TEORI ANTRIAN

Pertemuan 3, Rantai Markov pada teori antrian

Nikenasih Binatari
nikenasih@uny.ac.id

PRESENTATION PARTS

1
- Rantai Markov Berhingga ***

2
- Proses Poisson

3
- Rantai Markov waktu kontinu

4
- Proses Kelahiran dan kematian

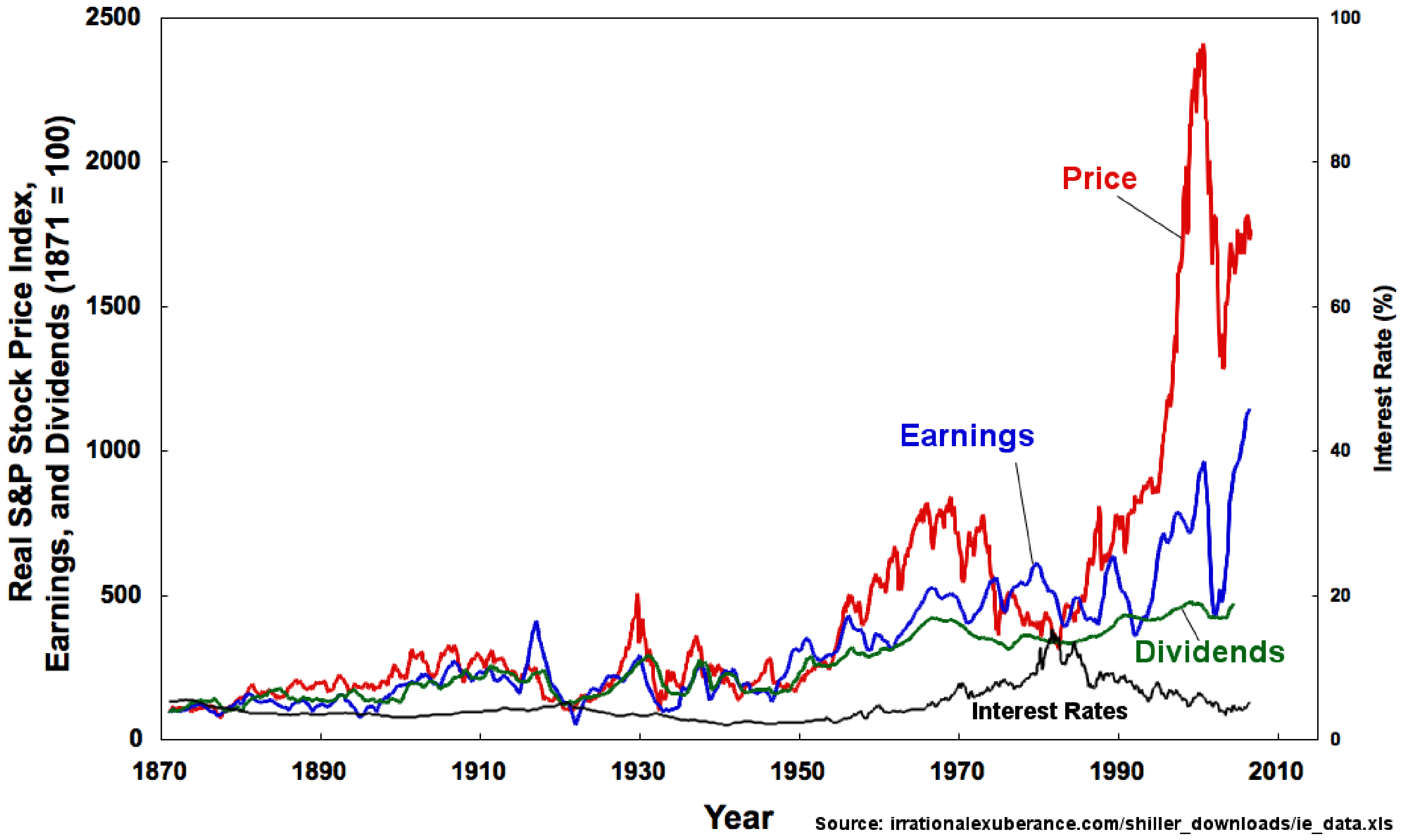
I. Rantai Markov Berhingga

Definisi 1.

