ISBN : 978-979-16353-3-2

T-21

MODEL SIR UNTUK KETAHANAN *BEHAVIOURAL*

NIKENASIH BINATARI*
Matematika Terapan, Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta

ABSTRAK

Ada dua bentuk ketahanan (*resistant*) yang sering dilakukan yaitu ketahanan secara immunological dan ketahanan secara *behavioural*. Model SIR yang akan dibahas kali ini merupakan perluasan dari model SIR Kermack-McKendrik dengan menggunakan ketahanan secara *behavioural*. Selanjutnya akan dibahas mengenai titik ekuilibrium dan kestabilan di sekitar titik ekuilibriumnya. Model SIR dengan asumsi perluasan ini mengindikasikan bifurkasi ke belakang (*backward bifurcasion*).

Kata kunci : Model SIR, Resistant, backward bifurcasion

PENDAHULUAN

Penularan wabah penyakit yang terjadi pada suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis. Salah satu bentuk pemodelan tersebut yaitu model SIR(*Suspectibles, Infectious, Recovered*). Model SIR ini dikembangkan untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan suatu wabah penyakit dalam suatu populasi. Jika model dianalisa, diharapkan kita dapat mengestimasi apakah penyebaran penyakit tersebut akan menimbulkan wabah atau tidak.

Pola penyebaran penyakit dalam suatu populasi bergantung dengan ketahanan individu terhadap suatu penyakit menular. Ketahanan terhadap penyakit menular (infeksi) adalah suatu bentuk perlindungan yang dapat mengurangi resiko individu terjangkit penyakit. Ada dua bentuk ketahanan yang sering dilakukan yaitu ketahanan secara immunological dan ketahanan secara behavioral. Program vaksinasi merupakan salah satu ketahanan secara immunological yaitu dengan melatih sistem kekebalan kita untuk mengidentifikasi pathogen, sedangkan Program Pendidikan Masyarakat merupakan salah satu contoh ketahanan secara behavioral yaitu dengan mengajarkan cara-cara pencegahan dari dini. Dalam kedua kasus ini, meningkatkan ketahanan tentu saja mengurangi penyebaran penyakit.

Meskipun kedua bentuk ketahanan ini bertujuan mengurangi penyebaran penyakit, namun terdapat dua perbedaan signifikan. Pada program vaksinasi, individu

 ISBN : 978-979-16353-3-2

yang sudah divaksinasi apabila terinfeksi maka sistem kembali. Berbeda dengan program vaksinasi, Program Pendidikan Masyarakat memungkinkan individu yang sembuh (*removed*) untuk terinfeksi kembali.

Pada paper kali ini, hanya akan dibahas mengenai model SIR untuk penanganan secara behavioral.

A. ANALISA

Asumsi-asumsi yang digunakan :

1. Populasi tertutup, jumlah individu tetap
2. Hanya menular jika terjadi kontak langsung dengan penderita. Laju penularan konstan.
3. Penanganan hanya dari dan ke kelas sembuh (*removed).*
4. Penanganan dini menyebabkan individu yang rentan dapat langsung removed. Laju penanganan dini konstan.
5. Individu terinfeksi yang sembuh dapat kembali rentan atau masuk dalam kelas *removed*. Laju kesembuhan konstan. Sebanyak f bagian kembali rentan sedangkan sisanya removed.
6. Sebanyak s bagian individu removed dapat terinfeksi kembali atau kembali menjadi rentan dengan laju konstan.
7. Individu yang terlahir dimasukkan kedalam kelas rentan. Laju kelahiran konstan.
8. Penyakit tidak fatal sehingga kematian tidak disebabkan oleh penyakit. Jadi, kematian yang terjadi disini adalah kematian normal bukan kematian yang disebabkan oleh penyakit. Laju kematian konstan.
9. Laju kelahiran = laju kematian.
10. Masa inkubasi yang cukup singkat.

Model SIR

Parameter :

b = laju penularan/kontak

a = laju kesembuhan

u = laju penanganan dini

g = laju kehilangan ketahanan (*rate of loss of immunity*)

f = bagian banyaknya individu terinfeksi yang sembuh kemudian rentan.

