Pertemuan 4
Diferensiasi Numerik

Daftar Isi:

---

1. Tujuan Perkuliahan

Setelah mengikuti perkuliahan ini, diharapkan mahasiswa:

- Mengetahui konstruksi table differensiasi
- Dapat mencari turunan persamaan differensial dengan metoda Newton Forward Difference dan Newton Backward Difference

2. Pendahuluan

Tinjau fungsi $y = f(x)$ yang nilai y_0, y_1, y_2, y_3,…. y_n bergantung pada nilai x_0, x_1, x_2, x_3,… x_n. Sekarang kita akan mencari nilai turunan dari $y = y_k$ untuk $x = x_k$ yang diberikan. Jika turunan yang diperlukan berada dekat dengan nilai awal pada table, yaitu, jika nilai *x* nya berada di antara x_0 dan x_1, kita menggunakan metoda Newton forward. Jika turunan yang diperlukan berada dekat dengan nilai akhir pada table, yaitu, jika nilai *x* nya berada di antara x_{n-1} dan x_n, kita menggunakan metoda Newton backward.

3. Metoda Newton Forward Difference

Misalkan tabel berikut merepresentasikan set nilai dari *x* dan *y*

x :	x_0	x_1	x_2	x_3	…	…	x_n
y :	y_0	y_1	y_2	y_3	…	…	y_n

Dari table di atas, kita ingin mencari turunan dari $y = f(x)$ yang melewati (n+1) titik, pada titik yang lebih dekat ke nilai awal $x = x_0$.

Persamaan Newton's Forward Difference adalah sebagai berikut:

$$y(x_0 + uh) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

Dengan: y(x) adalah persamaan polynomial derajat n dalam x,

$$u = \frac{x - x_0}{h}$$

Dan $\Delta \quad y_0, \Delta^2 y_0$ dan $\Delta^3 y_0$ diperoleh dari table diferensiasi.

Kemudian y(x) tersebut diturunkan terhadap x dengan cara:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left\{\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots\right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left\{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \cdots\right\}$$

4. Aplikasi Metoda Newton's Forward Difference

Cari dua turunan pertama dari $x^{1/3}$ pada x = 50 dengan table yang diberikan berikut:

x :	50	51	52	53	54	55	56
y :	*3.6840*	*3.7084*	*3.7325*	*3.7563*	*3.7798*	*3.8030*	*3.8259*

Solusi:

Tahap 1: tuliskan persamaannya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left\{\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots\right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left\{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \cdots\right\}$$

Tahap 2: buat table diferensiasi untuk mencari nilai-nilai Δ

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
50	3.6840	(3.7084-3.6840)		
		=0.0244		
51	3.7084		-0.0003	
		0.0241		0
52	3.7325		-0.0003	
		0.0238		0
53	3.7563		-0.0003	
		0.0235		0
54	3.7798		-0.0003	
		0.0232		0
55	3.8030		-0.0003	
		0.0229		
56	3.8259			

Dengan menggunakan persamaan Newton's forward:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{u=0} = \frac{1}{h}\left\{\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{1}\left\{0.0244 - \frac{1}{2}(-0.003) + \frac{1}{3}(0)\right\} = 0.02455$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \cdots\} = \frac{1}{1}[-0.0003] = -0.0003$$

5. Metoda Newton's Backward Difference

Misalkan tabel berikut merepresentasikan set nilai dari *x* dan *y*

x :	x_0	x_1	x_2	x_3	…	…	x_n
y :	y_0	y_1	y_2	y_3	…	…	y_n

Dari table di atas, kita ingin mencari turunan dari $y = f(x)$ yang melewati (n+1) titik, pada titik yang lebih dekat ke nilai akhir $x = x_n$.

Persamaan Newton's Backward Difference adalah sebagai berikut:

$$y(x_n + vh) = y_n + v\Delta y_n + \frac{v(v+1)}{2!}\Delta^2 y_n + \frac{v(v+1)(v+2)}{3!}\Delta^3 y_n + \cdots$$

Dengan: y(x) adalah persamaan polynomial derajat n dalam x,

$$v = \frac{x_n - x}{h}$$

Dan $\Delta\ \ y_n$, $\Delta^2 y_n$ dan $\Delta^3 y_n$ diperoleh dari table diferensiasi.

Kemudian y(x) tersebut diturunkan terhadap x dengan cara:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left\{\Delta y_n + \frac{1}{2}\Delta^2 y_n + \frac{1}{3}\Delta^3 y_n + \cdots\right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left\{\Delta^2 y_n + \Delta^3 y_n + \frac{11}{12}\Delta^4 y_n + \cdots\right\}$$

6. Aplikasi Metoda Newton's Backward Difference

Cari dua turunan pertama dari $x^{1/3}$ pada x = 50 dengan table yang diberikan berikut:

x :	50	51	52	53	54	55	56
y :	*3.6840*	*3.7084*	*3.7325*	*3.7563*	*3.7798*	*3.8030*	*3.8259*

Solusi:

Tahap 1: tuliskan persamaannya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left\{\Delta y_n + \frac{1}{2}\Delta^2 y_n + \frac{1}{3}\Delta^3 y_n + \cdots\right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left\{\Delta^2 y_n + \Delta^3 y_n + \frac{11}{12}\Delta^4 y_n + \cdots\right\}$$

Tahap 2: buat table diferensiasi untuk mencari nilai-nilai Δ

x	y	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$
50	3.6840	(3.7084-3.6840)		
		=0.0244		
51	3.7084		-0.0003	
		0.0241		0
52	3.7325		-0.0003	
		0.0238		0
53	3.7563		-0.0003	
		0.0235		0
54	3.7798		-0.0003	
		0.0232		0
55	3.8030		-0.0003	
		0.0229		
56	3.8259			

Dengan menggunakan persamaan Newton's forward:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_n} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{v=0} = \frac{1}{h}\left\{\Delta y_n + \frac{1}{2}\Delta^2 y_n + \frac{1}{3}\Delta^3 y_n + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{1}\left\{0.0299 + \frac{1}{2}(-0.003) + \frac{1}{3}(0)\right\} = 0.02275$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=56} = \frac{1}{h^2}\{\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 + \cdots\} = \frac{1}{1}[-0.0003] = -0.0003$$

7. Latihan

Diberikan table y = f(x) sebagai berikut:

X	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4
f(x)	-14	-10.32	-5.296	-0.256	6.672	14

Berdasarkan table di atas, carilah nilai turunan pertama dan kedua dari:

1. x=3
2. x=4

8. Kesimpulan

Pada perkuliahan ini kita sudah membahas metoda Newton's forward dan backward difference untuk mencari turunan pertama dan kedua persamaan differensial.