

# PENENTUAN HARGA OPSI SAHAM TIPE AMERIKA DENGAN PEMBAGIAN DEVIDEN MENGGUNAKAN *FINITE ELEMENT METHOD*

Nikenasih Binatari, Rosita Kusumawati, Ade Latif

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta  
Jl. Colombo No. 1 Yogyakarta  
e-mail: [nikenasih@yahoo.com](mailto:nikenasih@yahoo.com)

## Abstrak

Perubahan harga saham, baik saat harga saham mengalami kenaikan maupun penurunan harga, dapat dimanfaatkan untuk memperoleh keuntungan. Salah satu instrumen investasi yang dapat digunakan untuk memperoleh keuntungan dari perubahan harga saham adalah opsi saham. Selain itu, opsi saham juga dapat digunakan untuk meminimalkan jumlah kerugian yang mungkin diderita investor. Salah satu kunci untuk memperoleh keuntungan dari opsi saham adalah ketepatan penentuan harga eksekusi dari opsi saham. Model Black-Scholes merupakan model yang telah digunakan secara luas sebagai pendekatan untuk menyelesaikan masalah penentuan harga eksekusi dari opsi saham. Asumsi model ini adalah saham tidak memberikan pembagian deviden, tidak ada biaya transaksi, suku bunga bebas resiko, serta perubahan harga saham mengikuti pola random. Sementara itu, sebagian besar opsi saham yang diperjualbelikan pada kenyataannya membayarkan deviden. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan harga eksekusi opsi saham dari model Black-Scholes dengan pembagian deviden menggunakan finite element method (FEM). Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada kasus tanggal kadaluarsa satu tahun, harga eksekusi \$10, suku bunga bebas resiko 10%, proporsi pembagian deviden 5%, volatilitas harga saham 0,32, opsi beli dijual di pasar seharga \$1,5 dan opsi jual dijual di pasar seharga \$6 adalah harga opsi beli \$1,8 dan harga opsi jual \$5,3. Karena harga opsi beli di pasar lebih murah maka sebaiknya investor membeli opsi sementara untuk harga opsi jual, karena harga opsi jual di pasar lebih mahal maka sebaiknya investor tidak membeli opsi.

Kata kunci: opsi saham, Black-Scholes, FEM

## Abstract

Changes in stock price, either when the stock price increases or decreases, can be exploited for profit. One of the investment instruments that can be used to take advantage of the stock price change is a stock option. In addition, stock options can also be used to minimize the amount of losses that may be suffered by investors. One of the keys to take advantage of the stock options is the precision determination of the type of stock option exercise price. Black-Scholes model is a model that has been widely used as an approach to solve the problem of determining the exercise price of stock options. The assumption of this model is not giving the stock dividend, no transaction costs, risk-free interest rates, and changes in stock prices follow a random pattern. Meanwhile, most of the stock options are traded in fact pay dividends. Because the most heavily traded stock options is stock options American type, then the purpose of this study was to determine the Black-Scholes option pricing American type stock with the dividend model using finite element method. At case one year expiration date, execution price \$10, risk-free interest rate 10%, paid dividend proportion 5%, stock price volatility 0,32, call option price at market \$1,5 and put option price at market \$6 then the result shows that call option price is \$1,8 and put option price is \$5,3. Because call option price is cheaper then investor better buy the option while for put option price, because it's more expensive then investor better not buy the option.

Keywords: pricing options, Black-Scholes, FEM

## **PENDAHULUAN**

Investasi merupakan penempatan sejumlah dana pada saat ini dengan harapan untuk memperoleh keuntungan di waktu mendatang. Perkembangan dunia investasi tidak saja ditunjukkan dengan adanya peningkatan jumlah uang yang diinvestasikan maupun dengan banyaknya jumlah investor yang berinvestasi, tetapi juga ditunjukkan oleh semakin banyaknya alternatif instrumen investasi yang bisa dijadikan pilihan investor untuk berinvestasi.

Adanya pasar modal, investasi tidak hanya dapat dilakukan pada aktiva riil (*real assets*), seperti membangun pabrik, membuat produk baru, menambah saluran distribusi, dan sebagainya. Investasi juga dapat dilakukan pada aktiva finansial (*financial assets*), atau sekuritas seperti membeli sertifikat deposito, *commercial paper*, saham, obligasi atau sertifikat reksadana (Husnan, 2001: 3).

Salah satu instrumen investasi yang telah banyak digunakan investor adalah saham. Saham sendiri berupa selembar kertas yang menunjukkan hak untuk memperoleh bagian dari keuntungan sekaligus kepemilikan atas perusahaan yang menerbitkan saham tersebut. Tujuan perusahaan menerbitkan saham adalah untuk memperoleh modal pengembangan usaha.

Perusahaan menawarkan sahamnya kepada investor melalui *IPO (Initial Public Offering)* di pasar primer. Setelah saham menjadi milik investor, saham dapat diperdagangkan kembali di pasar sekunder. Investor memperoleh keuntungan atau kerugian dari selisih antara harga beli dan harga jual yang terbentuk oleh adanya perubahan harga saham pada perdagangan saham di bursa saham. Perubahan harga saham dipengaruhi oleh berbagai macam faktor, beberapa diantaranya adalah faktor-faktor eksternal seperti kondisi politik, ekonomi, keamanan, psikologis pasar. Faktor-faktor tersebut sulit diprediksi dan sebagai akibatnya harga saham berubah-ubah secara acak. Apabila harga saham turun hingga titik nol, investor akan kehilangan seluruh investasi yang dikeluarkan untuk membeli saham.

Perubahan harga saham, baik saat harga saham mengalami kenaikan maupun penurunan harga, dapat dimanfaatkan untuk memperoleh keuntungan. Salah satu instrumen investasi yang dapat digunakan untuk memperoleh keuntungan dari perubahan harga saham adalah opsi saham. Selain itu, opsi saham juga dapat digunakan untuk meminimalkan jumlah kerugian yang mungkin diderita investor. Menurut Pham (2007: 5), opsi saham didefinisikan sebagai perjanjian atau kontrak antara penjual opsi saham

dengan pembeli opsi saham dimana penjual menjamin adanya hak (bukan suatu kewajiban) dari pembeli opsi saham untuk membeli atau menjual saham tertentu pada waktu dan harga yang telah ditentukan.

