

Persamaan Diferensial

Pertemuan I

Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

September 8, 2016

Skydiver



Figure: Penerjun Payung

Skydiver

Asumsi untuk pergerakan skydiver

- 1 gaya gravitasi
- 2 gaya hambat karena atmosfer

Hukum Newton II

$$mg - kv^2 = m \frac{d^2v}{dt^2}$$

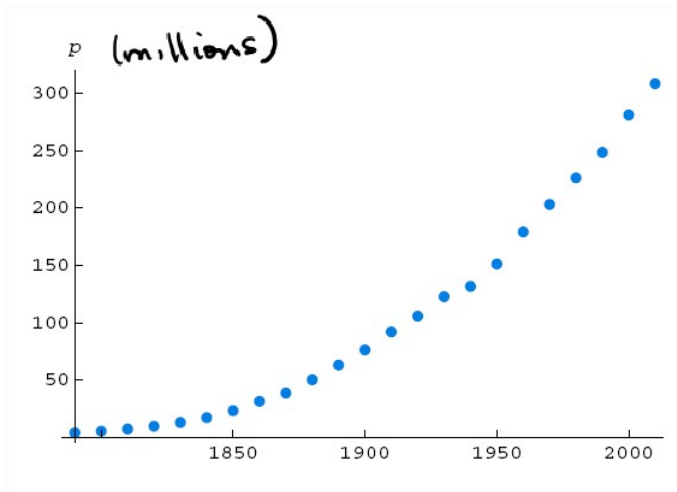
Population

http://www.census.gov/popclock/



Figure: Pertumbuhan Populasi

U.S Census



Population

Thomas Maltus, An Essay on the principle of Population, 1798

“Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio.”

Population

Thomas Maltus, An Essay on the principle of Population, 1798

“Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio.”

Asumsi

Laju pertumbuhan dari populasi proporsional terhadap populasinya.

Population

Thomas Maltus, An Essay on the principle of Population, 1798

“Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio.”

Asumsi

Laju pertumbuhan dari populasi proporsional terhadap populasinya.

Model

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P > 0$$

Tipe Variabel

Tiga tipe dasar variabel yang digunakan dalam model persamaan diferensial adalah

- 1 Variabel independent

Tipe Variabel

Tiga tipe dasar variabel yang digunakan dalam model persamaan diferensial adalah

- 1 Variabel independent
- 2 Variabel dependent

Tipe Variabel

Tiga tipe dasar variabel yang digunakan dalam model persamaan diferensial adalah

- 1 Variabel independent
- 2 Variabel dependent
- 3 Parameter

Definisi Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial

adalah persamaan yang memuat satu atau lebih variabel dependent terhadap satu atau lebih variabel independent.

Contoh

$$① \frac{d^2y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

$$② \frac{d^4x}{dt^4} + 5 \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$$

$$③ \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

$$④ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Klasifikasi

berdasarkan banyaknya variabel independent, persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis yaitu :

- Persamaan Diferensial Elementer (PDE)

Klasifikasi

berdasarkan banyaknya variabel independent, persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis yaitu :

- Persamaan Diferensial Elementer (PDE)

Definisi

PDE adalah persamaan diferensial dari satu atau lebih variabel dependent terhadap satu variabel independent.

Klasifikasi

berdasarkan banyaknya variabel independent, persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis yaitu :

- Persamaan Diferensial Elementer (PDE)

Definisi

PDE adalah persamaan diferensial dari satu atau lebih variabel dependent terhadap satu variabel independent.

- Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Klasifikasi

berdasarkan banyaknya variabel independent, persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis yaitu :

- Persamaan Diferensial Elementer (PDE)

Definisi

PDE adalah persamaan diferensial dari satu atau lebih variabel dependent terhadap satu variabel independent.

- Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Definisi

PDP adalah persamaan diferensial dari satu atau lebih variabel dependent terhadap lebih dari satu variabel independent.

Klasifikasi

Berdasarkan sifat linearitasnya, persamaan diferensial juga dibagi menjadi dua yaitu :

- Persamaan Diferensial Linear
- Persamaan Diferensial Nonlinear

Contoh

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Order

Order dari suatu persamaan diferensial adalah nilai turunan tertinggi dari suatu persamaan diferensial.

Contoh

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Solusi

Persamaan diferensial order n secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk

$$F \left[x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n} \right] = 0 \quad (1)$$

dengan F adalah fungsi real.

- Fungsi f sedemikian sehingga $y = f(x)$ memenuhi Persamaan 1 disebut dengan solusi eksplisit.
- Relasi $g(x, y) = 0$ disebut solusi implisit jika memenuhi Persamaan 1.

Contoh

Butkikan bahwa fungsi f yang terdefinisi di setiap bilangan real x

$$f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$$

merupakan solusi eksplisit dari persamaan diferensial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

Nilai Awal dan Syarat Batas

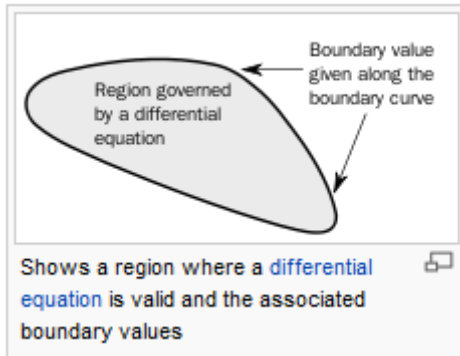


Figure: Syarat tambahan

Soal 1

hitunglah derivatif dari $y = e^{2t} \cos 3t$

Soal 2

Hitunglah derivatif dari $y = \frac{t}{1-t^2}$

Soal 3

Tentukan bentuk kurva yang diparametrisasi di bidang- xy berikut :
 $x = 3 \sin 2t, y = \cos 2t, 0 \leq t \leq \pi$

Soal 4

Dari kelima fungsi berikut, yang merupakan fungsi naik pada interval $0 < t < 1$ adalah

- ① $1 - t^2$
- ② e^{-t}
- ③ $2e^{2t} - e^t$
- ④ $4 + \cos \pi t$
- ⑤ $t^2 - 1$

Soal 5

Nilai integral tertentu $-\frac{\pi}{2} \int^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$ adalah

Soal 6

Hitunglah nilai integral berikut :

$$\int x^2 (x^3 + 1)^3 dx$$

Soal 7

Hitunglah integral berikut :

$$-1 \int^3 \frac{3}{4+3t} dt = \dots$$

Soal 8

Jika $f''(t) = 12e^{2t} + 18 \sin 3t$ dan $f'(0) = f(0) = 3$, maka $f(t) = \dots$

Soal 9

Tentukan kemiringan $\frac{dy}{dx}$ untuk garis singgung kurva
 $x = e^t, y = 1 + t^2$
di $t = 3$

Interpretasi hasil

Interpreting your score:

Skor	Interpretasi
8-9	Anda sudah siap belajar Persamaan Diferensial
6-7	Pelajari kembali soal-soal yang jawaban Anda salah
5 ke bawah	Anda disarankan mempelajari kembali materi prasyarat

Referensi

- Ross, S.L, Differential Equations, 1984, J. Willey, New York
- Boyce, W.E., dan Diprima, R.C. Elementary Differential Equations dan Boundary Value Problems, 1992, J. Willey, New York.
- Zill, Dennis G., Cullen, Michael R. 1997. Differential Equations with Boundary-value Problems. Fourth Edition. USA : Brooks/Cole Publishing Company.
- Trench, W.F. 2013. Elementary Differential Equations.