MATRIKS

DEFINISI

- Matriks adalah susunan bilangan real atau bilangan kompleks (atau elemen-elemen) yang disusun dalam baris dan kolom sehinggga membentuk jajaran persegi panjang.
- Matriks memiliki *m* baris dan *n* kolom disebut matriks $m \times n$ → matriks yang memiliki orde $m \times n$

- Banyaknya baris dan kolom suatu matriks menentukan ukuran dari matriks tersebut, disebut ordo matriks

$$\text{matriks } A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Elemen matriks A tersebut berindeks rangkap, contoh: a_{23} menyatakan elemen matriks A pada baris ke 2 dan kolom ke 3
- matriks A berordo m x n ditulis A_{mxn}

Jenis-jenis matriks

Berdasarkan ordonya:

1. Matriks bujursangkar/persegi

   → matriks berordo n x n atau banyaknya baris = kolom (disebut juga matriks berordo n

   contoh:

$$B_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

2. Matriks baris

→ matriks berordo 1 x n atau hanya memiliki satu baris.

contoh: $C_{1x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

3. Matriks kolom

→ matriks yang hanya memiliki satu kolom

contoh:

$$E_{2x1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4. Matriks tegak

→ matriks berordo m x n dengan m > n

contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$, A berordo 3 X 2 sehingga matriks A tampak tegak

5. Matriks datar

→ matriks berordo m x n dengan m < n

contoh:

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$, F berordo 2 X 3 sehingga matriks F tampak datar

Berdasarkan elemen-elemen penyusunnya:

1. Matriks nol

→ matriks yang semua elemen penyusunnya adalah nol dan dinotasikan sebagai O

contoh: $O_{1x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, O_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Matriks diagonal

→ matriks persegi yang semua elemen di atas dan di bawahnya diagonal adalah nol dan dinotasikan sebagai D.

contoh: $D_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. Matriks skalar

→ matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya sama.

contoh:

$$D_{4x4} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Matriks simetrı

→ matriks persegi, yang setiap elemennya, selain elemen diagonal, adalah simetri terhadap diagonal utama

contoh:

$$F_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Matriks simetri miring

→ matriks simetri yang elemen-elemennya, selain elemen diagonal, saling berlawanan.

contoh:

$$G_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Matriks identitas/satuan

→ matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utamanya adalah 1 dan dinotasikan sebagai I.

contoh:

$$I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Matriks segitiga atas

→ matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya adalah nol.

contoh:

$$G_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

8. Matriks segitiga bawah

→ matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya adalah nol.

contoh:

$$H_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

9. Matriks transpose

→ matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen pada kolom atau sebaliknya.

transpose matriks A dilambangkan dengan A^T

contoh:

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ordo dari A^T adalah 2 x 3

OPERASI MATRIKS

<u>PENJUMLAHAN</u>

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ maka } A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = C$$

Jika A + B = C → maka elemen-elemen C diperoleh dari penjumlahan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu

$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk elemen C pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Akibatnya, matriks A dan B dapat dijumlahkan apabila kedua matriks memiliki ordo yang sama

Sifat-sifat penjumlahan matriks:

1. $A+B = B+A$ (hukum komutatif untuk penjumlahan)
2. $A+(B+C) = (A+B)+C$ (hukum asosiatif untuk penjumlahan)
3. $A+O = O+A = A$
4. $(A+B)^T = A^T + B^T$
5. Ada matriks B sedemikian sehingga $A + B = B + A = 0$ yaitu $B = - A$

PENGURANGAN

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{atau } A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Jika A – B = C → maka elemen-elemen C diperoleh dari pengurangan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu

$C_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ atau pengurangan dua matriks ini dapat dipandang sebagai penjumlahan : A + (-B)

PERKALIAN

1. Perkalian matriks dengan bilangan real (skalar)

   contoh:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } 4P = 4\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar

1) $a(B+C)=aB+aC$
2) $a(B-C) = aB-aC$
3) $(a+b)C = aC+bC$
4) $(a-b)C = aC-bC$
5) $(ab)C = a(bC)$
6) $(aB)^T = aB^T$

2. Perkalian dua matriks

dua matriks AB dapat dikalikan apabila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B.

jadi A_{mxn} B_{nxp} bisa didefinisikan, tapi $B_{nxp}A_{mxn}$ tidak dapat didefinisikan.

$$\underset{mxn}{A} \qquad \underset{nxp}{B} \qquad = \qquad \underset{mxp}{AB}$$

hasil kali dari matrik AB berordo mxp

Contoh:

1.