Berdasarkan periode waktu penggunaannya, opsi saham dikelompokkan menjadi dua, yaitu opsi saham tipe Amerika dan opsi saham tipe Eropa. Opsi saham tipe Amerika adalah opsi saham yang dapat dieksekusi sebelum waktu kadaluwarsa atau pada waktu kadaluwarsa. Opsi saham tipe Eropa adalah opsi saham yang bisa dieksekusi hanya pada waktu kadaluwarsa. Opsi saham yang paling banyak diperdagangkan pada bursa opsi saham adalah opsi saham tipe Amerika (Hull, 2006: 5). Hal ini disebabkan fleksibilitas waktu penggunaan opsi saham tipe Amerika sehingga memungkinkan investor memperoleh keuntungan yang lebih besar jika dibandingkan opsi saham tipe Eropa.

Investor memiliki kesempatan untuk mendapatkan keuntungan pada setiap situasi pasar apabila tepat memilih strategi berinvestasi pada kontrak opsi saham. Kunci untuk memperoleh keuntungan dari opsi saham tipe Amerika adalah ketepatan penentuan harga dan batas eksekusi opsi saham. Belum ditemukan rumusan eksplisit untuk menentukan harga dan batas eksekusi opsi saham tipe Amerika. Oleh karena itu, di sini akan ditentukan harga dan batas eksekusinya

menggunakan metode aproksimasi yang dikenal dengan nama Metode Elemen Hingga (*Finite Element Method*, FEM).

## **METODE PENELITIAN**

Model Black-Scholes adalah model yang dikembangkan oleh Fisher Black dan Myron Scholes pada tahun 1973 (Black, 1973) untuk menentukan harga opsi tipe Eropa berupa persamaan diferensial parsial berorder dua. Pengembangan model Black-Scholes terus dilakukan sehingga dapat digunakan untuk menentukan harga opsi tipe Amerika, dan memenuhi asumsi-asumsi yang semakin mendekati keadaan sebenarnya.

Asumsi-asumsi yang digunakan pada model Black-Scholes adalah sebagai berikut: (1) Volatilitas dan rata-rata pertumbuhan harga saham konstan. Asumsi yang digunakan adalah volatilitas dan rata-rata pertumbuhan harga saham konstan sepanjang umur opsi. (2) Perubahan harga saham bersifat acak. Asumsi yang digunakan adalah perubahan harga saham bersifat acak mengikuti gerakan Brown. (3) Suku bunga bebas resiko konstan. Model Black-Scholes menggunakan dua asumsi terkait suku bunga bebas resiko. Pertama, suku bunga pinjaman dan pemberian pinjaman adalah sama. Kedua adalah suku bunga bersifat konstan dan berlaku sama sepanjang umur opsi. (4) Perdagangan opsi tidak

dipungut pajak dan biaya transaksi. Asumsi yang digunakan adalah pada perdagangan opsi tidak dipungut pajak ataupun biaya transaksi yang meliputi komisi dan spread pada proses perdagangan saham dan opsi, serta biaya-biaya lain terkait perdagangan opsi. (5) Tidak ada peluang arbitrase bebas resiko. Asumsi ini digunakan pada model Black-Scholes untuk membangun portofolio cegah resiko yang memuat kontrak opsi dengan saham sebagai aset yang mendasari. (6) Pembagian dividen bersifat kontinu sepanjang umur opsi. Asumsi yang digunakan adalah dividen dibagikan dengan proporsi tertentu secara konstan dan kontinu sepanjang umur opsi. (7) Perdagangan opsi bersifat kontinu. Perdagangan opsi diasumsikan dapat dilaksanakan tidak hanya pada jam-jam perdagangan, namun dapat dilaksanakan sewaktu-waktu. Asumsi ini memungkinkan opsi tipe Amerika dapat dieksekusi sewaktu-waktu sepanjang umur opsi dengan mengabaikan jam-jam perdagangan opsi.

## **HASIL DAN PEMBAHASAN**

Berdasarkan asumsi-asumsi yang digunakan pada model Black Scholes tersebut, model harga saham yang memenuhi asumsi pertama, kedua, keenam dan ketujuh, adalah model harga saham, sesuai dengan persamaan (1).

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \quad (1)$$

dengan,  $S$  merupakan fungsi harga saham atas waktu  $t$ , dan  $\mu$  merupakan rata-rata pertumbuhan harga saham persatuan waktu,  $\sigma$  volatilitas harga saham,  $W$  merupakan gerakan Brown, dan  $q$  adalah proporsi deviden yang dibayarkan.

Harga opsi dinyatakan sebagai fungsi atas harga saham  $S$  dan waktu  $t$ . Misalkan fungsi  $V$  merupakan fungsi harga opsi, dan  $T$  merupakan batas umur opsi, daerah asal fungsi  $V$  adalah  $Dv = \{(S, t): 0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ .

