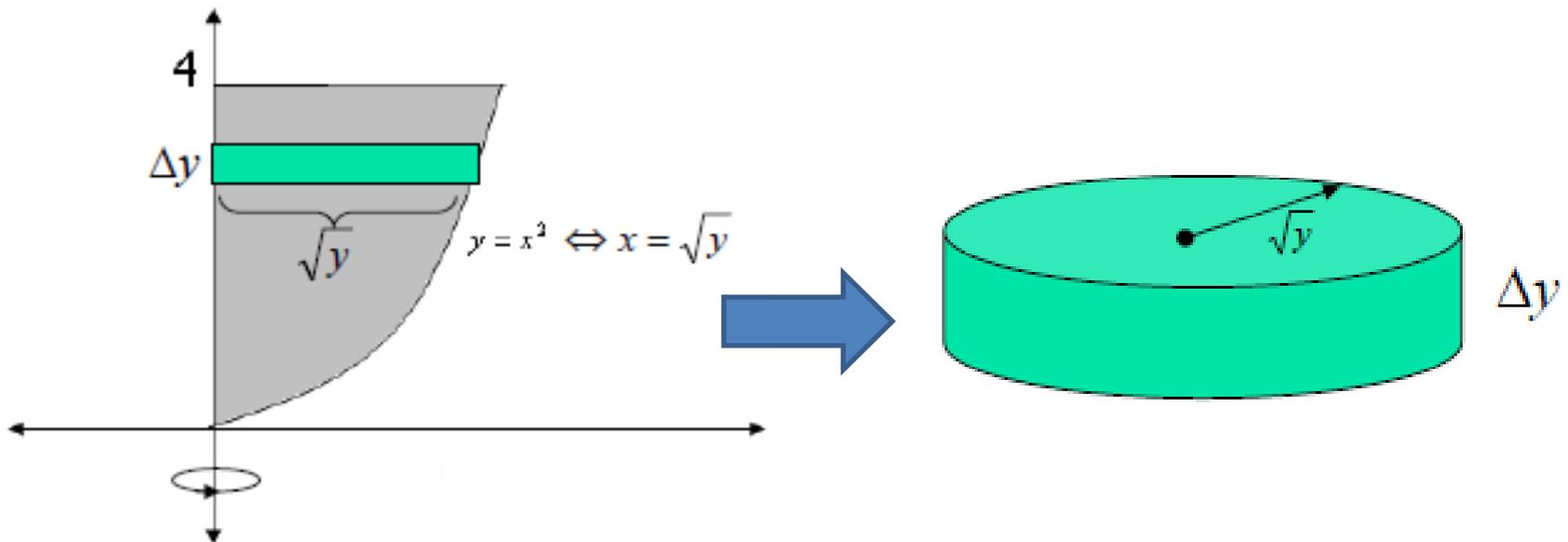


$$\Delta V \approx \pi g^2(y) \Delta y \quad \longrightarrow \quad V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$

- Contoh : Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$, garis $y = 4$, dan sumbu y diputar terhadap sumbu y

jawab:

Jika irisan dengan tinggi \sqrt{y} dan tebal Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh cakram dengan jari-jari \sqrt{y} dan tebal Δy





Sehingga

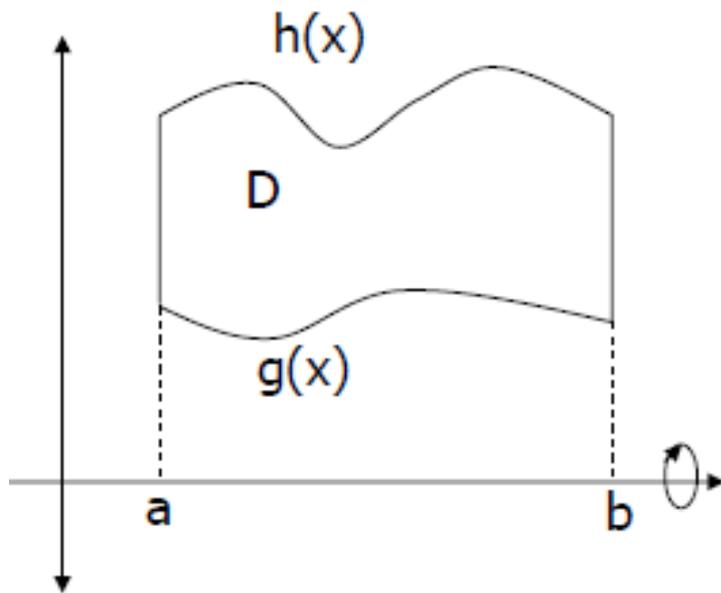
$$\Delta V = \pi(\sqrt{y})^2 \Delta y = \pi y \Delta y$$

Volume benda putar

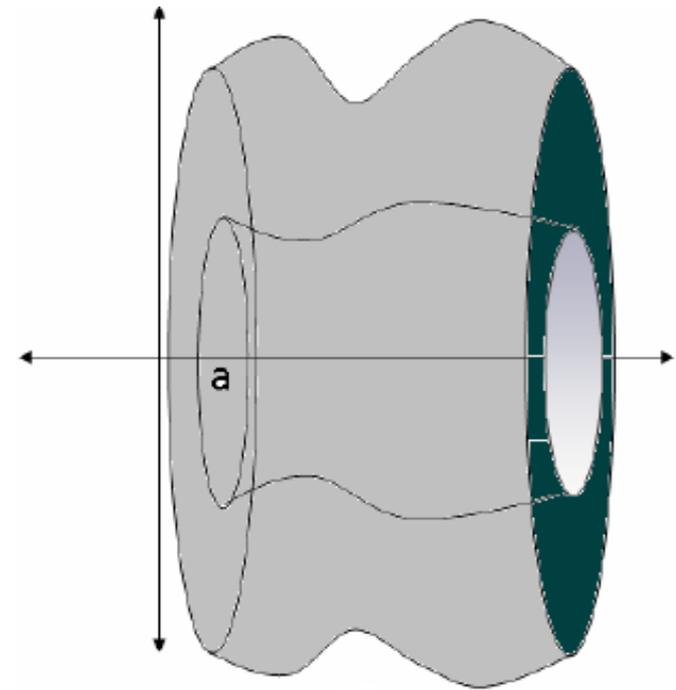
$$V = \pi \int_0^4 y dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^4 = 8\pi$$