$1-f$ = bagian banyaknya individu terinfeksi yang sembuh kemudian *removed*.

s = bagian banyaknya individu removed yang kembali terinfeksi.

m = laju kematian = laju kelahiran

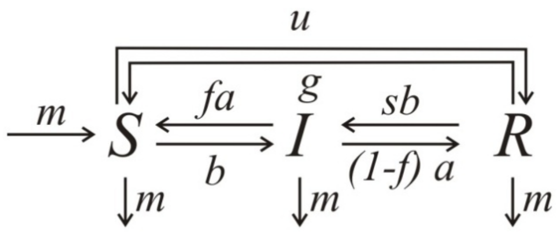
$a, b, u, g, f, s, m > 0$

N = total populasi

Diagram transfer

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Dari asumsi-asumsi di atas, didapatkan diagram transfer sebagai berikut :



Dari diagram transfer di atas, maka persamaan model matematikanya yaitu :

$$\frac{dS}{dt} = mN - bS\frac{I}{N} + faI + gR - uS - mS \qquad (2a)$$

$$\frac{dI}{dt} = bS\frac{I}{N} + sbR\frac{I}{N} - (1-f)aI - faI - mI \qquad (2b)$$

$$\frac{dR}{dt} = -sbR\frac{I}{N} + (1-f)aI - gR + uS - mR \qquad (2c)$$

Model versi ini telah dipelajari oleh Hadeler dan Van Den Driessche, Kribszaleta dan Velasco Hernandez, dan Gomes et al. Angka reproduksi dasar (*basic reproduction number*) untuk sistem (2) ini adalah angka harapan dari penularan individu rentan dan angka harapan dari penularan baru individu tervaksinasi atau

$$R_0 = \frac{b}{m+a}\left(\frac{m+g}{m+u+g}\right) + \frac{bs}{m+a}\left(\frac{u}{m+u+g}\right)$$

Selanjutnya akan dianalisa kestabilan sistem (2) di sekitar titik ekuilibriumnya.

Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium adalah solusi konstan sistem, sehingga $S(t) = c_1, I(t) = c_2, R(t) = c_3$.

Hal ini ekuivalen dengan solusi konstan sistem memenuhi $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$.

Akibatnya,

$$mN - bS\frac{I}{N} + faI + gR - uS - mS = 0 \qquad (2d)$$

$$bS\frac{I}{N} + sbR\frac{I}{N} - (1-f)aI - faI - mI = 0 \qquad (2e)$$

$$-sbR\frac{I}{N} + (1-f)aI - gR + uS - mR = 0 \qquad (2f)$$

Karena $N = S + I + R$, maka $R = N - S - I$, sehingga

$$mN - bS\frac{I}{N} + faI + g(N - S - I) - uS - mS = 0 \qquad (2d)$$

$$bS\frac{I}{N} + sb(N - S - I)\frac{I}{N} - (1-f)aI - faI - mI = 0 \qquad (2e)$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$-\sigma\beta(N-S-I)\frac{I}{N}+(1-f)\alpha I-\gamma(N-S-I)+uS-\mu(N-S-I)=0 \qquad (2f)$$

Dari persamaan (1) dan (2), jika solusi sistem *S* dan *I* telah diketahui, maka untuk mencari *R* cukup dengan $R=N-S-I$. Jadi, cukup dicari solusi untuk sistem (2d) dan (2e).

Dari (2e), didapatkan

$$\beta S\frac{I}{N}+\sigma\beta(N-S-I)\frac{I}{N}-(1-f)\alpha I-f\alpha I-\mu I=0$$

$$\left(\beta\frac{S}{N}+\sigma\beta\frac{N-S-I}{N}-(1-f)\alpha-f\alpha-\mu\right)I=0$$

$$\beta\frac{S}{N}+\sigma\beta\frac{(N-S-I)}{N}-(1-f)\alpha-f\alpha-\mu=0 \text{ atau } I=0$$

a. untuk $\hat{I}=0$ (solusi bebas penyakit)
   substitusi pada (2d), didapatkan

$$\mu N-\beta S\frac{I}{N}+f\alpha I+\gamma(N-S-I)-uS-\mu S=0$$

$$\mu N+\gamma(N-S)-uS-\mu S=0$$

$$\mu N+\gamma N-\gamma S-uS-\mu S=0$$

$$(\mu+\gamma)N-(\gamma+u+\mu)S=0$$

$$\hat{S}=\frac{(\mu+\gamma)}{(\gamma+u+\mu)}N$$

   Jadi, solusi bebas penyakitnya adalah $(\hat{S},\hat{I})=\left(\frac{\mu+\gamma}{\gamma+u+\mu}N,0\right)$.

