UNY

Modul Praktikum Teori Antrian

Disusun oleh :

Retno Subekti, M.Sc

Nikenasih Binatari, M.Si

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA

UNY

Daftar Halaman :

Bagian I
Mengenal Model Antrian

Teori antrian merupakan cabang dari terapan teori probabilitas yang awalnya digunakan untuk mempelajari kemacetan lalu lintas telepon pada tahun 1910. Pelopor penyusunan teori antrian adalah seorang ahli matematika dari Denmark, Agner Kramp Erlang (1878-1929). Penulisan model antrian yang dikenal pada umumnya mengikuti notasi Kendall yang pertama kali dikemukakan oleh D.G.Kendall dalam bentuk a/b/c, kemudian oleh A.M. Lee ditambahkan simbol d dan e sehingga menjadi a/b/c/d/e yang disebut notasi kendall-Lee (Taha, 1996:627).

Menurut Taha (1997:186), notasi Kendall-lee tersebut perlu ditambah dengan simbol f . Sehingga karakteristik suatu antrian dapat dinotasikan dalam format baku (a/b/c):(c/d/f). Notasi dari a sampai f tersebut berturut – turut menyatakan distribusi waktu antar kedatangan, distribusi waktu pelayanan, jumlah server pelayanan, disiplin pelayanan, kapasitas sistem, dan ukuran sumber pemanggilan.

Unsur Dasar Model Antrian Dalam sistem antrian, terdapat beberapa unsur dasar yang harus diperhatikan oleh penyedia fasilitas pelayanan dalam memberikan pelayanan terhadap para pelanggan. Salah satunya adalah Pola kedatangan pelanggan. Proses kedatangan pelanggan dapat terjadi secara individu maupun berkelompok baik dalam jumlah kecil maupun besar. Pola kedatangan pelanggan dapat dilihat dari waktu antar kedatangan dua pelanggan yang berurutan (interarrival time). Pola kedatangan ini dapat bersifat deterministik (pasti) maupun stokastik (acak).

Kedatangan yang bersifat deterministik dapat beragam pada suatu periode waktu tertentu, misalnya kedatangan ditentukan dengan laju sebesar 50 kedatangan/jam. Kedatangan yang bersifat deterministik biasanya tampak pada proses produksi dengan menggunakan mesin. Sementara itu, kedatangan yang bersifat stokastik belum ditentukan sehingga perlu dicari kesesuaiannya dengan suatu distribusi tertentu(Gross&Harris,1998:4). Jika distribusi kedatangan tidak bergantung pada waktu (time-independent) maka bersifat stasioner (keadaan bebas terhadap waktu).

Sebaliknya jika distribusi kedatangannya bergantung pada waktu, maka bersifat nonstasioner (Gross&Harris,1998:4).

Menurut Wagner (1972:840), pola kedatangan adalah pola pembentukan antrian akibat kedatangan pelanggan dalam selang waktu tertentu. Pola kedatangan dapat diketahui secara pasti atau berupa suatu peubah acak yang distribusi peluangnya dianggap telah diketahui. Pelanggan datang secara individu maupun kelompok. Namun, jika tidak disebutkan secara khusus, maka kedatangan terjadi secara individu. Sementara itu, Pola Kepergian adalah pola pembentukan antrian akibat kepergian pelanggan selama periode waktu tertentu. Pola kepergian biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik atau berupa suatu variabel acak dengan distribusi peluang tertentu. (Bronson, 1996 : 310). Darisini, dikenal dua macam model antrian yaitu model antrian Poisson dan non Poisson.

Pada handout praktikum ini akan dijelaskan tentang dasar – dasar dalam pembahasan model antrian dengan pola kedatangan secara individu yang berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan menggunakan program SPSS, TORA dan QSB.

Bagian II

Asumsi Asumsi Dalam Model Antrian

Untuk model Antrian Poisson ada dua asumsi yang harus diperhatikan terkait dengan distribusi dari data yaitu data berdistribusi poisson dan data berdistribusi eksponensial. Secara umum model antrian diasumsikan jika rata-rata kedatangan dan rata-rata pelayanan mengikuti distribusi Poisson maka waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial (Gross&Harris,1998:16). Pernyataan tersebut menegaskan adanya hubungan antara distribusi Poisson dengan distribusi Eksponensial.

Perhatikan kondisi antrian dimana kedatangan dan keberangkatan (peristiwa/kejadian) terjadi selama interval waktu dikendalikan oleh beberapa Asumsi berikut :

Asumsi I : peluang suatu peristiwa (kedatangan atau keberangkatan) terjadi antara t dan $t + s$ hanya bergantung pada panjang s, artinya peluang tidak bergantung pada t atau banyaknya peristiwa yang terjadi selama periode waktu $(0,t)$.

Asumsi II : peluang suatu peristiwa terjadi dalam interval waktu yang singkat h adalah positif tetapi kurang dari satu.

Asumsi III : setidaknya ada satu peristiwa yang terjadi dalam interval waktu singkat h.

Pada akhir bab ini, akan ditunjukkan bahwa dari ketiga Asumsi tersebut diatas menggambarkan suatu proses dimana banyaknya kejadian selama interval waktu tertentu adalah Poisson, dan interval waktu antara dua kejadian berturut-turut adalah exponensial. Pada beberapa kasus, Asumsi-Asumsi tersebut disebut Proses Poisson.

Pandang proses antrian suatu waktu tertentu berikut.

0 T1 T2 T3 T4 T5 dst

Misalkan :

T_n = waktu yang ditunjukkan saat customer ke-n datang

X_n = waktu antar kedatangan customer ke-n dan customer ke-n-1

$= T_n - T_{n-1}$

Asumsi ke-2 diatas dapat kita nyatakan dalam bahasa matematika sebagai berikut :

$$P(X_n > t) > 0, \qquad \forall t > 0$$

Selanjutnya, menurut Asumsi ke-3, karena untuk h kecil satu peristiwa mungkin terjadi maka

Asumsi ke-2 berlaku untuk setiap X_n bilangan real, akibatnya

$$P(X > t) > 0, \qquad \forall t > 0$$

Kemudian dari Asumsi ke-1, diketahui bahwa

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t) \dots\dots\dots\dots\text{Sifat forgetfull ness}$$

Darisini diperoleh bahwa

$$P(X > t) = P(X > t + s | X > s) = \frac{P(X > t + s\ \cap X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)}$$

Jadi, $P(X > t + s) = P(X > s)P(X > t)$.

Notasikan $G(t) = P(X > t)$, maka persamaan diatas dapat dinyatakan sebagai

$$G(t + s) = G(t)G(s)$$

Akan dicari fungsi G yang memenuhi persamaan diatas, untuk sebarang t, s bilangan real.

Misalkan $G(1) = c$, maka

$$G(n) = G(1 + 1 + 1 + \cdots + 1) = G(1)G(1)G(1)\dots G(1) = c^n \dots.(a)$$

Kemudian,

$$c = G(1) = G\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = G\left(\frac{1}{n}\right)G\left(\frac{1}{n}\right)\dots G\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{G\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n$$

yang berakibat,

$$G\left(\frac{1}{n}\right) = c^{\frac{1}{n}} \dots\dots\dots\dots\dots(b)$$

Dari (a) dan (b), untuk t bilangan rasional berlaku

$$G\left(\frac{m}{n}\right) = c^{\frac{m}{n}}$$

Secara umum, untuk t sebarang bilangan real nonnegative berlaku

$$G(t) = c^t, t \geq 0$$

Jadi,

$$P(X > t) = G(t) = c^t = e^{\ln c^t} = e^{t \ln c} = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0$$

dengan $\lambda = -\ln c$.

