Pertemuan 3
Metoda Gauss-Jacobi dan Gauss-Seidel

Daftar Isi:

---

1. Tujuan Perkuliahan

Setelah mengikuti perkuliahan ini, diharapkan mahasiswa:

- Mengetahui prosedur metoda iterasi Gauss-Jacobi
- Dapat menyelesaikan sistem persamaan dengan menggunakan metoda Gauss-Jacobi

2. Pendahuluan

Perkuliahan sebelumnya telah membahas tentang metoda penyelesaian sistem persamaan aljabar linear dengan metoda langsung (tanpa iterasi, yaitu metoda eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan). Sekarang kita akan membahas beberapa metoda tidak langsung atau metoda iteratif. Metoda ini tidak selalu berhasil. Agar berhasil, setiap persamaan harus memenuhi satu syarat, yaitu: semua elemen diagonal melebihi elemen lain dalam persamaan tersebut. Kita akan membahas dua metoda iteratif, yaitu Gauss-Jacobi dan Gauss-Seidel.

3. Metoda Gauss-Jacobi

Tinjau sistem 3 persamaan dengan 3 variable yang tidak diketahui:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Metoda ini diterapkan hanya jika elemen diagonal lebih besar dari jumlah semua elemen pada persamaan tersebut, yaitu:

$$|a_1| > |b_1| + |c_1|$$
$$|a_2| > |b_2| + |c_2|$$
$$|a_3| > |b_3| + |c_3|$$

Kita bisa mengubah posisi persamaan agar syarat tersebut terpenuhi.

Kita mulai dengan men-set nilai awal x, y dan z sebagai nol. Selesaikan x, y dan z sebagai variable lain, yaitu:

$$x = \frac{1}{a_1}(d_1 - b_1 y - c_1 z)$$
$$y = \frac{1}{b_2}(d_2 - a_2 x - c_2 z)$$
$$z = \frac{1}{c_3}(d_3 - a_3 x - b_3 y)$$

Nilai di atas adalah nilai awal $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ dan $z^{(0)}$. Kemudian:

$$x^{(1)} = \frac{1}{a_1}\left(d_1 - b_1 y^{(0)} - c_1 z^{(0)}\right)$$
$$y^{(1)} = \frac{1}{b_2}\left(d_2 - a_2 x^{(0)} - c_2 z^{(0)}\right)$$
$$z^{(1)} = \frac{1}{c_3}\left(d_3 - a_3 x^{(0)} - b_3 y^{(0)}\right)$$

Kemudian, dengan menggunakan nilai $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ dan $z^{(1)}$:

$$x^{(2)} = \frac{1}{a_1}\left(d_1 - b_1 y^{(1)} - c_1 z^{(1)}\right)$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{b_2}\left(d_2 - a_2 x^{(1)} - c_2 z^{(1)}\right)$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{c_3}\left(d_3 - a_3 x^{(1)} - b_3 y^{(1)}\right)$$

Ulangi proses dengan cara yang sama, sehingga nilai iterasi ke-r adalah $x^{(r)}$, $y^{(r)}$ dan $z^{(r)}$:

$$x^{(r+1)} = \frac{1}{a_1}\left(d_1 - b_1 y^{(r)} - c_1 z^{(r)}\right)$$
$$y^{(r+1)} = \frac{1}{b_2}\left(d_2 - a_2 x^{(r)} - c_2 z^{(r)}\right)$$
$$z^{(r+1)} = \frac{1}{c_3}\left(d_3 - a_3 x^{(r)} - b_3 y^{(r)}\right)$$

Iterasi tersebut terus dilakukan hingga dua nilai yang dihasilkan berturut-turut sama.

4. Aplikasi Metoda Gauss-Jacobi

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metoda Gauss-Jacobi

$$27x + 6y - z = 85$$
$$6x + 15y + 2z = 72$$
$$x + y + 54z = 110$$

Solusi:

Untuk menerapkan metoda ini, pertama harus dicek bahwa elemen diagonal melebihi nilai elemen lainnya.