Fungsi  $V$  diasumsikan terdiferensial dua kali terhadap  $S$ , dan satu kali terhadap  $t$ . Apabila  $S$  memenuhi Persamaan (1), maka menurut Lemma Itô diperoleh

$$V = \left[ (\mu - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW \quad (2)$$

Dalam pembentukan model Black-Scholes, unsur stokastik pada Persamaan (2) dihilangkan dengan membentuk portofolio berdasarkan strategi cegah resiko. Dibentuk portofolio bernilai  $\Pi$  yang memuat penjualan satu kontrak opsi dan pembelian saham sebanyak  $\frac{\partial V}{\partial S}$  lembar. Berdasarkan strategi tersebut, nilai portofolio  $\Pi$  pada saat  $t$  sebesar

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S \quad (3)$$

Dari asumsi keenam model Black-Scholes di atas diperoleh perubahan nilai portofolio dalam waktu singkat adalah

$$d\Pi = -dV + \frac{\partial V}{\partial S} dS + qS \frac{\partial V}{\partial S} dt \quad (4)$$

Substitusi Persamaan (2) ke Persamaan (4), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dV + \frac{\partial V}{\partial S} dS + qS \frac{\partial V}{\partial S} dt \\ &= -\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW \\ &\quad - \left[ (\mu - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial S} dS + qS \frac{\partial V}{\partial S} dt \end{aligned} \quad (5)$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (1) ke Persamaan (5), diperoleh

$$= - \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - qS \frac{\partial V}{\partial S} \right] dt \quad (6)$$

Diketahui laju perubahan nilai portofolio proporsional dengan nilai awal portofolio, dengan konstanta proporsi sebesar tingkat suku bunga bebas resiko konstan  $r$ . Sehingga dari persamaan (3) dapat diperoleh

$$d\Pi = r \left[ -V + \frac{\partial V}{\partial S} S \right] dt \quad (7)$$

Opsi dapat dieksekusi lebih awal yang mengakibatkan pertumbuhan nilai portofolio yang memuat opsi menjadi lebih besar atau sama dengan portofolio yang diinvestasikan ke instrumen bebas resiko dan berkembang sepanjang sisa umur opsi. Dari pilihan tersebut dan persamaan (6) dan (7) dapat diperoleh hubungan di bawah ini.

$$\begin{aligned} - \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - qS \frac{\partial V}{\partial S} \right] dt &\geq r \left[ -V + \frac{\partial V}{\partial S} S \right] dt \\ \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial V}{\partial S} S - rV &\leq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Untuk menyelesaikan Model Black-Scholes Opsi Tipe Amerika diperlukan kajian lanjutan mengenai syarat batas dan nilai awal opsi tipe Amerika.

### Nilai Awal dan Syarat Batas Opsi Tipe Amerika

Didefinisikan  $C(S,t)$  dan  $P(S,t)$  dan berturut-turut sebagai harga opsi beli dan opsi jual pada saat  $t$  dan harga saham  $S$ .

#### Nilai Awal dan Syarat Batas Opsi Beli Tipe Amerika

Batas eksekusi opsi beli  $S_c(t)$  dapat didefinisikan sebagai

$$S_c(t) = \inf\{S \mid C(S,t) = S - E\}$$

Misalkan fungsi harga opsi  $V$ , disubstitusi dengan fungsi harga opsi jual  $C$ , sehingga harga opsi beli memiliki daerah asal  $D_v$ .  $D_v$  dibagi menjadi ke dalam dua daerah oleh batas eksekusi, yakni daerah kelanjutan (*continuation region*) dan daerah eksekusi (*exercise region*). Harga opsi beli pada  $D_v$  dijelaskan pada persamaan Persamaan Jamshidian opsi beli tipe Amerika.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial C}{\partial S} S - rC \\ = -(qS - rE)H(S - S_c(t)) \end{aligned}$$

Dengan  $H$  fungsi heaviside. Selain batas eksekusi, nilai awal dan syarat batas yang harus dipenuhi adalah sebagai berikut.

Pada saat tanggal kadaluwarsa, harga opsi beli memenuhi

$$C(S,T) = \max(S - E, 0), 0 \leq S \leq S_{max}$$

Pada saat harga saham sama dengan nol, maka harga opsi beli mencapai titik terendah yakni nol.

$$C(0,t) = 0, 0 \leq t \leq T$$

Pada saat harga saham mencapai harga maksimal, maka harga opsi beli mencapai titik tertinggi yakni,

$$C(S_{max},t) = S_{max} - E, 0, 0 \leq t \leq T$$

Masalah nilai awal dan syarat batas

Opsi Beli tipe Amerika adalah

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial C}{\partial S} S - rC$$

$$= -(qS - rE)H(S - S_c(t))$$

$$C(S,T) = \max(S - E, 0), 0 \leq S \leq S_{max}$$

$$S_c(t) = \inf\{S \mid C(S,t) = S - E\}$$

$$S_c(T) = E$$

$$C(0,t) = 0, 0 \leq t \leq T$$

$$C(S_{max},t) = S_{max} - E, 0, 0 \leq t \leq T$$

$$\text{untuk } (S, t) \in D \quad (9)$$

Nilai Awal dan Syarat Batas Opsi Jual Tipe Amerika

Batas eksekusi opsi jual  $S_p(t)$  dapat didefinisikan sebagai

$$S_p(t) = \sup \{S \mid P(S,t) = E - S\}$$

Misalkan fungsi harga opsi  $V$ , disubstitusi dengan fungsi harga opsi jual  $P$ , sehingga harga opsi jual memiliki daerah

asal  $D_v$ .  $D_v$  dibagi menjadi kedalam dua daerah oleh batas eksekusi, yakni daerah kelanjutan (*continuation region*) dan daerah eksekusi (*exercise region*). Harga opsi jual pada  $D_v$  dijelaskan pada persamaan Persamaan Jamshidian opsi jual tipe Amerika yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial P}{\partial S} S - rP \\ = -(rE - qS)H(S - S_p(t)) \end{aligned}$$

Selain batas eksekusi, nilai awal dan syarat batas yang harus dipenuhi adalah sebagai berikut.