Akibatnya,

$$1 - P(X \leq t) = P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

atau

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

Diberikan,

$f(t)$

$=$ fungsi densitas peluang atas interval waktu t antara kedatangan yang berturutan, t

≥ 0

maka

$$\int_0^t f(s)\, ds = P(X \leq t)$$

Jadi,

$$f(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Dari sini diperoleh

$$\boxed{f(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad t \geq 0 \qquad\qquad \text{(Eksponensial)}}$$

yang merupakan Distribusi Eksponensial dengan mean $E\{t\} = \frac{1}{\lambda}$ satuan waktu.

Jadi dapat disimpulkan bahwa waktu antar kedatangan yang memenuhi Asumsi I, II dan III berdistribusi eksponensial. Selanjutnya, karena f merupakan fungsi densitas peluang atas waktu antar kedatangan dengan mean $E\{t\} = \frac{1}{\lambda}$ satuan waktu, maka $\frac{1}{\lambda}$ merupakan rata-rata waktu antar kedatangan.

Definisikan :

$$p_n(t) = \text{ peluang } n \text{ buah kedatangan terjadi selama } t$$

Misalkan T adalah interval waktu untuk kedatangan yang terakhir, maka pernyataan peluang berikut ini bernilai benar :

$$P\begin{Bmatrix}\text{tidak ada kedatangan} \\ \text{saat T}\end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix}\text{waktu antar kedatangan} \\ \text{melebihi T}\end{Bmatrix}$$

Pernyataan ini dapat dinyatakan dengan

$$p_0(T) = \int_T^{\infty} f(t)\, dt = e^{-\lambda T}, \quad T > 0$$

Diberikan $f(t)$ Distribusi Eksponensial, menurut Teori Peluang diperoleh bahwa $p_n(t)$ adalah Distribusi Poisson, yaitu,

$$p_n(t) = \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!}, \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad \text{(Poisson)}$$

Contoh.

Sebuah mesin layanan mempunyai waktu standby sesegera setelah melakukan kegagalan. Waktu antar kegagalan atau standby terdistribusi eksponensial dengan mean 10 jam. Kegagalan terjadi dengan laju 0.1 kejadian per jam. Hitunglah berapa

a. Peluang terjadi kegagalan dalam 5 jam.
b. Peluang kegagalan terjadi setelah 6 jam dari sekarang dimana kegagalan sebelumnya terjadi 3 jam lebih awal
c. Peluang tidak adanya kegagalan yang terjadi dalam periode 1-hari (24 jam)

Jawaban :

Distribusi eksponensial atas waktu antar kegagalan tersebut diberikan oleh

$$f(t) = 0.1e^{-0.1t}, \qquad t > 0$$

dimana distribusi poisson atas banyaknya kegagalan selama T periode diberikan oleh

$$p_n(T) = \frac{(0.1T)^n e^{-0.1T}}{n!}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

a. Peluang kegagalan terjadi dalam 5 jam adalah

$$P\{X < 5\} = \int_0^5 f(t)\ \ dt\ = 1 - e^{-0.5} = 0.393$$

b. peluang kegagalan terjadi setelah 6 jam dari sekarang dimana kegagalan sebelumnya terjadi 3 jam lebih awal, maka digunakan Sifat forgetfullness atas eksponensial

$$P\{\mathrm{X} > 9 \mid t > 3\} = p\{\, t > 6\} = e^{-0.1 \text{ x } 6} = 0.549$$

c. peluang tidak adanya kegagalan yang terjadi dalam periode 1-hari (24 jam), yaitu

$$p_0(24) = \frac{(.1 \text{ x } 24)^0\ e^{-.1 \text{ x } 24}}{0!} = e^{-2.4} = 0.091$$

Hal ini sama halnya dengan mengatakan bahwa $p_0(24)$ ekuivalen dengan waktu antar kegagalan paling tidak dalam 24 jam, yaitu

$$P\{X > 24\} = \int_{24}^{\infty} 0.1e^{-0.1t}\ dt = e^{-2.4}$$

Soal Latihan

1. Pada kasus-kasus berikut ini, tentukan rata-rata laju kedatangan per jam, λ dan rata-rata waktu antar kedatangan dalam jam.
   a. Satu kedatangan terjadi setiap 10 menit
   b. Dua kedatangan terjadi setiap 6 menit
   c. Banyaknya kedatangan dalam 30 menit adalah 10.
   d. Rata-rata interval antara kedatangan yang berurutan adalah 0.5 jam.
2. Pada kasus-kasus berikut ini, tentukan rata-rata laju pelayanan per jam, □, dan rata-rata waktu pelayanan dalam jam.
   a. Satu pelayanan selesai setiap 12 menit.
   b. Satu kedatangan terjadi setiap 15 menit.
   c. Banyaknya kostumer yang dilayanan dalam periode 30 menit adalah 5.
   d. Rata-rata waktu pelayanan adalah 0,3 jam.
3. Pada contoh diatas, tentukan
   a. Rata-rata banyaknya kegagalan dalam 1 minggu, asumsikan pelayanan dilakukan 24 jam sehari dan 7 hari seminggu.
   b. Probabilitas setidaknya satu kegagalan dalam periode 2 jam.
   c. Probabilitas bahwa kegagalan berikutnya tidak terjadi dalam 3 jam.
   d. Jika tidak ada kegagalan yang terjadi dalam 3 jam setelah kegagalan yang terakhir, berapakah peluang waktu antar kegagalan paling sedikit 4 jam.
4. Waktu antara kedatangan di Kantor SR terdistribusi eksponensial dengan nilai rata-rata 0.05 jam. Kantor buka pukul 8.00 AM.
   a. Tulis distribusi eksponensial yang menggambarkan waktu antar kedatangan.
   b. Carilah probabilitas tidak ada kostumer yang datang di kantor jam 8.15 AM.
   c. Sekarang pukul 8.35 AM. Kostumer terakhir datang ke kantor pukul 8.26 AM. Berapakah peluang bahwa kostumer berikutnya akan datang sebelum pukul 8.38 AM? Jika tidak datang pukul 8.40 AM?

d. Berapakah rata-rata banyaknya kostumer yang datang antara pukul 8.10 dan 8.45 AM?

5. Ann dan Jim, dua pekerja pada restoran cepat saji, membuat permainan ketika menunggu para pelanggan datang. Jim akan membayar Ann Rp. 20.000 jika pelanggan berikutnya tidak datang dalam waktu 2 menit sementara Jika sebaliknya maka Ann akan membayar Jim Rp. 30.000. Jika waktu antar kedatangan pelanggan berdistribusi eksponensial dengan rata-rata 3 menit, tentukan hasil akhir dari permainan tersebut dalam 8 jam.