➔ 27 > 6 + 1 ; 15 > 6 + 2 ; 54 > 1 + 1. Sehingga metoda iterasi dapat diterapkan

$$x = \frac{1}{27}(85 - 6y + z)$$

$$y = \frac{1}{15}(72 - 6x - 2z)$$

$$z = \frac{1}{54}(110 - x - y)$$

Iterasi pertama: dimulai dengan x = y = z = 0

$$x^{(1)} = \frac{85}{27} = 3.14815 \dots \dots (1)$$

$$y^{(1)} = \frac{72}{15} = 4.8 \dots \dots \dots \dots (2)$$

$$z^{(1)} = \frac{110}{54} = 2.03704 \dots (3)$$

Iterasi kedua: masukkan nilai $y^{(1)} = 4.8$ dan $z^{(1)} = 2.03704$ ke persamaan (1)

$$x^{(2)} = \frac{1}{27}(85 - 6(4.8) + 2.03704) = 2.15693$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{15}(72 - 6(3.14815) - 2(2.03704)) = 3.26913$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{54}(110 - 3.14815 - 4.8) = -0.515$$

Iterasi ketiga: masukkan nilai $x^{(2)} = 2.15693$, $y^{(2)} = 3.26913$ dan $z^{(2)} = -0.515$

$$x^{(3)} = \frac{1}{27}(85 - 6(3.26913) - 0.515) = 2.49167$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{15}(72 - 6(2.15693) - 2(2.15693)) = 3.68525$$

$$z^{(3)} = \frac{1}{54}(110 - 2.15693 - 3.26913) = 1.93655$$

Lanjutkan iterasi sehingga kita memperoleh hasil sebagai berikut:

Iterasi ke	*x*	*y*	*z*
4	*2.40093*	*3.54513*	*1.92265*
5	*2.43155*	*3.58327*	*1.92692*
6	*2.42323*	*3.57046*	*1.92565*
7	*2.42603*	*3.57395*	*1.92604*
8	*2.42527*	*3.57278*	*1.92593*
9	*2.42552*	*3.57310*	*1.92596*
10	*2.42546*	*3.57300*	*1.92595*

Dari table di atas, iterasi ke-9 dan 10 bernilai sama dengan mempertimbangkan empat angka di belakang koma. Sehingga solusi persamaan tersebut adalah:

$x = 2.4255$ $y = 3.5730$ $z = 1.9260$.

5. Metoda Gauss-Seidel

Metoda ini merupakan pengembangan dari metoda Gauss-Jacobi. Untuk menyelesaikan persamaan linier dengan metoda ini, syarat yang harus dipenuhi sama dengan syarat pada metoda Gauss-Jacobi.

Tinjau sistem 3 persamaan dengan 3 variable yang tidak diketahui:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Metoda ini diterapkan hanya jika elemen diagonal lebih besar dari jumlah semua elemen pada persamaan tersebut, yaitu:

$$|a_1| > |b_1| + |c_1|$$
$$|a_2| > |b_2| + |c_2|$$
$$|a_3| > |b_3| + |c_3|$$

Kita bisa mengubah posisi persamaan agar syarat tersebut terpenuhi.

Kita mulai dengan men-set nilai awal x, y dan z sebagai nol. Selesaikan x, y dan z sebagai variable lain, yaitu:

$$x = \frac{1}{a_1}(d_1 - b_1y - c_1z)$$
$$y = \frac{1}{b_2}(d_2 - a_2x - c_2z)$$
$$z = \frac{1}{c_3}(d_3 - a_3x - b_3y)$$

Nilai di atas adalah nilai awal $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ dan $z^{(0)}$. Kita lanjutkan dengan nilai awal $y^{(0)}$ dan $z^{(0)}$ dari persamaan pertama, yaitu

$$x^{(1)} = \frac{1}{a_1}\left(d_1 - b_1y^{(0)} - c_1z^{(0)}\right)$$

Kemudian kita hitung $y^{(1)}$ dengan menggunakan nilai baru $x^{(1)}$ dan $z^{(0)}$

$$y^{(1)} = \frac{1}{b_2}\left(d_2 - a_2x^{(1)} - c_2z^{(0)}\right)$$

Dengan cara yang sama, kita hitung $z^{(1)}$ dengan menggunakan nilai baru $x^{(1)}$ dan $y^{(1)}$

$$z^{(1)} = \frac{1}{c_3}\left(d_3 - a_3x^{(1)} - b_3y^{(1)}\right)$$

Kemudian, dengan menggunakan nilai baru $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ dan $z^{(1)}$, kita lakukan iterasi berikutnya:

$$x^{(2)} = \frac{1}{a_1}\left(d_1 - b_1y^{(1)} - c_1z^{(1)}\right)$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{b_2}\left(d_2 - a_2x^{(2)} - c_2z^{(1)}\right)$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{c_3}\left(d_3 - a_3x^{(2)} - b_3y^{(2)}\right)$$