Pada saat tanggal kadaluwarsa, harga opsi jual memenuhi

$$P(S,T) = \max(E - S, 0), 0 \leq S \leq S_{max}$$

Pada saat harga saham sama dengan nol, maka harga opsi jual mencapai titik maksimal yakni sebesar harga eksekusi  $E$ .

$$P(0,t) = E, 0 \leq t \leq T$$

Pada saat harga saham mencapai harga maksimal, maka harga opsi jual sama dengan nol.

$$P(S_{max},t) = 0, 0 \leq t \leq T$$

Masalah nilai awal dan syarat batas

Opsi Jual tipe Amerika adalah

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial P}{\partial S} S - rP$$

$$= -(qS - rE) + H(S_c(t) - S)$$

$$S_p(t) = \sup\{S \mid C(S,t) = E - S\}$$

$$P(S,T) = \max(E - S, 0), 0 \leq S \leq S_{max}$$

$$S_p(T) = E$$

$$\begin{aligned}
 P(0,t) &= E, 0 \leq t \leq T \\
 P(S_{max}, t) &= 0, 0 \leq t \leq T \text{ untuk} \\
 (S, t) &\in D
 \end{aligned} \tag{10}$$

**Penyelesaian Model Black-Scholes dengan Pembagian Deviden Menggunakan FEM**

FEM adalah suatu teknik untuk mencari solusi hampiran dari masalah nilai awal dan syarat batas. Pada metode ini, langkah awal penentuan solusi adalah merubah masalah nilai awal dan syarat batas ke bentuk *weak formulation*, kemudian dilanjutkan dengan membagi domain solusi menjadi sejumlah berhingga subdomain. Langkah diakhiri dengan mencari solusi hampiran pada setiap subdomain yang diasumsikan sebagai anggota ruang fungsi tertentu.

Misalkan  $(0, S_{max}) \subset R$  dan  $V = H_0^1(0, S_{max})$  adalah ruang Hibert. Diasumsikan solusi Sistem (9) merupakan elemen dari ruang  $V$ . Agar memenuhi syarat batas Dirichlet homogeny pada  $V$ , dilakukan transformasi pada harga opsi beli  $C(S, t)$  sebagai berikut.

$$U(S, t) = y(S) - C(S, t)$$

$$\text{dimana } y(S) = \frac{S_{max}-E}{S_{max}} S$$

Akibatnya, Sistem (9) dapat ditransformasi menjadi

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial U}{\partial S} S - rU = F(S, S_c(t))$$

$$S_c(t) = \inf\{S \mid U(S, t) = U(S, T)\}$$

$$U(S, T) = y(s) - \max(S - E, 0), 0 \leq S \leq S_{max}$$

$$S_c(T) = E$$

$$U(0, t) = 0, 0 \leq t \leq T$$

$$U(S_{max}, t) = 0$$

Didefinisikan operator diferensial

$$L \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial}{\partial S} - rI$$

Akibatnya diperoleh persamaan

$$\frac{\partial U}{\partial t} + LU = F(S, S_c(t)) \tag{11}$$

Didefinisikan operasi hasil kali  $\langle ., . \rangle$  dalam dalam ruang  $L_2(0, S_M)$  yang didefinisikan dengan  $\langle u, v \rangle = \langle u(S), v(S) \rangle_{[0, S_{max}]}$

$$= \int_0^{S_{max}} u(S)v(S)dS$$

Mengalikan Persamaan (11) dengan fungsi tes  $v \in V$ , diperoleh  $\langle \frac{\partial U}{\partial t}, v \rangle + \langle LU, v \rangle = \langle F, v \rangle$  (12)

Permasalahan pada Persamaan (11) menjadi mencari  $U \in V$  yang memenuhi Persamaan (12) untuk  $\forall v \in V$ .

Diberikan  $N, M \in \mathfrak{N}$ , domain  $t$  akan dibagi menjadi  $N$  subdomain sedangkan domain  $S$  akan dibagi menjadi  $M$  subdomain. Misalkan ukuran tiap interval subdomain  $t$  adalah  $k$  dan ukuran tiap interval subdomain  $S$  adalah  $h$ , akibatnya diperoleh  $k = T/N$  dan  $h = S_{max}/M$ . Dipilih  $V_h$  sebagai subruang  $V$  yang terdiri dari polinomial-polinomial berderajat satu, kontinu sepotong-sepotong dan jumlahnya berhingga. Subruang  $V_h$  terdiri dari semua fungsi  $v$  yang memenuhi

$$v_{[S_{i-1}, S_i]} \in P^1([S_{i-1}, S_i]), v(0) = v(S_M) = 0, v \in C[S_{i-1}, S_i]$$

Pembagian ruang  $V$  menjadi subruang  $V_h$  mengakibatkan permasalahan pada Persamaan (12) berubah menjadi mencari  $u_h \in V_h$  sedemikian sehingga

$$\langle \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \rangle + \langle Lu_h, v_h \rangle = \langle F, v_h \rangle \quad (13)$$

untuk  $\forall v_h \in V_h$ . Subruang  $V_h$  memiliki basis  $\{\phi_i(S)\}_{i=1}^{M-1}$ , sehingga  $V_h = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_{M-1}\}$ .

Fungsi  $\phi_i$  adalah fungsi "hat" dimana

$$\phi_i(S_j) = \delta_{ij} \text{ untuk setiap } i \text{ dan } j, \text{ dengan}$$

$\delta_{ij}$  delta kronecker.

Fungsi  $u_h^j$  merupakan elemen subruang  $V_h$ , sehingga  $u_h^j$  merupakan kombinasi linier dari basis  $V_h$ , yakni

$$u_h^j(S) = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^j \phi_i(S) \quad (14)$$

Solusi Persamaan (13) pada saat  $t^j$  cukup dengan menentukan nilai  $\alpha_i^j$  pada Persamaan (14). Dalam notasi vektor,  $\alpha_i^j$  dapat dinyatakan sebagai  $\alpha^j = [\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_{M-1}^j]$ .

#### Perhitungan pada Saat $t^N$

Batas eksekusi numerik  $S_c^N$ , diperoleh dari batas eksekusi pada saat  $T$ , yakni  $S_c(T) = E$ . Agar lebih memudahkan perhitungan, digunakan titik nodal  $S_l$  sedemikian sehingga  $S_c^N = S_l$  dimana  $S_{l-1} < S_c(T) \leq S_l, l \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$ .