Bagian III
Uji Asumsi Distribusi Data

Dalam Handout Praktikum ini akan digunakan software SPSS untuk menguji asumsi distribusi data dengan menggunakan Kolmogorov-Smirnov

Menurut Siegel (1997:59) tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov merupakan suatu tes goodness of-fit, artinya yang diperhatikan ialah tingkat kesesuaian antara distribusi sampel hasil observasi dengan suatu distribusi teoritis tertentu. Metode yang digunakan pada tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov yaitu dengan menetapkan distribusi frekuensi kumulatif dari data-data sampel hasil observasi pada suatu interval tertentu. Tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov dipilih untuk pengujian karena dapat digunakan pada yang sampel sangat kecil dan tidak menghilangkan informasi meski sampel digabungkan dalam beberapa kategori.

Langkah-langkah pengujian menggunakan tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov ialah Hipotesis

H0 : Data sampel hasil observasi dapat dianggap berasal dari populasi yang berdistribusi Poisson.
H1 : Data sampel hasil observasi tidak dapat dianggap berasal dari populasi yang berdistribusi Poisson.
Statistik uji : Tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov.
Tingkat Signifikansi : alpha
Daerah Penolakan : H0 ditolak jika nilai significant value ≤ alpha

Berikut ini langkah langkah dengan menggunakan Software SPSS untuk uji asumsi distribusi data.

III. 1 Distribusi Poisson

Pengambilan data kedatangan dilakukan dengan mencatat waktu customer yang memasuki sistem pelayanan. Misalkan waktu kedatangan pasien diambil dari jam 07.00

sampai jam 09.00 WIB. Pemilihan waktu pengambilan data didasarkan pada laju kedatangan pasien pada waktu tersebut yang lebih besar jika dibandingkan dengan waktu lainnya, artinya pilihlah jam jam sibuk dimana customer lebih banyak datang dibanding jam jam kedatangan yang lain.

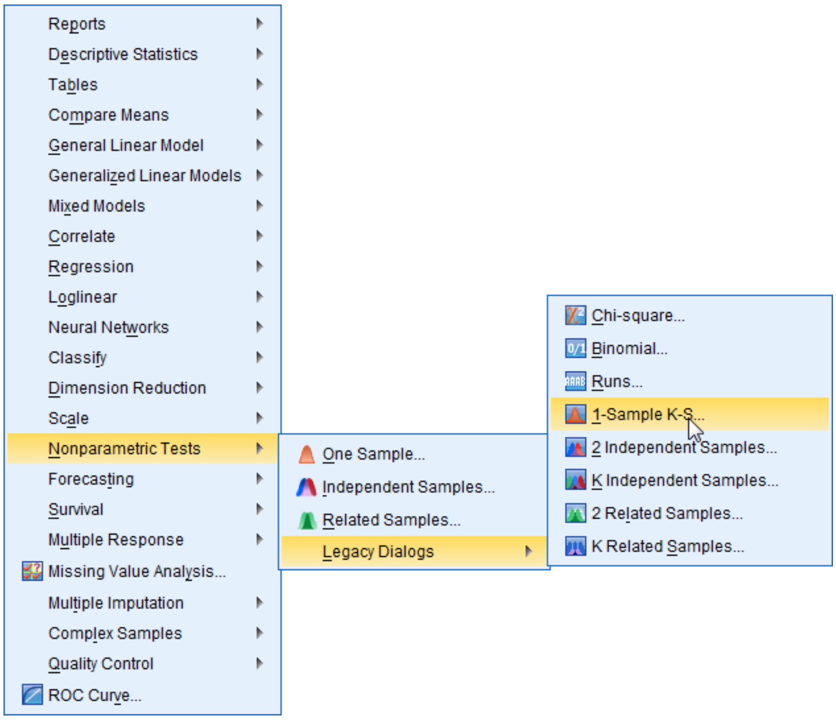
Berikut ini contoh data rekapitulasi hasil pengambilan di sebuah loket Rumah Sakit.
Rekapitulasi kedatangan pasien

Hari/Tanggal	Interval Waktu Kedatangan	Banyaknya Kedatangan
Senin	07.30 – 07.59	33
	08.30 – 08.59	110
Selasa	07.30 – 07.59	29
	08.30 – 08.59	98
Rabu	07.30 – 07.59	20
	08.30 – 08.59	118
Kamis	07.30 – 07.59	41
	08.30 – 08.59	95
Jumat	07.30 – 07.59	25
	08.30 – 08.59	62

Langkah-langkah dengan PASW SPSS

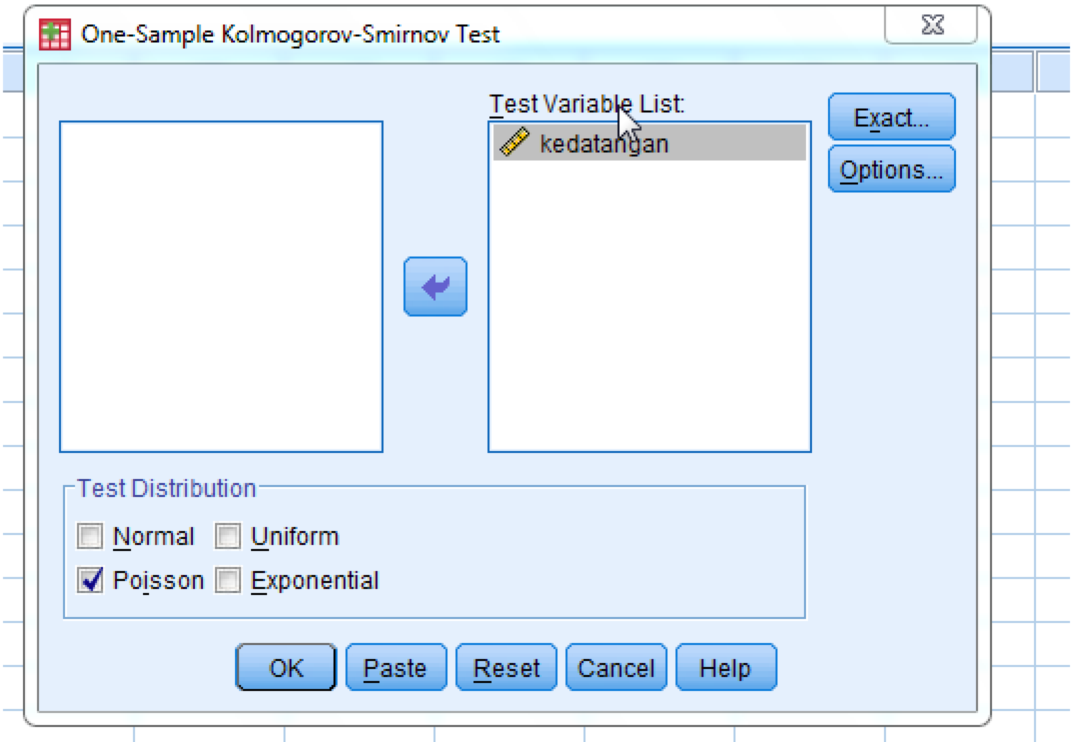
1. Masukkan data

2. Klik Analyze > Nonparametric Tests >Legacy Dialogs > 1-Sample K-S



3. pindahkan data yang akan diuji

4. pada pilihan test distribution pilih Poisson (Jika ingin menguji distribusi yang lain silahkan disesuaikan, misal distribusi exponential, Normal atau Uniform)



5. Klik OK

III. 2 Distribusi Exponensial

Untuk langkah dalam program SPSS sama dengan uji Poisson sebelumnya tetapi pada pilihan test distribution klik exponential.

