

Pertemuan I

Mencari Akar dari Fungsi Transendental

Daftar Isi:

- 1.1 Tujuan Perkuliahan
 - 1.2 Pendahuluan
 - 1.3 Metoda Bisection
 - 1.3.1 Definisi
 - 1.3.2 Komputasi mencari akar
 - 1.3.3 Ilustrasi
 - 1.4 Metoda Newton-Raphson
 - 1.4.1 Definisi
 - 1.4.2 Komputasi mencari akar dengan Newton-Raphson
 - 1.4.3 Ilustrasi
 - 1.5 Latihan
 - 1.6 Kesimpulan
-

1.1 Tujuan Perkuliahan

Setelah mengikuti perkuliahan ini, mahasiswa mampu:

- Membuat solusi numerik pencarian akar dengan metoda Bisection
- Membuat solusi numerik pencarian akar dengan metoda Newton-Raphson

1.2 Pendahuluan

Solusi persamaan $f(x) = 0$ terdapat di bidang sains, engineering dan aplikasi lainnya. Jika $f(x)$ adalah sebuah polynomial dengan dua pangkat atau lebih, kita punya formula untuk menyelesaikannya. Tetapi, jika $f(x)$ adalah fungsi transcendental (fungsi yang tidak bisa diekspresikan dengan fungsi aljabar, contoh: fungsi trigonometri, exponensial, atau inversi dari keduanya), kita belum memiliki formula untuk mendapatkan solusi. Saat berhadapan dengan persamaan ini, kita memiliki metoda seperti Bisection, Newton-Raphson dan metoda “salah-posisi” (biasa juga disebut sebagai metoda regula falsi). Metoda-metoda tersebut menyelesaikan persamaan transcendental dengan menggunakan teori persamaan, yaitu: jika

$f(x)$ kontinu di interval (a,b) dan jika $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda, maka $f(x) = 0$ setidaknya akan memiliki satu akar real antara a dan b .

1.3 Metoda Bisection

Misalkan kita punya persamaan $f(x) = 0$ dimana akarnya berada di antara (a,b) , dan $f(x)$ adalah persamaan kontinu dan bisa berupa persamaan aljabar atau transcendental. Jika $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda, maka $f(x) = 0$ setidaknya akan memiliki satu akar real antara a dan b .

Anggap $f(a)$ positif dan $f(b)$ negatif, yang mengimplikasikan bahwa setidaknya satu akar berada antara a dan b . Kita asumsikan bahwa akarnya adalah $x_0 = (a + b)/2$. Cek tanda $f(x_0)$. Jika $f(x_0)$ negatif, akarnya berada di antara a dan x_0 . Jika $f(x_0)$ positif, maka akarnya berada di antara x_0 dan b . Sehingga, hasilnya adalah salah satu diantara ini:

$$x_1 = \frac{a+x_0}{2}, \text{ atau } x_1 = \frac{x_0+b}{2}$$

Jika $f(x_1)$ negatif, akarnya berada di antara x_0 dan x_1 , sehingga $x_2 = (x_0 + x_1)/2$. Dan seterusnya, jika $f(x_2)$ negatif, maka akarnya berada di antara x_0 dan x_2 , dan $x_3 = (x_0 + x_2)/2$ dan seterusnya. Ulangi proses x_0, x_1, x_2, \dots sampai limit konvergensinya adalah akar dari persamaan tersebut.

Langkah:

1. Cari a dan b dimana $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda dengan metoda trial dan error
2. Asumsikan akar awal sebagai $x_0 = (a + b)/2$
3. Jika $f(x_0)$ negatif, maka akarnya berada di antara a dan x_0 , dan buat akar berikutnya sebagai $x_1 = \frac{a+x_0}{2}$
4. Jika $f(x_0)$ positif, maka akarnya berada di antara x_0 dan b , dan buat akar berikutnya sebagai $x_1 = \frac{x_0+b}{2}$
5. Jika $f(x_1)$ negatif, akarnya berada di antara x_0 dan x_1 , dan buat akar berikutnya sebagai $x_2 = (x_0 + x_1)/2$
6. Jika $f(x_2)$ negatif, maka akarnya berada di antara x_0 dan x_2 , dan buat akar berikutnya sebagai $x_3 = (x_0 + x_2)/2$
7. Ulangi proses tersebut hingga dua angka berurutannya sama dan angka tersebut adalah akarnya

Ilustrasi:

Cari akar positif dari persamaan $x - \cos(x) = 0$ dengan metoda Bisection

Solusi:

$$f(x) = x - \cos(x)$$

$$f(0) = 0 - \cos(0) = 0 - 1 = \text{negatif}$$

$$f(0.5) = 0.5 - \cos(0.5) = -0.37758 = \text{negatif}$$

$$f(1) = 1 - \cos(1) = 0.42970 = \text{positif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.5 dan 1

$$\text{Buat tebakan akar: } x_0 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$$

$$f(0.75) = 0.75 - \cos(0.75) = 0.018311 = \text{positif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.5 dan 0.75

$$x_1 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

$$f(0.625) = 0.625 - \cos(0.625) = -0.18596 = \text{negatif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.625 dan 0.75

$$x_2 = \frac{0.625 + 0.75}{2} = 0.6875$$

$$f(0.6875) = 0.6875 - \cos(0.6875) = -0.085335 = \text{negatif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.6875 dan 0.75