b. untuk $\hat{I}>0$ (solusi endemi) maka

$$\beta\frac{S}{N}+\sigma\beta\frac{(N-S-I)}{N}-(1-f)\alpha-f\alpha-\mu=0$$

$$\beta\frac{S}{N}+\sigma\beta\frac{(N-S-I)}{N}-\alpha-\mu=0$$

$$(\beta-\sigma\beta)\frac{S}{N}+\sigma\beta\left(1-\frac{I}{N}\right)-\alpha-\mu=0$$

$$\hat{S}=\frac{N}{\beta-\sigma\beta}\left(\alpha+\mu-\sigma\beta\left(1-\frac{\hat{I}}{N}\right)\right)$$

   Substitusi pada (2d) didapatkan

$$\mu N-\beta S\frac{I}{N}+f\alpha I+\gamma(N-S-I)-uS-\mu S=0$$

$$(\mu+\gamma)N-\left(\beta\frac{I}{N}+\gamma+u+\mu\right)S+(f\alpha-\gamma)I=0$$

$$(\mu+\gamma)N-\left(\beta\frac{\hat{I}}{N}+\gamma+u+\mu\right)\left(\frac{N}{\beta-\sigma\beta}\left(\alpha+\mu-\sigma\beta\left(1-\frac{\hat{I}}{N}\right)\right)\right)+(f\alpha-\gamma)\hat{I}=0$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Perhatikan bahwa persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat, sehingga dapat ditulis dalam bentuk $aI^2 + bI + c = 0, I > 0$.

Bifurkasi saat $R_0 = 1$ adalah bifurkasi ke belakang atau *backward bifurcation* jika

$$1+\frac{\left(\gamma+\sigma\upsilon\right)^2+\mu\upsilon\sigma\left(1+\sigma\right)+2\gamma\mu+\mu^2}{\alpha\left(1-\sigma\right)\left(\gamma+\mu\right)}<\left(1+\frac{\sigma\upsilon}{\gamma+\mu}\right)f$$

Akan diteliti kestabilan Sistem 2d dan Sistem 2e di sekitar titik ekuilibrium. Untuk meneliti kestabilan sistem maka dapat dilihat dari solusi system dimana komponen-komponennya adalah perkalian konstanta dengan $e^{\lambda t}$; hal ini berarti bahwa λ adalah nilai eigen dari matrik koefisiennya (matrik Jacobian). Syarat agar semua solusi dari linearisasi di titik ekuilibrium mendekati nol untuk $t \to \infty$ adalah bahwa semua nilai eigen dari matriks koefisiennya mempunyai bagian real negative. Atau dapat dikatakan bahwa titik ekuilibrium stabil asimtotik jika semua bagian real dari nilai eigennya bernilai negative.

Didefinisikan fungsi-fungsi sebagai berikut :

$$f\left(S,I\right)= mN - bS\frac{I}{N} + faI + g\left(N - S - I\right) - uS - mS$$

$$g\left(S,I\right)= bS\frac{I}{N} + sb\left(N - S - I\right)\frac{I}{N} - \left(1 - f\right)aI - faI - mI$$

Selanjutnya akan dibahas bifurkasi pada system (2). Akan ditunjukkan bahwa bifurkasi yang terjadi pada system (2) adakah bifurkasi ke belakang (*backward bifurcation*).

A. <u>Titik ekuilibrium</u>

Pada awal pembahasan, titik ekuilibrium $\left(\hat{S},\hat{I}\right)$ dari sistem (2) dapat diketahui dengan mencari solusi dari persamaan berikut ini :

$$mN - bS\frac{I}{N} + faI + g\left(N - S - I\right) - uS - mS = 0 \text{..................(a)}$$

$$bS\frac{I}{N} + sb\left(N - S - I\right)\frac{I}{N} - \left(1 - f\right)aI - faI - mI = 0 \text{..........(b)}$$

Terdapat titik ekuilibrium bebas penyakit $P = \left(S^{\%}_0, 0\right)$ untuk semua nilai parameters, dengan $S^{\%}_0 > 0$ adalah akar positif dari fungsi berikut :

$$f_1\left(S\right)= - \left(mN + g\left(N - S\right) - uS - mS\right)$$

(fungsi di atas didefinisikan dari persamaan (a) dengan $\hat{I} = 0$).