Berikut ini dengan menggunakan data kedatangan, hasil untuk uji poisson dan exponential.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		data1
N		10
Poisson Parameter[a,b]	Mean	63.10
Most Extreme Differences	Absolute	.498
	Positive	.498
	Negative	-.400
Kolmogorov-Smirnov Z		1.575
Asymp. Sig. (2-tailed)		.014

a. Test distribution is Poisson.

Pada output pertama, terlihat bahwa Asymp. Sig (p-value) 0.14 lebih dari alpha 0.05. Oleh karena itu data terdistribusi Poisson. Bandingkan dengan hasil untuk uji distribusi eksponensial berikut.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test 2

		data1
N		10
Exponential parameter.[a,b]	Mean	63.10
Most Extreme Differences	Absolute	.272
	Positive	.154
	Negative	-.272
Kolmogorov-Smirnov Z		.859
Asymp. Sig. (2-tailed)		.452

a. Test Distribution is Exponential.

Output kedua tersebut menunjukkan bahwa data berdistribusi eksponensial karena nilai Asymp. Sig (p-value) 0.452 lebih dari alpha 0.05 maka H0 pada uji distribusi exponensial diterima.

Jadi, secara umum jika pola kejadian terdistribusi Poisson maka waktu antar kejadian terdistribusi Eksponensial.

Soal Latihan.

Suatu data mengenai antrian pelanggan yang ingin melakukan pembelian tiket diambil di Stasiun X. Dari data tersebut, ujilah

a. Apakah pola kedatangan terdistribusi Poisson
b. Apakah waktu antar kedatangan terdistribusi Eksponensial.
c. Apakah pola pelayanan terdistribusi Poisson.
d. Apakah waktu pelayanan terdistribusi Eksponensial.

No	Waktu Kedatangan	Waktu Pelayanan	Selesai Pelayanan	Lama dalam antrian (detik)	Lama Pelayanan (detik)	Lama dalam system (detik)
1	12:00:51	12:09:00	12:09:14	489	14	503
2	12:00:54	12:09:16	12:09:21	502	5	507
3	12:01:01	12:09:22	12:09:25	501	3	504
4	12:01:15	12:09:26	12:09:40	491	14	505
5	12:02:05	12:09:41	12:09:48	456	7	463
6	12:02:57	12:09:49	12:10:01	412	12	424
7	12:02:59	12:10:02	12:10:10	423	8	431
8	12:03:06	12:10:12	12:10:25	426	13	439
9	12:03:11	12:10:26	12:10:39	435	13	448

10	12:03:20	12:10:40	12:10:51	440	11	451
11	12:04:00	12:10:52	12:11:15	412	23	435
12	12:05:56	12:11:17	12:11:33	321	16	337
13	12:06:04	12:11:34	12:11:45	330	11	341
14	12:08:42	12:11:46	12:11:58	184	12	186
15	12:10:09	12:11:59	12:13:00	110	61	111
16	12:10:11	12:13:02	12:13:35	171	33	204
17	12:10:13	12:13:36	12:13:44	203	8	211
18	12:10:21	12:13:45	12:13:57	204	12	216
19	12:10:31	12:13:58	12:14:10	207	12	219
20	12:10:37	12:14:11	12:14:33	214	22	236
21	12:10:56	12:14:34	12:14:48	218	14	232
22	12:10:58	12:15:01	12:15:07	243	6	249
23	12:11:23	12:15:10	12:15:28	227	18	245
24	12:11:31	12:15:32	12:15:44	241	12	253
25	12:11:32	12:15:51	12:16:09	259	18	277
26	12:11:33	12:16:22	12:16:27	289	5	294
27	12:11:35	12:16:32	12:16:41	297	9	306
28	12:12:36	12:16:52	12:17:03	256	11	267
29	12:12:48	12:17:15	12:17:30	267	15	282
30	12:13:09	12:17:32	12:17:41	263	9	272
31	12:13:26	12:19:00	12:19:08	334	8	342
32	12:22:00	12:22:01	12:22:13	1	12	13
33	12:22:10	12:23:00	12:23:26	50	26	76

34	12:23:02	12:23:30	12:23:57	28	27	55
35	12:23:27	12:24:01	12:25:12	34	71	105
36	12:23:52	12:25:21	12:27:22	89	121	210
37	12:27:06	12:27:23	12:28:45	17	82	99
38	12:27:20	12:28:58	12:29:36	98	38	136
39	12:27:42	12:31:19	12:31:33	217	12	229
40	12:29:24	12:31:46	12:32:25	142	39	181
41	12:33:00	12:33:01	12:33:19	1	18	19
42	12:33:02	12:33:22	12:33:35	20	13	33
43	12:37:01	12:37:02	12:37:43	1	41	42
44	12:38:00	13:38:03	12:38:28	3	25	28
45	12:39:00	12:39:01	12:39:17	1	16	17
46	12:39:02	12:39:23	12:39:49	20	26	46
47	12:39:29	12:39:50	12:40:09	21	19	40
48	12:41:00	12:41:05	12:41:32	5	27	32
49	12:41:08	12:41:57	12:42:06	49	9	58
50	12:43:00	12:43:03	12:43:14	3	11	14
51	12:43:04	12:43:16	12:43:43	12	27	39
52	12:43:12	12:43:50	12:44:06	38	16	54
53	12:43:51	12:44:09	12:44:27	18	18	36
54	12:44:20	12:44:30	12:44:40	10	10	20
55	12:45:01	12:45:05	12:45:30	4	25	29
56	12:45:12	12:45:32	12:45:38	20	6	26
57	12:45:15	12:45:40	12:45:53	25	13	38

58	12:45:28	12:45:55	12:46:12	27	17	44
59	12:45:30	12:46:15	12:46:39	45	24	69
60	12:45:40	12:46:50	12:46:53	70	3	73
61	12:45:50	12:46:58	12:47:08	68	10	78
62	12:46:16	12:47:10	12:47:15	54	5	59
63	12:48:00	12:48:01	12:48:15	1	14	15
64	12:49:00	12:49:01	12:49:15	1	14	15
65	12:49:02	12:49:17	12:49:34	15	17	32
66	12:49:20	12:49:35	12:49:38	15	3	18
67	12:49:21	12:49:40	12:49:53	19	13	32
68	12:49:30	12:49:55	12:50:29	25	34	59
69	12:49:48	12:50:30	12:50:41	42	11	53
70	12:50:32	12:50:50	12:51:08	18	18	36
71	12:52:00	12:52:05	12:52:15	5	10	15
72	12:52:20	12:52:21	12:52:23	1	2	3
73	12:53:00	12:53:01	12:53:32	1	31	32
74	12:54:00	12:54:03	12:54:18	3	15	18
75	12:56:00	12:56:02	12:56:16	2	14	16
76	12:56:12	12:56:18	12:56:24	6	6	12
77	12:57:00	12:57:04	12:57:14	4	10	14
78	12:58:00	12:58:01	12:58:35	1	34	35
79	12:58:02	12:58:38	12:58:51	36	13	49
80	12:58:09	12:58:53	12:59:09	44	16	60
81	12:58:14	12:59:13	12:59:28	59	15	74