Pemilihan ini didasarkan pada

$$|S_c(T) - S_c^N| \leq h.$$

Pada saat  $T$  harga  $U(S, T)$  dapat dihitung menggunakan Persamaan (1.15), sedangkan solusi hampiran  $u_h^N$  dicari dengan memilih  $u_h^N$  sebagai proyeksi orthogonal dari  $U(S, T)$  di ruang  $V_h$ . Didefinisikan  $u_h^N$  sebagai

$$u_h^N(S) = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^N \phi_i(S) \quad (15)$$

Akibat dari  $U(S, T) \in V$ , dengan Teorema Proyeksi Orthogonal diperoleh persamaan

$$\langle (U(\bullet, T) - \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^N \phi_i), \phi_l \rangle = 0 \quad (16)$$

#### Perhitungan pada Saat $t^{N-1}$

Turunan parsial  $U$  terhadap  $t$  dihampiri menggunakan rumus selisih mundur dua titik Euler. Hampiran turunan  $U$  terhadap  $t$  pada saat  $t^{N-1}$  didefinisikan dengan

$$\frac{\partial U(S, t^{N-1})}{\partial t} \approx \frac{U(S, t^N) - U(S, t^{N-1})}{k} \quad (17)$$

Substitusi hampiran turunan  $U$  terhadap  $t$  pada Persamaan (17) ke Persamaan (11) diperoleh

$$u_h^{N-1} = u_h^N(S) + kLu_h^N(S) - kF(S, S_c^N) \quad (18)$$

Dengan  $u_h^{N-1}$  adalah solusi hampiran  $U^{N-1}(S) \in V$  pada subruang  $V_h$ . Dipilih fungsi  $\phi_i \in V_h$  sebagai fungsi tes, dan mengalikannya ke kedua ruas Persamaan (18), diperoleh



$$\begin{aligned} \langle u_h^{N-1}, \phi_i \rangle &= \langle u_h^N + kLu_h^N - kF(S, S_c^N), \phi_i \rangle \\ &= (1 - kr)\langle u_h^N, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \langle S \frac{\partial u_h^N}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \rangle \\ &= (1 - kr)\langle u_h^N, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \langle S \frac{\partial u_h^N}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \rangle \\ &+ k(r - q - \sigma^2) \langle S \frac{\partial u_h^N}{\partial S}, \phi_i \rangle - k \langle F(S, S_c^N), \phi_i \rangle \quad (19) \end{aligned}$$

Misalkan matriks  $A$  memiliki entri-entri  $\langle \phi_i - \phi_i \rangle = \frac{2h}{3}, \langle \phi_{i-1} - \phi_i \rangle = \frac{h}{6}, \langle \phi_{i+1} - \phi_i \rangle = \frac{h}{6}$  matriks  $B = [b_{ij}]$  dengan entri  $b_{ij} = (1 - kr)\langle \phi_j - \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \langle S \frac{\partial \phi_j}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \rangle + k(r - q - \sigma^2) \langle S \frac{\partial \phi_j}{\partial S}, \phi_i \rangle$ .

Misalkan  $f^N$  merupakan vektor kolom sedemikian sehingga  $f^N = [f_1^N, f_2^N, \dots, f_{M-1}^N]^T$  dengan  $f_i^N = -k \langle F(S, S_c^N), \phi_i \rangle$ , untuk  $i=1,2,\dots,M-1$  atau

$$f_i^N = \begin{cases} k \left( q - \frac{qE}{S_{max}} \right) hS_i, & S_i < S_c^N \\ k \left( \left( \frac{hS_i}{2} - \frac{h^2}{6} \right) q - \frac{qEhS_i}{S_{max}} + \frac{rEh}{2} \right), & S_i = S_c^N \\ k \left( -\frac{qE}{S_{max}} hS_i + rEh \right), & S_i > S_c^N \end{cases}$$

maka, Persamaan (19) dapat ditulis dengan  $A\alpha^{N-1} = B\alpha^N + f^N$  (20)

Batas eksekusi pada saat  $t^{N-1}$  ditentukan dengan mendefinisikan parameter relaksasi  $\delta$  yang dikaitkan dengan  $k$  dan  $h$ ,  $\delta$  didefinisikan sebagai

$$\delta = \max(\min((k^2 + k * h), 10^{-4}), 10^{-8})$$

Batas eksekusi numerik ditentukan sebagai berikut,

$$S_c^{N-1} = \min_{1 \leq i \leq M-1} \{S_i \geq S_c^N \mid |u_h^{N-1}(S_i) - U(T, S)| \leq \delta\}$$

Perhitungan pada Saat  $t^j, j = N - 2, \dots, 1, 0$

Solusi hampiran  $U^j(S)$  dihitung dengan skema yang hampir sama dengan perhitungan pada saat  $t^{N-1}$ . Perbedaannya terletak pada penggunaan skema tiga titik untuk hampiran turunan  $U$  terhadap  $t$  di titik  $t^j$  (Kang *et al*, 2008:279). Persamaan (11) menjadi

$$\frac{u_h^{j+2}(S) - u_h^j(S)}{2k} + \frac{1}{2} (Lu_h^{j+2}(S) + Lu_h^j(S)) = F(S, S_c^{j+1}) \quad (21)$$

Dimana  $u_h^{j+2}$  dan  $S_c^{j+1}$  telah diketahui nilainya dari perhitungan sebelumnya. Dari Persamaan (21) diperoleh

$$(I - kL)u_h^j(S) = (I - kL)u_h^{j+2} + 2kF(S, S_c^{j+1}) \quad (22)$$

Dipilih fungsi  $\phi_i \in V_h$  sebagai fungsi test dan mengalikan  $\phi_i$  pada kedua ruas Persamaan (22) diperoleh

$$\begin{aligned} \langle (I - kL)u_h^j, \phi_i \rangle &= \langle (I - kL)u_h^{j+2}, \phi_i \rangle \\ &+ \langle 2kF(S, S_c^{j+1}), \phi_i \rangle \end{aligned}$$