$$x_3 = \frac{0.6875 + 0.75}{2} = 0.71875$$

$$f(0.71875) = 0.71875 - \cos(0.71875) = -0.033879 = \text{negatif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.71875 dan 0.75

$$x_4 = \frac{0.71875 + 0.75}{2} = 0.73438$$

$$f(0.73438) = 0.73438 - \cos(0.73438) = -0.0078664 = \text{negatif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.73438 dan 0.75

$$x_5 = \frac{0.73438 + 0.75}{2} = 0.74219$$

$$f(0.74219) = 0.74219 - \cos(0.74219) = 0.0051999 = \text{positif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.73438 dan 0.74219

$$x_6 = \frac{0.73438 + 0.74219}{2} = 0.73829$$

$$f(0.73829) = 0.73829 - \cos(0.73829) = -0.0013305 = \text{negatif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.73829 dan 0.74219

$$x_7 = \frac{0.73829 + 0.74219}{2} = 0.7402$$

$$f(0.7402) = 0.7402 - \cos(0.7402) = 0.0018663 = \text{positif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.73829 dan 0.7402

$$x_8 = \frac{0.73829 + 0.7402}{2} = 0.73925$$

$$f(0.73925) = 0.73925 - \cos(0.73925) = 0.00027593 = \text{positif}$$

Sehingga akarnya berada di antara 0.73829 dan 0.73925

$$x_9 = \frac{0.73829 + 0.73925}{2} = 0.73877$$

→ Akarnya adalah 0.7388

1.4 Metoda Newton-Raphson (atau metoda Newton)

Misalkan kita punya persamaan $f(x) = 0$ dimana akarnya berada antara (a,b) , dan $f(x)$ adalah persamaan kontinu dan bisa berupa persamaan aljabar atau transcendental. Jika $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda, maka $f(x) = 0$ setidaknya akan memiliki satu akar real antara a dan b .

Anggap $f(a)$ positif dan $f(b)$ negatif, yang mengimplikasikan bahwa setidaknya satu akar berada antara a dan b . Kita asumsikan bahwa akarnya adalah a atau b , yang mana diantara $f(a)$ atau $f(b)$ yang nilainya lebih dekat ke nol. Angka tersebut diasumsikan sebagai akar pertama. Kemudian kita iterasi proses tersebut dengan menggunakan persamaan berikut sampai perhitungannya konvergen.

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

Langkah:

1. Cari a dan b dimana $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda dengan metoda trial dan error
2. Asumsikan akar awal adalah $X_0 = a$, jika nilai $f(a)$ mendekati nol atau $X_0 = b$ jika nilai $f(b)$ mendekati nol
3. Cari X_1 dengan menggunakan persamaan

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)}$$

4. Cari X_2 dengan menggunakan persamaan

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)}$$

5. Cari X_3, X_4, \dots, X_n sampai nilai yang dihasilkan sama.

Ilustrasi:

Cari akar positif dari $f(x) = 2x^3 - 3x - 6 = 0$ dengan metoda Newton-Raphson, koreksi hingga lima angka di belakang koma

Solusi:

$$f(x) = 2x^3 - 3x - 6; f'(x) = 6x^2 - 3$$

$$f(1) = 2(1)^3 - 3(1) - 6 = -7 = \text{negatif}$$

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2) - 6 = 4 = \text{positif}$$

Jadi, ada akar di antara 1 dan 2. Karena angka 4 lebih dekat nilainya ke 0 dibandingkan -7, kita asumsikan bahwa akar pertama adalah 2.

$$X_0 = 2$$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = X_0 - \frac{2X_0^3 - 3X_0 - 6}{6X_0^2 - 3} = \frac{4X_0^3 + 6}{6X_0^2 - 3}$$

$$X_{i+1} = \frac{4X_i^3 + 6}{6X_i^2 - 3}$$

$$X_1 = \frac{4(2)^3 + 6}{6(2)^2 - 3} = \frac{38}{21} = 1.809524$$

$$X_2 = \frac{4(1.809524)^3 + 6}{6(1.809524)^2 - 3} = \frac{29.700256}{16.646263} = 1.784200$$

$$X_3 = \frac{4(1.784200)^3 + 6}{6(1.784200)^2 - 3} = \frac{28.719072}{16.100218} = 1.783769$$

$$X_4 = \frac{4(1.783769)^3 + 6}{6(1.783769)^2 - 3} = \frac{28.702612}{16.090991} = 1.783769$$

Karena X_3 dan X_4 bernilai sama, maka akarnya adalah 1.783769

1.5 Latihan

1. Cari akar positif dari persamaan berikut dengan metoda Bisection:
 - a. $3x = \cos(x) + 1$
 - b. $x^3 + 3x - 1$
 - c. $e^x - 3x$
 - d. $\cos(x) - 2x + 3$
2. Selesaikan persamaan berikut dengan metoda Newton-Raphson:
 - a. $x^4 - x - 9$
 - b. $x^3 + 2x^2 + 50x + 7$
 - c. $\cos(x) - xe^x$
 - d. $x - 2\sin(x)$

1.6 Kesimpulan

Pada kuliah kali ini kita sudah membahas:

1. Metoda Bisection untuk mencari solusi numerik dari persamaan aljabar dan transcendental
2. Formula iterative yang dinamakan metoda Newton-Raphson untuk mencari solusi persamaan aljabar dan transcendental