82	12:58:55	12:59:30	13:00:23	35	53	88
83	12:59:15	13:00:30	13:00:33	75	3	78
84	12:59:34	13:00:34	13:00:37	60	3	63
85	13:00:29	13:00:38	13:00:54	9	16	25
86	13:00:31	13:00:55	13:01:11	24	16	40
87	13:00:40	13:01:12	13:01:37	32	25	57
88	13:00:42	13:01:38	13:01:48	56	10	66
89	13:00:51	13:01:50	13:02:11	59	21	80
90	13:00:55	13:02:12	13:02:22	67	10	77
91	13:00:57	13:02:23	13:02:40	86	17	103
92	13:00:59	13:02:41	13:03:01	102	20	122
93	13:01:13	13:03:10	13:03:23	117	13	130
94	13:01:39	13:03:24	13:03:34	105	10	115
95	13:01:52	13:03:35	13:03:48	103	13	116
96	13:01:54	13:03:50	13:04:00	116	10	126
97	13:02:20	13:04:01	13:04:29	101	28	129
98	13:03:12	13:04:30	13:04:40	78	10	88
99	13:03:25	13:04:41	13:04:55	76	15	91
100	13:04:29	13:04:56	13:05:15	27	29	56

Bagian IV
Ukuran Keefektifan Sistem Antrian

Parameter-parameter yang digunakan dalam sistem antrian adalah

λ= rata-rata laju kedatangan customer

$\frac{1}{\lambda}$ = rata-rata waktu antar kedatangan

μ = rata-rata waktu pelayanan

$\frac{1}{\mu}$= rata-rata waktu pelayanan

Ukuran Keefektifan dari sistem antrian dapat digambarkan dengan rata-rata jumlah kedatangan dalam antrian, rata-rata waktu tunggu dari suatu kedatangan dan persentase waktu luang dari pelayanan.

Ukuran keefektifan ini dapat digunakan untuk memutuskan jumlah pelayanan yang harus diberikan, perubahan yang harus dilakukan dalam kecepatan pelayanan atau perubahan lain dalam sistem antrian. Dengan sasaran pelayanan, jumlah pelayan dapat ditentukan tanpa berpatokan pada biaya waktu tunggu.

Ukuran – ukuran keefektifan dalam suatu sistem antrian antara lain:

a. *Faktor pemanfaatan (p)*

   bagian waktu pelayan yang digunakan untuk melayani pelanggan. Jadi, 1 – p menyatakan bagian waktu mengganggur pelayan (*idle time*)

b. *Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrian (Ls).*

   Banyaknya pelanggan dalam sistem antrian adalah banyaknya pelanggan yang sedang mengantri maupun yang sedang dilayani.

c. *Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian (Lq).*

   Banyaknya pelanggan dalam antrian adalah selisih antara banyaknya pelanggan dalam sistem antrian dan banyaknya pelanggan yang sedang dalam proses pelayanan *d. Nilai harapan waktu tunggu dalam sistem antrian (Ws).*

Waktu menunggu dalam sistem antrian artinya waktu yang diperlukan oleh seorang pelanggan sejak memasuki antrian hingga pelayanan yang diberikan kepadanya selesai.

e. Nilai harapan waktu tunggu dalam antrian (Wq).

Waktu menunggu dalam suatu antrian artinya waktu yang diperlukan oleh seorang pelanggan sejak memasuki antrian hingga mendapat pelayanan, namun tidak termasuk waktu pelayanan

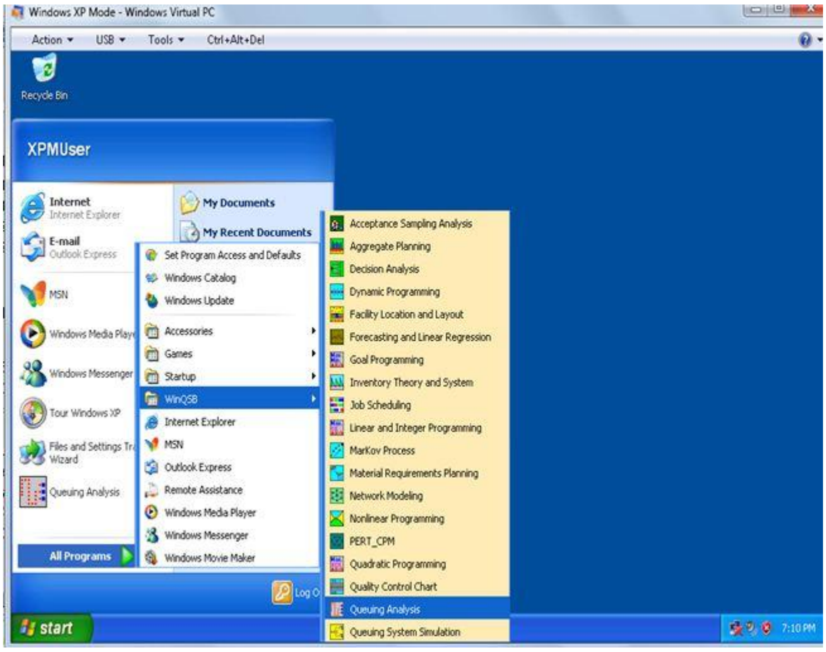
f. Nilai harapan pelayan yang sibuk ($\bar{c}$)

$\bar{c} = c \text{ x } p$

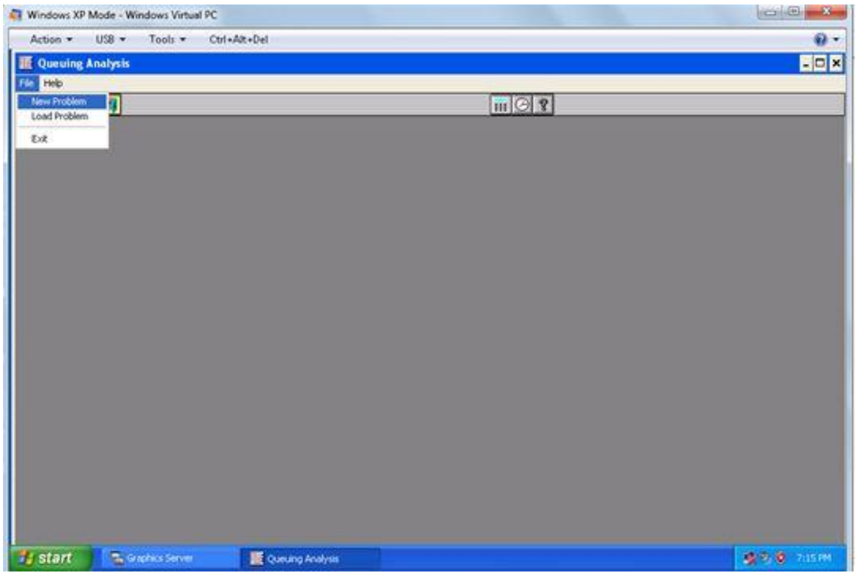
Bagian V
Software Analisis Antrian WinQSB