Substitusi Persamaan (19) ke Persamaan (22) diperoleh

$$\begin{aligned} (1 + kr)\langle u_h^j, \phi_i \rangle &+ \frac{k\sigma^2}{2} \langle S \frac{\partial u_h^j}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \rangle - k(r - q - \sigma^2) \langle S \frac{\partial u_h^j}{\partial S}, \phi_i \rangle \\ &= (1 - kr)\langle u_h^{j+2}, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \rangle + k(r - q - \sigma^2) \langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, \phi_i \rangle \\ &= (1 - kr)\langle u_h^{j+2}, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \rangle + k(r - q - \sigma^2) \langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, \phi_i \rangle \\ &\quad - 2k \langle F(S, S_c^{j+1}), \phi_i \rangle \quad (23) \end{aligned}$$

Persamaan (23) dapat ditulis menjadi

$$(2A - B)\alpha^j = B\alpha^{j+2} + 2f\alpha^{j+1} \quad \text{dengan} \quad \alpha^j = [\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_{M-1}^j]^T, \text{ untuk } j = N - 2, \dots, 2, 1, 0.$$

Misalkan  $f^{j+1} = [f_2^{j+1}, \dots, f_{M-1}^{j+1}]^T$  dimana

$$f_i^{j+1} = \begin{cases} k \left( q - \frac{qE}{S_{max}} \right) hS_i, & S_i < S_c^{j+2} \\ k \left( \left( \frac{hS_i}{2} - \frac{h^2}{6} \right) q - \frac{qEhS_i}{S_{max}} + \frac{rEh}{2} \right), & S_i = S_c^{j+2} \\ k \left( -\frac{qE}{S_{max}} hS_i + rEh \right), & S_i > S_c^{j+2} \end{cases}$$

Persamaan (23) akan menjadi

$$(2A - B)\alpha^j = B\alpha^{j+2} + 2f^{j+1} \quad (23)$$

untuk  $j = N - 2, \dots, 1, 0$ .

Persamaan (23) dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai metode eliminasi sehingga diperoleh nilai  $\alpha^j$ .

Solusi hampiran  $u_h^0(S)$  dan harga opsi pada saat  $t=0$  adalah  $C(S_i, 0) = y(S_i) - u_h^0(S_i)$

Batas eksekusi pada saat  $j = N - 2, \dots, 1, 0$  ditentukan sebagai berikut.

$$S_c^j = \min_{1 \leq i \leq M-1} \{ S_i \geq S_c^{j-1} \mid |u_h^j(S_i) - u_h^{j-1}(S_i)| \leq \delta \}.$$

Penentuan harga dan batas eksekusi pada opsi jual dapat dilakukan secara analog. Transformasi harga opsi jual  $P$  menjadi  $W(S, t) = y_p(S) - P(S, t)$  dimana  $y_p(S) = E \frac{S_{max}-S}{S_{max}}$ .

### Simulasi Numerik

Dibentuk algoritma untuk menentukan harga opsi dan batas eksekusi opsi beli tipe Amerika.

#### Algoritma B.1

Untuk menentukan harga opsi beli  $C(0, S)$  dan batas eksekusi opsi beli  $S_c$  tipe Amerika. *Input:*  $E, T, r, q, \sigma, M, N$ . *Output:*

$C(0, S)$  dan  $S_c^i$  atau pesan “error”. Langkah-langkah yang dilakukan: (1) Hitung:  $u_h^N$  dan  $S_c^N$ ; (2) Hitung:  $u_h^{N-1}$  dan  $S_c^{N-1}$ ; (3) FOR  $j = N - 2, \dots, 1, 0$  DO  $u_h^j$  dan  $S_c^j$ , hitung  $C(0, S)$ ; (4)  $C(0, S) = [C(S_1), C(S_2), \dots, C(S_{M-1})]^T$ ; (5) STOP.

Perhitungan numerik untuk harga dan batas eksekusi opsi tipe Amerika berdasarkan Algoritma 3.1 dan Algoritma 3.2, menggunakan software Matlab R2010a pada komputer dengan spesifikasi CPU P4 2.4GHz, RAM 2040MB.

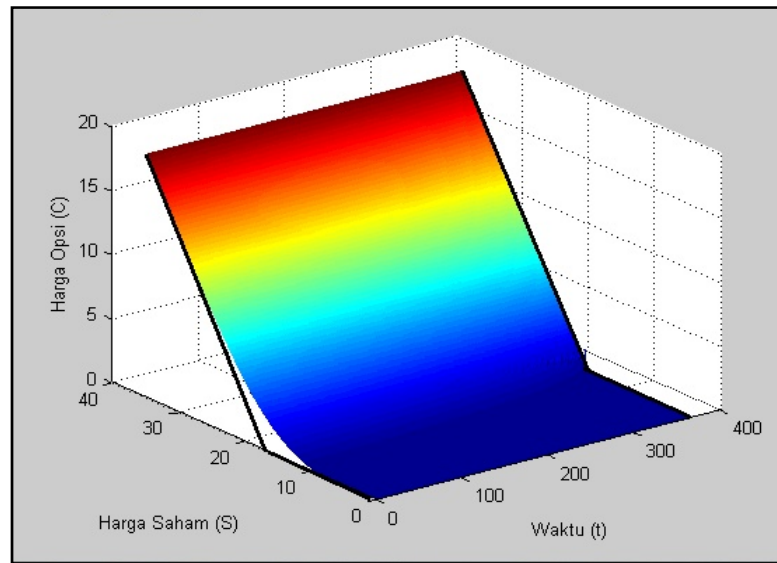
#### Hasil Perhitungan Numerik Opsi Beli

Diperoleh suatu kasus dimana diketahui parameter-parameter *input* perhitungan sebagai berikut:  $T = 1, \sigma = 0.32, r = 0.1, q = 0.05, E = 10$ . Dipilih  $M = 365$  dan  $N = 365$ . Sebagian hasil perhitungan harga dan batas eksekusi opsi beli pada saat  $t = 0$ , disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil Perhitungan Numerik Opsi Beli

$S$	$C$	$S_c$
14.0000	1.1400	
15.0548	1.5775	
<b>15.5342</b>	<b>1.7994</b>	<b>21.4795</b>
16.0137	2.0355	