Diberikan T suatu himpunan dan $t \in T$ suatu parameter, pada kasus ini merupakan waktu. Misalkan X(t) variabel random $\forall t \in T$, himpunan variabel random $\{X(t), t \in T\}$ disebut dengan **proses stokastik**.

Interpretasi :

X(t) state proses stokastik pada saat t.



Real S&P Stock Price Index, Earnings, and Dividends (1871 = 100)
Interest Rate (%)
Price
Earnings
Dividends
Interest Rates
2500
2000
1500
1000
500
0
100
80
60
40
20
0
1870
1890
1910
1930
1950
1970
1990
2010
Year
Source: irrationalexuberance.com/shiller_downloads/ie_data.xls

Jenis Stokastik Proses

- Jika T terhitung, stokastik proses dikatakan proses waktu diskrit.
- Jika T merupakan interval $[0,\infty)$, stokastik proses dikatakan proses waktu kontinu.

Himpunan nilai $X(t)$ kemudian disebut state space.

Definisi 2.

Suatu stokastik proses $\{X(n), n \in N\}$ disebut rantai markov jika untuk setiap waktu $n \in N$ dan untuk setiap states $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ berlaku

$$P\{X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

$$= P\{X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

Definisi 3.

Peluang bersyarat

$$P\{X_n = j | X_{n-1} = i\}, i, j \in S$$

disebut dengan peluang transisi dari state i ke state j, dan dinotasikan dengan $p_{ij}(n)$.

Definisi 4.

Rantai markov dikatakan homogen terhadap waktu jika $p_{ij}(n)$ tidak bergantung atas n. Dengan kata lain,

$$P\{X_n = j | X_{n-1} = i\} = P\{X_{n+m} = j | P_{n+m-1} = i\}$$

untuk m $\in$ N dan m $\geq$ - (n – 1).

Berikutnya,

- diasumsikan rantai markov homogen terhadap waktu.
- dinotasikan peluang transisi dari state i ke state j adalah p_{ij}. State yang mungkin 1,2, ..., N.

Definisi 5.

Matriks transisi P adalah matriks berukuran N x N dengan entri ke (i,j) P_{ij} adalah p_{ij}.

Matriks transisi dari rantai markov harus merupakan matriks stokastik. Dengan kata lain, entri matriks transisi harus memenuhi 2 syarat :

1. $0 \leq P_{ij} \leq 1, 1 \leq i, j \leq N$
2. $\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1, 1 \leq i \leq N$

Selanjutnya, dimisalkan distribusi peluang mula-mula (*initial probability distribution*) diketahui.

Misalkan ϕ distribusi peluang mula-mula dengan $P\{X_0 = i\}, i = 1,2, \dots, N$.

Definisi 6.

Peluang n-langkah p_{ij}^n adalah peluang berada pada state j dengan n langkah dari state i. Dengan kata lain,

$$p_{ij}^n = P\{X_n = j | X_0 = i\} = P\{X_{n+m} = j | X_m = i\}$$

Darisini diperoleh bahwa

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i \in S} \phi(i) p_n(i,j)$$

$$= \sum_{i \in S} \phi(i) P\{X_n = j | X_0 = i\}$$

dengan S adalah state space.

Sifat 7.
Peluang transisi n-langkah p_{ij}^n merupakan entri ke-(i,j) dari matriks P^n.

Akibatnya,

$$P^n P = P^{n+1}$$

Misalkan distribusi peluang mula-mula dapat dinyatakan dalam vektor

$$\vec{\phi} = (\phi_0(1), \phi_0(2), \dots, \phi_0(N)),$$

maka distribusi pada saat waktu n, $\phi_n(i) = P\{X_n = i\}$:

$$\vec{\phi}_n = \vec{\phi}_0 P^n$$

Referensi

Constantin, Hannah. Markov Chains and Queueing Theory. 2011
dapat diakses di alamat website
http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Constantin.pdf

THANK YOU

Nikenasih Binatari

nikenasih@uny.ac.id

Karangmalang Sleman Yogyakarta