Langkah – langkah penyelesaian pada model antrian dengan Software WINQSB adalah sebagai berikut :

1. Buka aplikasi dengan cara klik Start > Program > WinQSB > Queuing Analysis



2. Kemudian, akan muncul tampilan awal dari WinQSB dan pilih File > New Problem atau klik icon new folder.



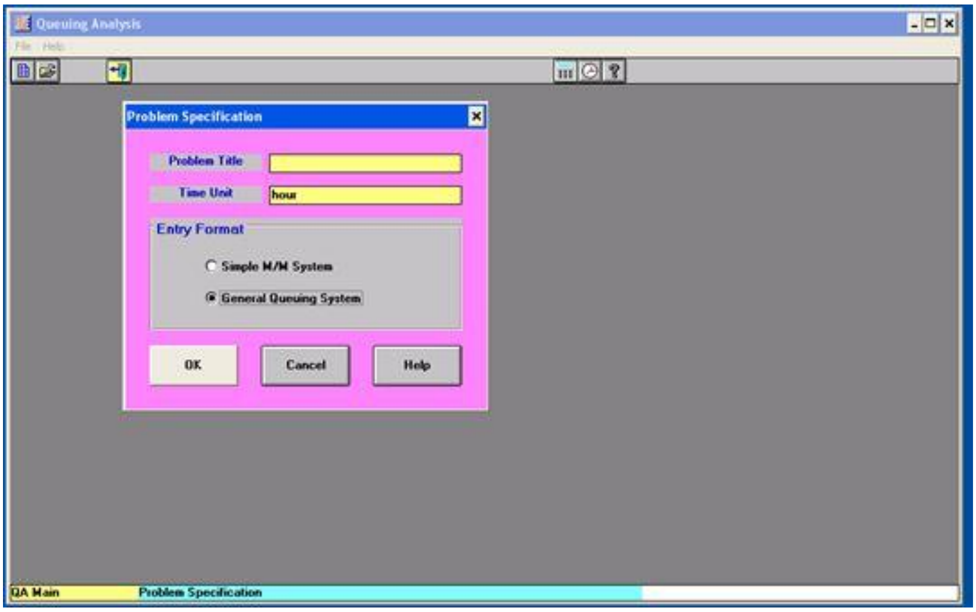
3. Akan muncul Problem Spesification.

Langkah Pertama : Masukkan judul masalah di Problem title. Judul akan kemudian akan muncul pada bagian atas untuk tampilan windows berikutnya.

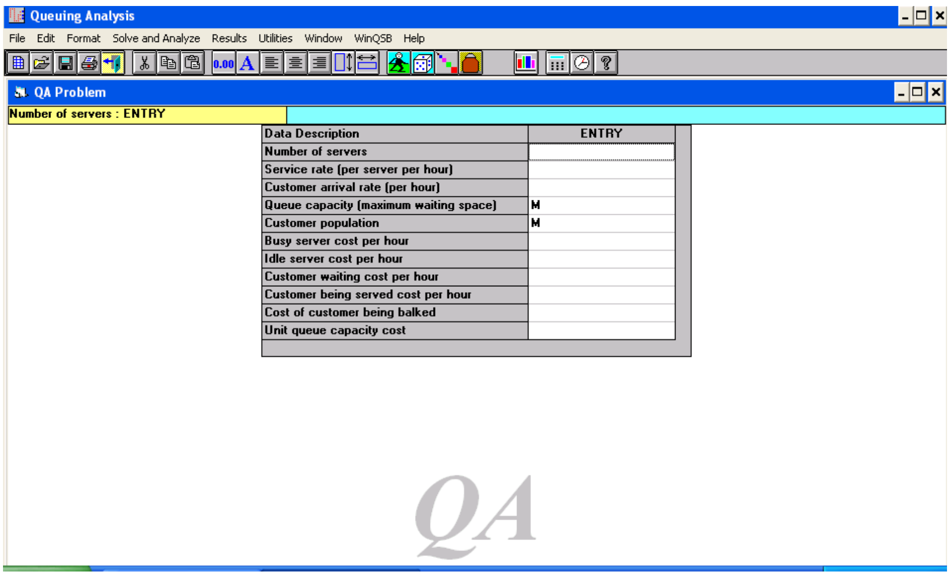
Langkah Kedua : masukkan satuan waktu yang sesuai dengan masalah. Satuan waktu standar adalah jam.

Langkah Ketiga : Pilih/klik salah satu dari format masukannya

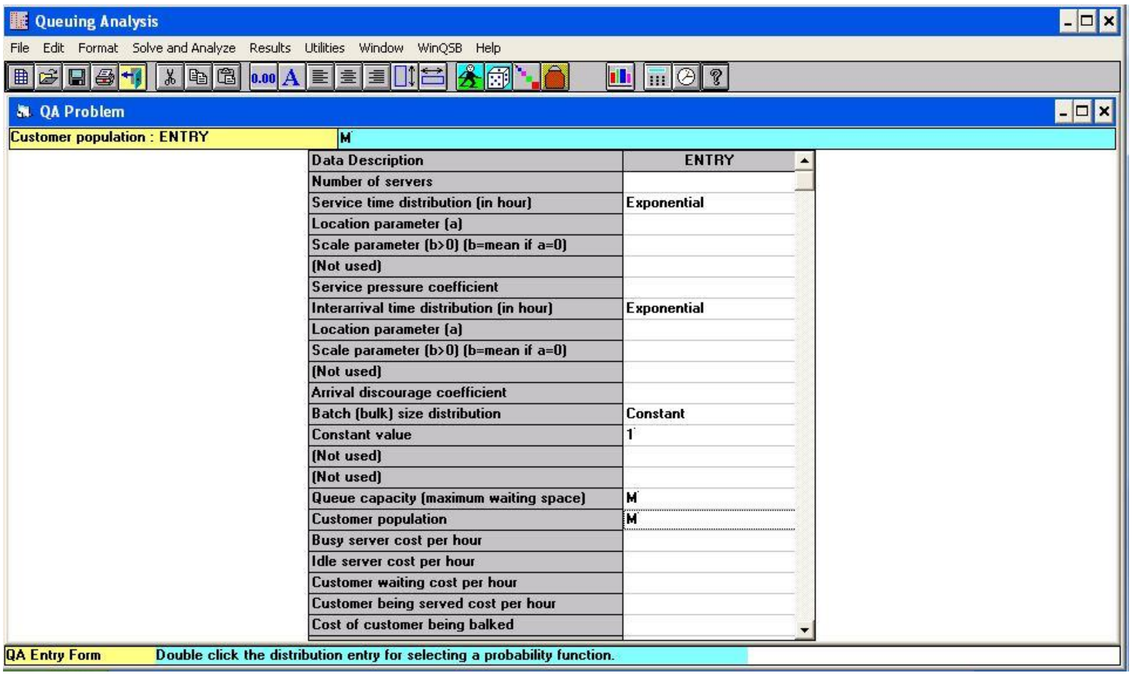
- **Simple M/M System** jika diketahui bahwa kedatangan pelanggan dan pelayanannya terdistribusi Poisson.
- **General Queueing System**. Format GQS digunakan untuk model secara umum. Model M/M dapat pula dientrikan pada format GQS.