Selanjutnya, titik ekuilibrium pada sistem (2) disebut titik ekuibrium endemi $P = \left(\hat{S},\hat{I}\right)$ jika $\hat{I} > 0$. Untuk $\hat{I} > 0$, dari persamaan (b) kita dapatkan

$$b\frac{\hat{S}}{N} + s\,b\,\frac{\left(N - \hat{S} - \hat{I}\right)}{N} - a - m = 0 \quad (*)$$

Sehingga

$$\hat{I} = \frac{(1-s)}{s}\hat{S} - \left(\frac{a+m}{s\,b} - 1\right)N \ .$$

Substitusikan penyelesaian $P = \left(\hat{S}, \hat{I}\right)$ yaitu titik ekuilibrium endemi ini pada persamaan (a) dari sistem (2).

$$mN - b\hat{S}\frac{\hat{I}}{N} + f\,a\,\hat{I} + g\left(N - \hat{S} - \hat{I}\right) - u\hat{S} - m\hat{S} = 0$$

$$(m+g)N - \left(b\frac{\hat{S}}{N} - f\,a + g\right)\hat{I} + (g - u - m)\hat{S} = 0$$

$$(m+g)N - \left(b\frac{\hat{S}}{N} - f\,a + g\right)\left(\frac{(1-s)}{s}\hat{S} - \left(\frac{a+m}{s\,b} - 1\right)N\right) + (g - u - m)\hat{S} = 0$$

$$(m+g)N + (g - u - m)\hat{S} = \left(b\frac{\hat{S}}{N} - f\,a + g\right)\left(\frac{(1-s)}{s}\hat{S} - \left(\frac{a+m}{s\,b} - 1\right)N\right)$$

$$-\left((m+g)N + (g - u - m)\hat{S}\right) = -\left(b\frac{\hat{S}}{N} - f\,a + g\right)\left(\frac{(1-s)}{s}\hat{S} - \left(\frac{a+m}{s\,b} - 1\right)N\right)$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium endemi memenuhi

$$f_1\left(\hat{S}\right) = f_2\left(\hat{S}\right) \text{.........(**)}$$

dengan

$$f_2(S) = -\left(\frac{b\,S}{N} - f\,a + g\right)\left(\frac{1-s}{s}S - \left(\frac{a+m}{s\,b} - 1\right)N\right)$$

Dari (**) diketahui bahwa titik ekuilibrium endemi dapat dianalisa secara geometri dari perpotongan kurva f_1 dan f_2. Sistem (2) dapat mempunyai lebih dari satu titik ekuilibrium endemi jika f_2 adalah fungsi konkaf ke bawah dan mempunyai akar positif.

Karena $-\frac{b}{N}\frac{1-s}{s} < 0$, maka cukup ditunjukkan bahwa f_2 mempunyai akar positif yaitu $\frac{f\,a - g}{b}N > 0$ dan $\frac{s}{1-s}\left(\frac{a+m}{s\,b} - 1\right)N > 0$ ......(***)

Jadi, apabila salah satu dari ketaksamaan tersebut tidak berlaku, maka didalam sistem tidak akan terdapat backward bifurcation.

Asumsikan kondisi (***) terpenuhi, maka hal berikutnya yaitu dipastikan bahwa kedua fungsi tersebut berpotongan (diturunkan dari kondisi $f'_2\left(\tilde{S}\right) > f'_1\left(\tilde{S}\right)$).

yaitu

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$-2b\frac{1-s}{s}\frac{(m+g)}{(g+u+m)}+(fa-g)\frac{1-s}{s}+\left(\frac{a+m-sb}{s}\right)>g+u+m$$

B. Kestabilan titik equilibrium

$$mN-bS\frac{I}{N}+faI+g(N-S-I)-uS-mS=0 \qquad (2d)$$

$$bS\frac{I}{N}+sb(N-S-I)\frac{I}{N}-(1-f)aI-faI-mI=0 \qquad (2e)$$

Akan diteliti kestabilan system di atas di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S},\hat{I})=\left(\frac{(m+g)}{(g+u+m)}N,0\right)$. Untuk meneliti kestabilan sistem maka dapat dilihat dari solusi system

$$mN-b\hat{S}\frac{\hat{I}}{N}+fa\hat{I}+g(N-\hat{S}-\hat{I})-u\hat{S}-m\hat{S}=0$$

$$(m+g)N-\left(b\frac{\hat{S}}{N}-fa+g\right)\hat{I}+(g-u-m)\hat{S}=0$$

$$(m+g)N-\left(b\frac{\hat{S}}{N}-fa+g\right)\left(\frac{(1-s)}{s}\hat{S}-\left(\frac{a+m}{sb}-1\right)N\right)+(g-u-m)\hat{S}=0$$