Ulangi proses dengan cara yang sama, sehingga nilai iterasi ke-r adalah $x^{(r)}$, $y^{(r)}$ dan $z^{(r)}$:

$$x^{(r+1)} = \frac{1}{a_1}\left(d_1 - b_1y^{(r)} - c_1z^{(r)}\right)$$
$$y^{(r+1)} = \frac{1}{b_2}\left(d_2 - a_2x^{(r+1)} - c_2z^{(r)}\right)$$
$$z^{(r+1)} = \frac{1}{c_3}\left(d_3 - a_3x^{(r+1)} - b_3y^{(r+1)}\right)$$

Iterasi tersebut terus dilakukan hingga dua nilai yang dihasilkan berturut-turut sama.

6. Aplikasi Metoda Gauss-Seidel

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metoda Gauss-Seidel

$$10x - 5y - 2z = 3$$
$$4x - 10y + 3z = -3$$
$$x + 6y + 10z = 3$$

Solusi:

Untuk menerapkan metoda ini, pertama harus dicek bahwa elemen diagonal melebihi nilai elemen lainnya.

➔ 10 > 5 + 2 ; 10 > 4 + 3 ; 10 > 1 + 6. Sehingga metoda iterasi dapat diterapkan

$$x = \frac{1}{10}(3 + 5y + 2z)$$

$$y = \frac{1}{10}(3 + 4x + 3z)$$

$$z = \frac{1}{10}(-3 - x - 6y)$$

Iterasi pertama: dimulai dengan x = y = z = 0

$$x^{(1)} = \frac{3}{10} = 0.3 \dots \dots (1)$$

Gunakan nilai baru *x* untuk perhitungan selanjutnya, yaitu:

$$y^{(1)} = \frac{1}{10}(3 + 4(0.3) + 3(0)) = 0.42$$

Gunakan nilai *x = 0.3* dan *y = 0.42* untuk mencari *z:*

$$z^{(1)} = \frac{1}{10}\left(-3 - 0.3 - 6(0.42)\right) = -0.582$$

Iterasi kedua: gunakan $y^{(1)} = 0.42$ dan $z^{(1)} = -0.582$ di persamaan pertama

$$x^{(2)} = \frac{1}{10}(3 + 5(0.42) + (-0.582)) = 0.3936$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{10}(3 + 4(0.3936) + 3(-0.582)) = 0.28284$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{10}\left(-3 - 0.3936 - 6(0.28284)\right) = -0.509064$$

Iterasi ketiga: masukkan nilai $x^{(2)} = 0.3936$, $y^{(2)} = 0.28284$ dan $z^{(2)} = -0.509064$

$$x^{(3)} = \frac{1}{10}(3 + 5(0.28284) + (-0.509064)) = 0.3396072$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{10}(3 + 4(0.3396072) + 3(-0.509064)) = 0.28312368$$

$$z^{(3)} = \frac{1}{10}\left(-3 - 0.3396072 - 6(0.28312368)\right) = -0.503834928$$

Hasil dari iterasi berikutnya ditampilkan pada table berikut

Iterasi ke	x	y	z
4	*0.34079485*	*0.28516746*	*-0.50517996*
5	*0.3415547*	*0.28506792*	*-0.505196229*
6	*0.3414947*	*0.2850390*	*-0.5051728*
7	*0.3414849*	*0.28504212*	*-0.5051737*

Sehingga, solusinya adalah x = 0.341, y = 0.285, z = -0.505

7. Latihan

1. Selesaikan persamaan berikut dengan metoda Gauss-Jacobi dan Gauss-Seidel:

$$10x - 5y - 2z = 3$$

$$4x - 10y + 3z = -3$$

$$x + 6y + 10z = 3$$

   Jawaban: *x =0.342 , y = 0.285, z = - 0.505*

2. *3.15x – 1.96 y + 3.85 z = 12.95*
   2.13x - 5.12y -2.892z = -8.61
   5.92x +3.051y +2.15 z = 6.88
   (Jawaban : x =1.7089, y = -1.8005, z = 1.0488)

8. Kesimpulan

Pada perkuliahan ini kita sudah membahas metoda Gauss-Jacobi dan Gauss-Seidel untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Metoda ini adalah metoda iterative dan banyak digunakan dalam bidang sains dan rekayasa.