Berikut tampilan jika dipilih Simple M/M System. Klik Ok.



Berikut tampilan jika dipilih General Queuing System. Klik OK.

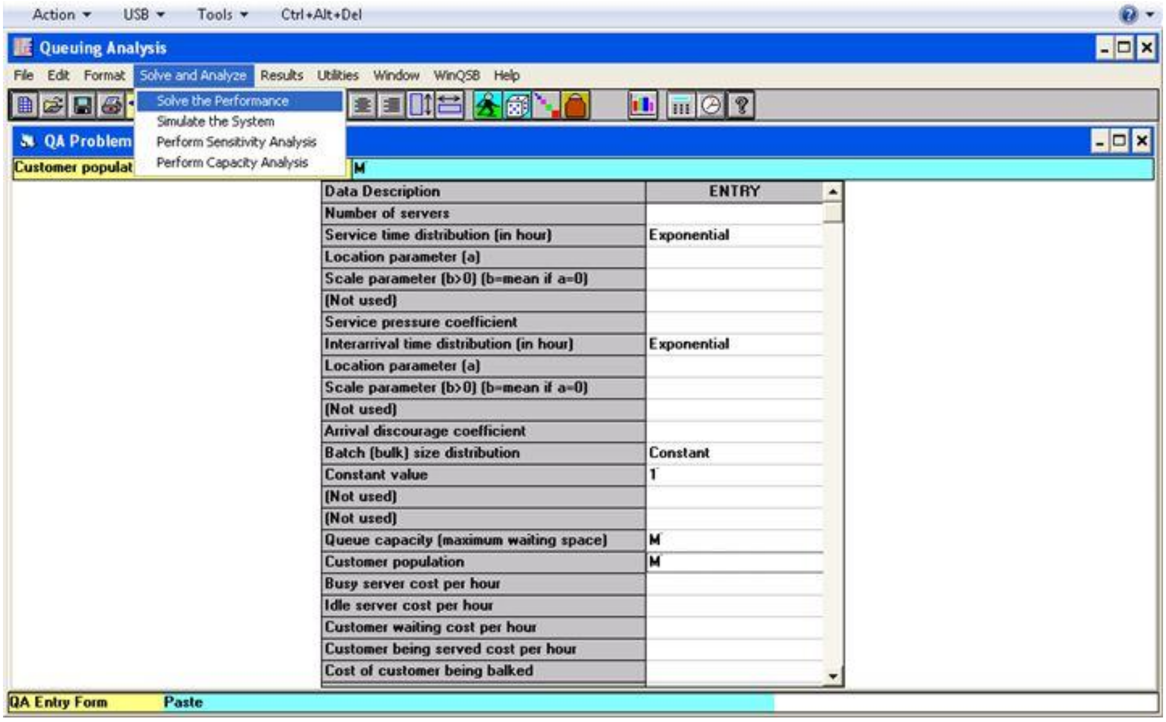


Catatan :

Number of servers	: Banyaknya server
Service time distribution (in hour)	: distribusi waktu pelayanan
Location parameter (a)	: parameter yang digunakan pada D. Erlang
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	: parameter yang digunakan pada D. Erlang
(not used)	: parameter yang digunakan pada D. Erlang
Service pressure coefficient	: parameter yang digunakan pada D. Erlang
Interarrival time distribution (in hour)	: distribusi waktu antar kedatangan
Location parameter (a)	: parameter yang digunakan pada D. Erlang
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	: parameter yang digunakan pada D. Erlang
(not used)	: parameter yang digunakan pada D. Erlang
Arrival discourage coefficient	: parameter yang digunakan pada D. Erlang
Batch (bulk) size distribution	: distribusi rombongan kedatangan
Constant value	: nilai konstan
(not used)	: -
(not used)	: -
Queue capacity (maximum waiting space)	: kapasitas antrian (maksimum banyaknya yg mengantri), M adalah simbol untuk infinity
Customer population	: populasi pelanggan, M adalah simbol untuk infinity
Busy server cost per hour	: biaya pelayan yang sibuk setiap jam
Idle server cost per hour	: biaya pelayan yang menganggur setiap jam
Customer waiting cost per hour	: biaya tunggu pelanggan
Customer being served cost per hour	: biaya pelayanan pelanggan setiap jam
Cost of customer being balked	: biaya pelanggan

4. Isi kolom dengan nilai yang sesuai dengan kasus yang akan diselesaikan.

5. Kemudian pilih menu Solve and Analyze > Solve The Performance atau klik icon dari Solve The Performance.



6. Kemudian akan muncul tampilan hasil analisis WinQSB.

Bagian VI
Model Antrian M/M/c

Model Antrian M/M/c merupakan model antrian dimana waktu antar kedatangannya terdistribusi eksponensial dengan parameter λ(rata-rata laju kedatangan), waktu pelayanan terdistribusi eksponensial dengan parameter μ(rata-rata waktu pelayanan), banyaknya server ada c, kapasitas sistem tidak terbatas, dan disiplin antrian yang dipakai adalah FCFS. Nilai harapan waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan satu pelanggan adalah $1/\lambda$ dan $1/\mu$.

Karena waktu antar kedatangan terdistribusi eksponensial dengan rata-rata $1/\lambda$, maka dalam waktu t satuan waktu, hal ini ekuivalen dengan pola kedatangannya terdistribusi poisson dengan rata-rata λt. Oleh karena itu, model M/M/c sering pula disebut input Distribusi Poisson dan waktu pelayanan terdistribusi Eksponensial.

Pembangunan model ini berdasarkan sifat steady state pada antrian, yaitu kondisi yang diperoleh setelah sistem antrian dioperasikan dalam waktu yang lama.

Didefinisikan :

n = banyaknya pelanggan dalam sistem (baik yang sedang mengantri maupun yang sedang dilayani)

λ_n = laju kedatangan n pelanggan dalam sistem

μ_n = laju pelayanan n pelanggan dalam sistem

p_n = probability steady state n pelanggan dalam sistem

dengan

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1}\right) p_0, \qquad n = 1,2,\dots$$

Ukuran Keefektifan untuk model antrian M/M/c

$$a.\, L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n$$

$$b.\, L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) p_n$$

Misalkan parameter λ_{eff} adalah laju kedatangan efektif. Ketika semua pelanggan dapat memasuki sistem, nilai dari λ_{eff} sama dengan λ. Akan tetapi, ketika pelanggan tidak dapat memasuki sistem karena sudah penuh, maka $\lambda_{eff} < \lambda$. Darisini didapatkan

$$c. W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}}$$

$$d. W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}}$$

Dari hubungan

$$\begin{pmatrix}\text{nilai harapan waktu menunggu}\\ \text{dalam sistem}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{nilai harapan waktu menunggu}\\ \text{dalam antrian}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{nilai harapan}\\ \text{waktu pelayanan}\end{pmatrix}$$

Diperoleh

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$$

Sistem antrian dikatakan efektif jika rata-rata banyaknya server yang sibuk sama dengan selisih antara rata-rata banyaknya pelanggan dan pelayan dalam sistem dan dalam antrian. Jadi,

$$e. \bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$$

Contoh Kasus M/M/I.