Dari Tabel 1, diperoleh harga opsi sebesar \$1.8 (dengan pembulatan). Untuk harga saham \$15.5. Gambar 1 memperlihatkan *mesh* hasil perhitungan numerik harga

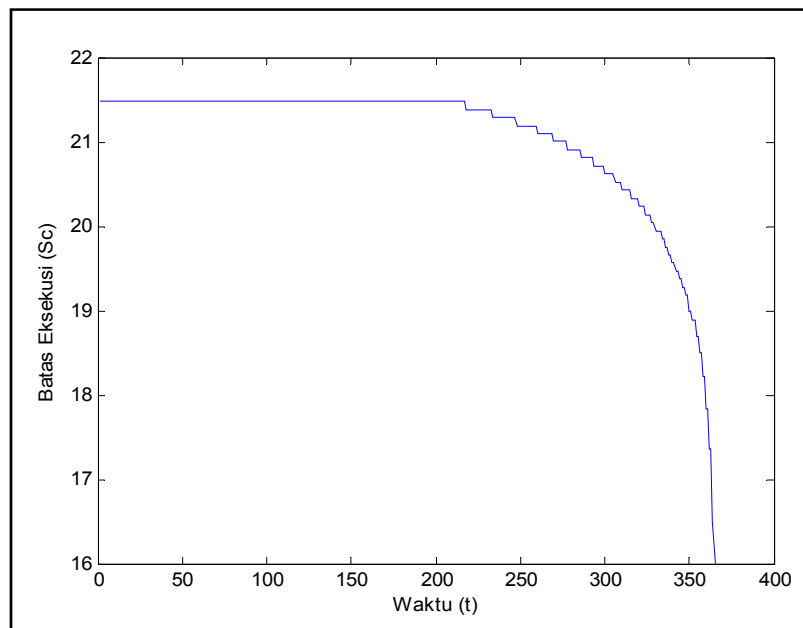


Gambar 1. Mesh Hasil Numerik Harga Opsi Beli

opsi beli di seluruh domain  $D$ , sedangkan Gambar 2 memperlihatkan batas eksekusi opsi beli.

Pada Gambar 1, fungsi *payoff* opsi beli ditunjukkan dengan kurva berwarna

hitam. Dapat dilihat bahwa harga opsi beli lebih besar atau sama dengan nilai fungsi *payoff* opsi beli. Selain itu, harga opsi beli monoton naik terhadap harga saham, dan monoton turun terhadap waktu. Pada saat



Gambar 2. Plot Hasil Numerik Batas Eksekusi Opsi Beli

$t = 0$ , kurva harga opsi beli berupa kurva lengkung. Semakin mendekati tanggal kadaluwarsa kurva harga opsi beli memiliki bentuk mendekati kurva fungsi *payoff* opsi beli, sedangkan pada saat  $t = T$ , kurva harga opsi beli merepresentasikan fungsi *payoff* opsi beli.

Pada domain waktu terdapat 365 titik nodal, sedangkan umur opsi selama satu tahun. Akibatnya, setiap titik nodal pada domain waktu menunjukkan satu satuan hari. Pada Gambar 2, dapat dilihat perilaku monoton turun dari batas eksekusi opsi beli terhadap waktu, dapat dilihat pada hari opsi akan dibeli ( $t = 0$ ) sampai opsi berumur 217 hari ( $t = 217$ ), batas eksekusi opsi bernilai \$21.5 (dengan pembulatan). Selanjutnya batas eksekusi opsi akan terus turun sampai titik terendah, yakni pada tanggal kadaluwarsa opsi ( $t = 365$ ) sebesar \$16.

*Hasil Perhitungan Numerik Opsi Jual*

Misalkan pada tanggal 7 Juni 2012 suatu kontrak opsi jual tipe Amerika atas saham perusahaan ABC dijual seharga \$6 dengan masa berlaku opsi selama satu tahun dan harga eksekusi sebesar \$16. Harga saham perusahaan ABC pada tanggal 7 Juni 2012 sebesar \$15.5. Diasumsikan perusahaan ABC membagikan dividen secara kontinu dengan proporsi konstan sebesar 5%. Dari data historis diketahui harga saham

perusahaan ABC memiliki volatilitas sebesar 0.32, sedangkan suku bunga bebas resiko diketahui sebesar 10%.

Dari data tersebut diketahui parameter-parameter untuk *input* perhitungan sebagai berikut:  $T = 1, \sigma = 0.32, r = 0.1 \quad q = 0.05, E = 10$ . Dipilih  $M = 365$  dan  $N = 365$ . Sebagian hasil perhitungan yang diperoleh, disajikan pada Tabel 2.

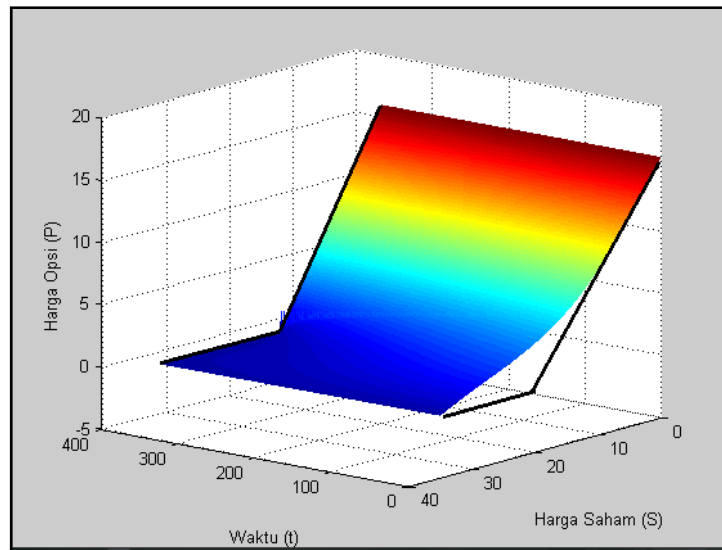
Tabel 2. Hasil Perhitungan Numerik Opsi Jual

<i>S</i>	<i>C</i>	<i>Sp</i>
14.0000	6.0298	
15.0548	5.5420	
<b>15.5342</b>	<b>5.3335</b>	<b>2.9726</b>
16.0137	5.1327	

Dari hasil perhitungan yang disajikan pada Tabel 2, diperoleh harga opsi sebesar \$5.3 (dengan pembulatan). Oleh karena itu, investor sebaiknya tidak membeli opsi karena harga opsi di pasar seharga \$6, lebih mahal dari harga opsi hasil perhitungan \$5.3.

