

Kuliah 2 Analisis Numerik: Metoda Numerik untuk Solusi Persamaan Linear

RIDA SNM

RIDA@UNY.AC.ID

Tujuan Perkuliahan

Membuat solusi numerik solusi persamaan linear dengan metoda Eliminasi Gauss

Membuat solusi numerik solusi persamaan linear dengan metoda Gauss-Jordan

Pendahuluan: Persamaan Linier

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2N}x_N = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3N}x_N = b_3$$

⋮

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + a_{M3}x_3 + \dots + a_{MN}x_N = b_M$$

- N variable yang tidak diketahui ($x_j, j=1, 2, \dots, N$)
- M persamaan
- Koefisien dalam persamaan ($a_{ij}, i=1, 2, \dots, M; j=1, 2, \dots, N$) dan koefisien hasil ($b_i, i=1, 2, \dots, M$) adalah parameter yang diketahui

Pendahuluan: Persamaan Linier

Persamaan linier dapat ditulis dalam bentuk matrix:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dimana A adalah koefisien matrix, dan b adalah vector sisi kanan:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ & \dots & & \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_M \end{bmatrix}$$

Jika jumlah koefisien yang tidak diketahui sama dengan jumlah persamaan, $N=M$, kita bisa mencari solusinya.

Metoda Eliminasi Gauss

- mencari solusi persamaan linear dengan membuat matrix triangular atas
- Terdiri dari dua tahap:
 1. Forward elimination (eliminasi maju), dan
 2. Backward substitution (substitusi mundur)

Metoda Eliminasi Gauss

Contoh: sistem 3 persamaan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \quad (4)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2 \quad (5)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3 \quad (6)$$

1. Kalikan pers. (4) dengan $-a_{21}/a_{11}$ kemudian tambahkan ke pers. (5):

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = d'_2$$

2. Kalikan pers. (4) dengan $-a_{31}/a_{11}$ kemudian tambahkan ke pers. (6):

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = d'_3$$

Metoda Eliminasi Gauss

Persamaannya menjadi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \quad (7)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = d'_2 \quad (8)$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = d'_3 \quad (9)$$

3. Kalikan pers. (8) dengan $-a'_{32}/a'_{22}$ dan tambahkan ke pers. (9), sehingga persamaannya menjadi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \quad (10)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = d'_2 \quad (11)$$

$$a''_{33}x_3 = d''_3 \quad (12)$$

→ Tahap forward elimination selesai

Metoda Eliminasi Gauss

Pers. (12) dapat digunakan untuk mencari x_3 secara langsung:

$$x_3 = d'_3 / a'_{33} \quad (13)$$

→ Tahap Backward Substitution dimulai:

Gunakan Pers. (12) dan (11) untuk mencari sisa koefisien yang belum diketahui:

$$x_2 = (d'_2 - a'_{23}x_3) / a'_{22} \quad (14)$$

$$x_1 = (d_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11} \quad (15)$$

Metoda Eliminasi Gauss

1. Forward Elimination:
$$a_{i,j} = a_{i,j} + a_{k,j} \left(-\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} \right), \quad [(j = k + 1, n), i = k + 1, n], k = 1, n - 1$$

$$d_i = d_i + d_k \left(-\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} \right), \quad (i = k + 1, n), k = 1, n - 1$$

2. Dapatkan x_N :

$$x_N = \frac{d_N}{a_{N,N}}$$

3. Backward Substitution:

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(d_i - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j \right), \quad i = n - 1, \dots, 1$$

Metoda Eliminasi Gauss

Contoh:

$$x + 2y + z = 3$$

$$2x + 3y + 3z = 10$$

$$3x - y + 2z = 13$$

Solusi:

$$z = 3, y = -1, x = 2$$

Metoda Gauss-Jordan

- mencari solusi persamaan linear dengan membuat matrix identitas

Metoda Gauss-Jordan

Contoh:

$$x + y - z = -2$$

$$2x - y + z = 5$$

$$-x + 2y + 2z = 1$$

Solusi:

Mulai dengan membuat sistem matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Metoda Gauss-Jordan

Kita sudah punya nilai 1 pada posisi diagonal dari kolom pertama.

→ Buat nilai 0 di bawah angka 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow$$

Baris 1 tidak diubah

(-2) kali baris 1 ditambahkan ke baris 2

baris 3 tidak diubah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Metoda Gauss-Jordan

Nilai 0 kedua dapat diperoleh dengan menambahkan baris 1 ke baris 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

baris 1 tidak diubah

baris 2 tidak diubah

baris 1 ditambahkan ke baris 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Metoda Gauss-Jordan

Pindah ke kolom kedua, kita ingin angka 1 ada di posisi diagonal (yang disana masih ada -3).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow$$

baris 1 tidak diubah

baris 2 dibagi dengan -3

baris 3 tidak diubah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Metoda Gauss-Jordan

Untuk memperoleh 0 di bawah 1, kita kalikan baris 2 dengan -3 dan menambahkannya ke baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow$$

baris 1 tidak diubah

baris 2 tidak diubah

(-3) kali baris 2 ditambahkan ke baris 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

Metoda Gauss-Jordan

Untuk memperoleh nilai 1 di posisi kolom ketiga baris ketiga, kita membagi baris tersebut dengan 4. baris 1 dan 2 tidak berubah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Metoda Gauss-Jordan

Sekarang kita ingin membuat nilai 0 di kolom ketiga baris kedua

tambah B3 ke B2 dan ganti B2 dengan jumlah tersebut

tambah B3 ke B1 dan ganti B1 dengan jumlah tersebut

baris 3 tidak diubah

Sisanya tinggal angka 1 di baris pertama kolom kedua

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Metoda Gauss-Jordan

Kalikan B2 dengan -1 dan
tambahkan hasilnya ke B1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \longrightarrow$$

-B2 + B1

B2 tidak berubah

B3 tidak berubah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Hasil Akhir

$$\begin{aligned}x &= 1, \\y &= -1 \\z &= 2.\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Latihan

Selesaikan persamaan berikut:

$$3x - 4y + 4z = 7$$

$$x - y - 2z = 2$$

$$2x - 3y + 6z = 5$$