Sebuah rumah sakit mempunyai satu komputer dan satu kasir yang memberikan pelayanan pembayaran kepada pasien yang telah diperbolehkan pulang. Rata-rata kedatangan pasien yang membayar 40 pasien per jam. Kasir dapat melayani rata-rata 120 pasien per jam. Jika diasumsikan model sistem antrian yang digunakan adalah (M/M/I), hitunglah ukuran keefektifan antrian tersebut dan jelaskan.

Jawaban :

Dari kasus tersebut, diketahui bahwa satuan waktu yang digunakan adalah jam. Kemudian diketahui pula nilai-nilai parameter

$\lambda = 40$ pasien per jam

μ = 120 pasien per jam.

Akan digunakan WinQSB untuk mencari ukuran keefektifan dari antrian tersebut.

1). Pilih new problem, kemudian Simple M/M System.

2). Masukkan data-data sesuai yang telah diketahui seperti pada gambar berikut :

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	120
Customer arrival rate (per hour)	40
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

3). Pilih solve and analyst > solve the performance

System Performance Summary for Contoh kasus mm1

11-05-2012	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	40.0000
3	Service rate per server (mu) per hour =	120.0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	40.0000
5	Overall system effective service rate per hour =	40.0000
6	Overall system utilization =	33.3333 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0.5000
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0.1667
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0.5000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.0125 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.0042 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.0125 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	66.6667 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	33.3333 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	$0
17	Total cost of idle server per hour =	$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	$0
19	Total cost of customer being served per hour =	$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	$0
21	Total queue space cost per hour =	$0
22	Total system cost per hour =	$0

Dari tabel yang terakhir diperoleh bahwa

a. p = 33,3333%

Angka tersebut menunjukkan bahwa operator akan sibuk melayani customer selama 33,33% waktunya. Sedangkan 66,67% dari waktunya (1-p) yang sering disebut idle time akan digunakan operator untuk istirahat, dll

b. Ls = 0.5000
   Angka tersebut menunjukkan bahwa kasir dapat mengharapkan 0,5 orang pasien yang berada dalam sistem

c. Lq = 0.1667
   Angka tersebut menunjukkan bahwa pasien yang menunggu untuk dilayani dalam sistem sebanyak 0,1667 pasien

d. Ws = 0.0125 jam
   Waktu tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata pasien menunggu dalam sistem selama 0,0125 jam.

e. Wq = 0.0042 jam
   Angka tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata pasien menunggu dalam sistem selama 0,0042 jam.

Contoh Kasus M/M/3

Front office UMB menggunakan tiga buah komputer dan 3 orang staff untuk menangani penerimaan pendaftaran mahasiswa baru. Waktu rata-rata yang dibutuhkan untuk penerimaan adalah 7 menit. Sehari jam pengoperasian komputer 12 jam. Total penerimaan pendaftaran mahasiswa sebanyak 60 orang per hari. Hitunglah ukuran keefektifan antrian tersebut dan jelaskan.

Jawaban :

c = 3

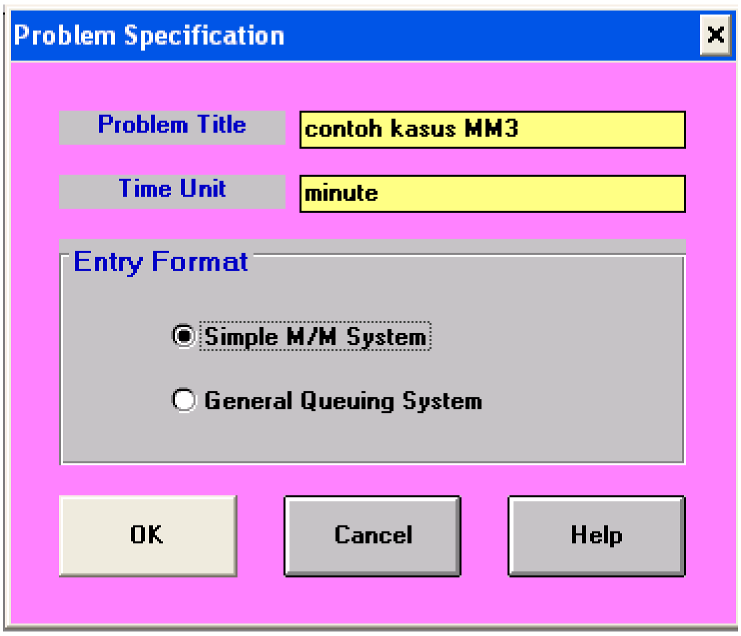
1/mu = 7 menit

Lambda= 60 / 12 = 5 orang per jam → 1/lambda = 1/5 jam = 12 menit

Akan digunakan WinQSB untuk mencari ukuran keefektifan dari antrian tersebut.

1). Pilih new problem, kemudian Simple M/M System.

2). Masukkan data-data sesuai yang telah diketahui seperti pada gambar berikut :



Data Description	ENTRY
Number of servers	3
Service rate (per server per minute)	7
Customer arrival rate (per minute)	12
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per minute	
Idle server cost per minute	
Customer waiting cost per minute	
Customer being served cost per minute	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

3). Pilih solve and analyst > solve the performance

11-06-2012	Performance Measure	Result
1	System: M/M/3	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per minute =	12.0000
3	Service rate per server (mu) per minute =	7.0000
4	Overall system effective arrival rate per minute =	12.0000
5	Overall system effective service rate per minute =	12.0000
6	Overall system utilization =	57.1429 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2.1395
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0.4252
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1.3333
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.1783 minutes
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.0354 minutes
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.1111 minutes
13	The probability that all servers are idle (Po) =	16.2791 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	31.8937 %
15	Average number of customers being balked per minute =	0
16	Total cost of busy server per minute =	$0
17	Total cost of idle server per minute =	$0
18	Total cost of customer waiting per minute =	$0
19	Total cost of customer being served per minute =	$0
20	Total cost of customer being balked per minute =	$0
21	Total queue space cost per minute =	$0
22	Total system cost per minute =	$0

Dari tabel yang terakhir diperoleh bahwa

a. $p = 57,1429\ \%$
   Angka tersebut menunjukkan bahwa operator akan sibuk melayani customer selama 57,1429% waktunya. Sedangkan 42,8571% dari waktunya (1-p) yang sering disebut idle time akan digunakan operator untuk istirahat, dll

b. Ls = 2.1395
   Angka tersebut menunjukkan bahwa kasir dapat mengharapkan 2.1395 orang pasien yang berada dalam sistem

c. Lq = 0.4252
   Angka tersebut menunjukkan bahwa pasien yang menunggu untuk dilayani dalam sistem sebanyak 0.4252 pasien

d. Ws = 0.1783 menit
   Waktu tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata pasien menunggu dalam sistem selama 0,1783 menit.

e. Wq = 0.0354 jam
   Angka tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata pasien menunggu dalam sistem selama 0,0354 jam.

f. $\bar{c} = c \text{ x } p = 3\ x\ 57.1429\% = 1,7143$
   Angka tersebut menunjukkan nilai harapan pelayan sibuk adalah 1,7143 orang.