*Cputime* dari perhitungan menggunakan Algoritma 3.1 adalah 2.0588 detik. Selanjutnya, Gambar 3 memperlihatkan *mesh* hasil perhitungan numerik harga opsi jual di seluruh domain *D*.

Pada Gambar 3, fungsi *payoff* opsi jual ditunjukkan dengan kurva berwarna hitam. Dapat dilihat bahwa harga opsi jual lebih besar atau sama dengan nilai fungsi *payoff* opsi jual. Selain itu, harga opsi jual

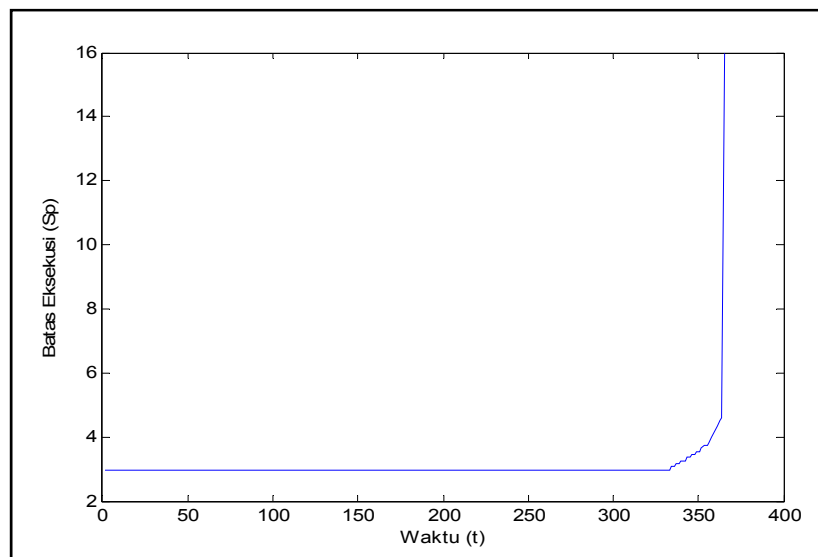


Gambar 3. *Mesh* Hasil Numerik Harga Opsi Jual

monoton turun terhadap harga saham, dan monoton naik terhadap waktu. Pada saat  $t = 0$ , kurva harga opsi jual berupa kurva lengkung. Selanjutnya, semakin mendekati tanggal kadaluwarsa kurva harga opsi jual memiliki bentuk mendekati kurva fungsi *payoff* opsi jual, sedangkan pada saat  $t = T$ ,

kurva harga opsi jual merepresentasikan fungsi *payoff* opsi jual.

Pada domain waktu terdapat 365 titik nodal, sedangkan umur opsi selama satu tahun. Akibatnya, setiap titik nodal pada domain waktu menunjukkan satu satuan hari. Pada Gambar 4, dapat dilihat



Gambar 4. *Plot* Hasil Numerik Batas Eksekusi Opsi Jual

perilaku monoton naik dari batas eksekusi opsi jual terhadap waktu, pada hari opsi akan dibeli ( $t = 0$ ) sampai opsi berumur 332 hari ( $t = 332$ ), batas eksekusi opsi bernilai \$3 (dengan pembulatan). Selanjutnya batas eksekusi opsi akan terus naik sampai titik tertinggi, yakni pada tanggal kadaluwarsa opsi ( $t = 365$ ) sebesar \$16.

## KESIMPULAN

Penentuan batas eksekusi opsi tipe Amerika model Black-Scholes menggunakan *Finite Elements Method* dibagi menjadi beberapa tahap sebagai berikut: (1) Memformulasikan batas eksekusi opsi secara matematis berdasarkan sifat-sifat yang telah diketahui; (2) Memilih parameter relaksasi untuk mengubah formula batas eksekusi opsi yang telah diperoleh menjadi formula batas eksekusi opsi numerik; (3) Menentukan batas eksekusi opsi numerik sepanjang umur opsi.

Penentuan harga opsi tipe Amerika model Black-Scholes menggunakan *Finite Elements Method* dibagi menjadi beberapa tahap berikut: (1) Memodelkan opsi tipe Amerika berdasarkan kerangka pemodelan Black-Scholes. Model yang diperoleh berupa sistem persamaan yang terdiri atas persamaan diferensial parsial orde dua nonhomogen, nilai

awal dan syarat batas; (2) Mengasumsikan solusi dari sistem sebagai anggota ruang Hilbert. Transformasi sistem agar solusi memenuhi syarat keanggotaan ruang Hilbert. Mengubah model ke bentuk *weak formulation*; (3) Mencari solusi hampiran sistem pada subruang berdimensi hingga dengan basis fungsi *hat*.

## Daftar Pustaka

- Black, F dan Scholes, M. 1973. The pricing of option dan corporate liabilities. *The Journal of Political Economy* Vol. 81, no 3. JSTOR
- Hull, John. 2006. *Option, futures, and other derivative securities*. New Jersey: Prentice Hall.
- Husnan, Suad. 2001. *Dasar-dasar teori portofolio dan analisis sekuritas*. Yogyakarta: AMPYKPN.
- Kang, S.K, dan T. Kwon, Y. 2008. Finite element methods for the price and the free boundary of American call and put option. *J.KSIAM* Vol 12, No.4.
- Kiusalaas, J. 2005. *Numerical methods in engineering with MATLAB*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pham, K. 2007. Finite element modelling of multi-asset barrier options. *Desertasi*. University of Reading.