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{1x3}\,C_{3x1} = \begin{bmatrix} (6x4)+(8x7)+(7x2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{3x1}\,B_{1x3} = \begin{bmatrix} 2x6 & 2x8 & 2x7 \\ 5x6 & 5x8 & 5x7 \\ 4x6 & 4x8 & 4x7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 30 & 40 & 35 \\ 24 & 32 & 28 \end{bmatrix}$$

Hasil kalinya merupakan suatu matriks berordo 3 x 3

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{2x2} B_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1x1)+(2x0) & (1x0)+(2x2) & (1x1)+(2x0) \\ (3x1)+(4x0) & (3x0)+(4x2) & (3x1)+(4x0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Perhatikan hal-hal berikut ini :

1) Pada umumnya $AB \neq BA$ (tidak komutatif)

2) Apabila A suatu matriks persegi maka : $A^2 = A.A$; $A^3 = A^2 .A$:

$A^4 = A^3 . A$ dan seterusnya

3) Apabila AB = Bc maka tidak dapat disimpulkan bahwa B = C (tidak berlaku sifat penghapusan)

4) Apabila AB = 0 maka tidak dapat disimpulkan bahwa A=0 atau B =0

Sifat-sifat perkalian matriks dengan matriks :

1) $A(BC) = (AB)C$

2) $A(B+C) = AB + AC$

3) $(B+C)A = BA + CA$

4) $A(B-C) = AB-AC$

5) $(B-C)A = BA-CA$

6) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

7) $AI = IA = A$

DETERMINAN

- Determinan matriks adalah jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari A dan dinyatakan dengan det (A).
- Yang diartikan dengan sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari suatu matriks A adalah sebuah hasil perkalian elementer pada suatu kolom dengan +1 atau -1.

1. Determinan matriks berordo 2 x 2

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka det (A) = $|A|$ = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad–bc

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Contoh:

P = $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka det(P) = $|P|$ = $\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = (8x4)-(4x3) = 20

2. Determinan matriks berordo 3 x 3

untuk mencari determinan berordo 3 x 3 dapat digunakan 2 metode, yaitu:

(a) Metode sarrus

$$\text{Jika matriks } B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } \det(B) = |B| = \begin{vmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{vmatrix} = ptx + quv + rsw - rtv - qsx - puw$$

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari

$$\left[\begin{array}{ccc} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{array}\right] \begin{array}{cc} p & q \\ s & t \\ v & w \end{array}$$

Metode sarrus tidak berlaku bila matriks berordo 4 x 4 atau ordo yang lebih tinggi lagi

- Contoh:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \text{ maka } \det(Q) = |Q| \text{ adalah}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right.$$

$$= (2x3x9)+(4x5x7)+(6x1x8)-(6x3x7)-(2x5x8)-(4x1x9)$$

$$= 242-242 = 0$$

(b) Metode kofaktor

→ setiap elemen menghasilkan suatu kofaktor, yang tidak lain adalah minor dari elemen dalam determinan beserta **‘tanda tempatnya’**

→ minor suatu matriks A| dilambangkan dengan M_{ij} adalah matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-i dan elemen-elemen pada kolom ke-j

Contoh:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \text{ maka } M_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{6} \\ \cancel{1} & 3 & 5 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{6} \\ 1 & \cancel{3} & 5 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, M_{13} = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{6} \\ 1 & 3 & \cancel{5} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

M_{11}, M_{12}, dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke 1 dari matriks Q.

Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \left|M_{ij}\right| = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Untuk mencari det(A) dengan metode kofaktor cukup mengambil satu ekspansi saja yaitu ekspansi baris ke-1

Contoh:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

untuk mendapatkan det(Q) dengan metode kofaktor adalah mencari terlebih dahulu determinan-determinan minornya yang diperoleh dari ekspansi baris ke-1, yaitu

$\det(M_{11}) = -13$, $\det(M_{12}) = -26$, $\det(M_{13}) = -13$

$$\begin{aligned} |Q| &= 2(-13) - 4(-26) + 6(-13) \\ &= -26 + 104 - 78 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ADJOIN MATRIKS

- Adjoin matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut.
- Dilambangkan dengan adj A = $(k_{ij})^t$
- Contoh:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

telah diketahui dari hitungan sebelumnya bahwa k11 = - 13, k12 = -26 dan k13 = -13

$$K21 = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(-12) = 12 \qquad K31 = +\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = +(2) = 2$$

$$K22 = +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = +(-24) = -24 \qquad K32 = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(4) = 4$$

$$K23 = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(-12) = 12 \qquad K33 = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +(2) = 2$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 12 & 2 \\ 26 & -24 & -4 \\ -13 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$