Metode Cincin

- a. Daerah $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$
diputar terhadap sumbu x



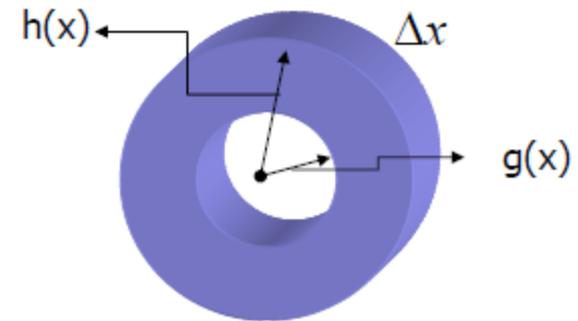
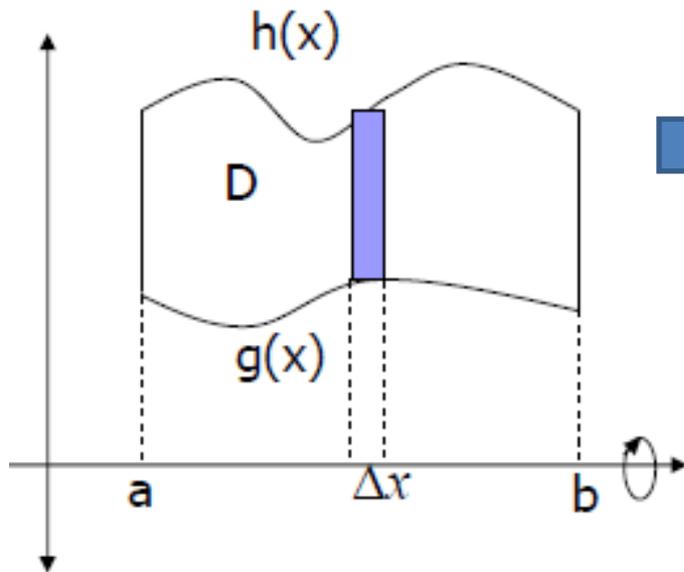
daerah D



benda putar

- Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $h(x)-g(x)$ dan alas diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cincin dengan tebal Δx dan jari –jari luar $h(x)$ dan jari-jari dalam $g(x)$.

sehingga:



$$\Delta V \approx \pi (h^2(x) - g^2(x)) \Delta x$$

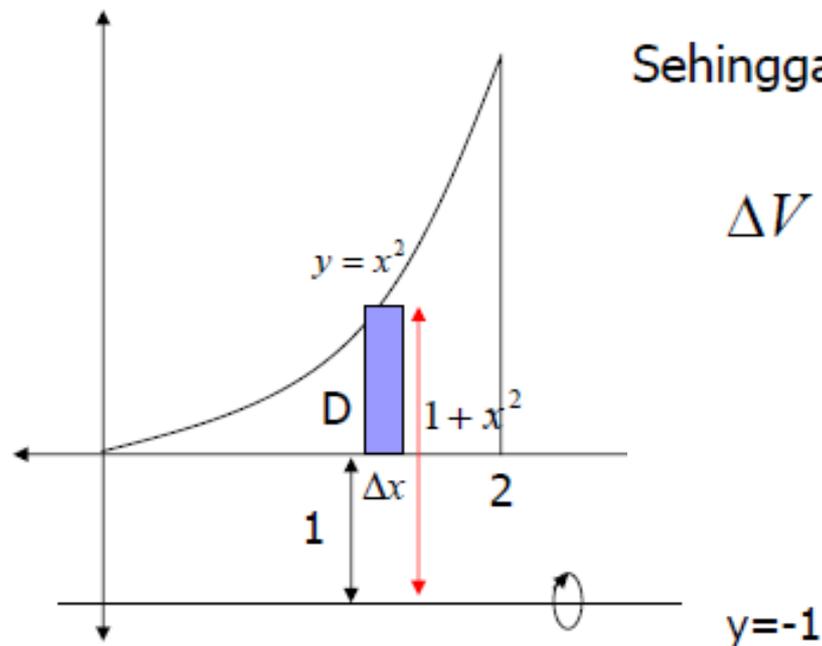


$$V = \pi \int_a^b (h^2(x) - g^2(x)) dx$$

- Contoh: Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis $x=2$ diputar terhadap garis $y=-1$

jawab:

Jika irisan diputar terhadap garis $y=-1$, akan diperoleh suatu cincin dengan Jari-jari dalam 1 dan jari-jari luar $1 + x^2$



$$\begin{aligned}
 \Delta V &= \pi((x^2 + 1)^2 - 1^2)\Delta x \\
 &= \pi(x^4 + 2x^2 + 1 - 1)\Delta x \\
 &= \pi(x^4 + 2x^2)\Delta x
 \end{aligned}$$



Volume benda putar :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 x^4 + 2x^2 dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^2 \right) \\ &= \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} \right) = \frac{186}{15} \pi \end{aligned}$$