$$(m+g)N+(g-u-m)\hat{S}=\left(b\frac{\hat{S}}{N}-fa+g\right)\left(\frac{(1-s)}{s}\hat{S}-\left(\frac{a+m}{sb}-1\right)N\right)$$

$$-\left((m+g)N+(g-u-m)\hat{S}\right)=-\left(b\frac{\hat{S}}{N}-fa+g\right)\left(\frac{(1-s)}{s}\hat{S}-\left(\frac{a+m}{sb}-1\right)N\right)$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium endemi memenuhi

$$f_1(\hat{S})=f_2(\hat{S})\text{.........(**)}$$

dengan

$$f_2(S)=-\left(\frac{bS}{N}-fa+g\right)\left(\frac{1-s}{s}S-\left(\frac{a+m}{sb}-1\right)N\right)$$

Dari (**) diketahui bahwa titik ekuilibrium endemi dapat dianalisa secara geometri dari perpotongan kurva f_1 dan f_2. Sistem (2) dapat mempunyai lebih dari satu titik ekuilibrium endemi jika f_2 adalah fungsi konkaf ke bawah dan mempunyai akar positif.

Karena $-\frac{b}{N}\frac{1-s}{s}<0$, maka cukup ditunjukkan bahwa f_2 mempunyai akar positif yaitu $\frac{fa-g}{b}N>0$ dan $\frac{s}{1-s}\left(\frac{a+m}{sb}-1\right)N>0$ ......(***)

Jadi, apabila salah satu dari ketaksamaan tersebut tidak berlaku, maka didalam sistem tidak akan terdapat backward bifurcation.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Asumsikan kondisi (***) terpenuhi, maka hal berikutnya yaitu dipastikan bahwa kedua fungsi tersebut berpotongan (diturunkan dari kondisi $f'_2(\hat{S}) > f'_1(\hat{S})$).
yaitu

$$-2\beta\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{(\mu+\gamma)}{(\gamma+\upsilon+\mu)} + (f\alpha-\gamma)\frac{1-\sigma}{\sigma} + \left(\frac{\alpha+\mu-\sigma\beta}{\sigma}\right) > \gamma+\upsilon+\mu$$

C. Kestabilan titik equilibrium

$$\mu N - \beta S\frac{I}{N} + f\alpha I + \gamma(N-S-I) - \upsilon S - \mu S = 0 \qquad (2d)$$

$$\beta S\frac{I}{N} + \sigma\beta(N-S-I)\frac{I}{N} - (1-f)\alpha I - f\alpha I - \mu I = 0 \qquad (2e)$$

Akan diteliti kestabilan system di atas di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\frac{(\mu+\gamma)}{(\gamma+\upsilon+\mu)}N, 0\right)$. Untuk meneliti kestabilan sistem maka dapat dilihat

dari solusi system $J = \begin{bmatrix} -\gamma-\upsilon-\mu & -\beta\dfrac{(\mu+\gamma)}{(\gamma+\upsilon+\mu)} + f\alpha-\gamma \\ 0 & \sigma\beta + \dfrac{(\beta-\sigma\beta)(\mu+\gamma)}{(\gamma+\upsilon+\mu)} - \alpha-\mu \end{bmatrix}$

yang mempunyai nilai eigen $-\gamma-\upsilon-\mu$ dan $\sigma\beta + \frac{(\beta-\sigma\beta)(\mu+\gamma)}{(\gamma+\upsilon+\mu)} - \alpha - \mu$.

Dari sini, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika $\sigma\beta + \frac{(\beta-\sigma\beta)(\mu+\gamma)}{(\gamma+\upsilon+\mu)} - \alpha - \mu < 0$ atau

$$\sigma\beta + \frac{(\beta-\sigma\beta)(\mu+\gamma)}{(\gamma+\upsilon+\mu)} - \alpha - \mu < 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\beta + \frac{(\beta-\sigma\beta)(\mu+\gamma)}{(\gamma+\upsilon+\mu)} < \alpha + \mu$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\beta + \dfrac{(\beta-\sigma\beta)(\mu+\gamma)}{(\gamma+\upsilon+\mu)}}{\alpha+\mu} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\beta}{\alpha+\mu} + \frac{(\beta-\sigma\beta)(\mu+\gamma)}{(\alpha+\mu)(\gamma+\upsilon+\mu)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\beta(\gamma+\upsilon+\mu)}{(\alpha+\mu)(\gamma+\upsilon+\mu)} + \frac{(\beta-\sigma\beta)(\mu+\gamma)}{(\alpha+\mu)(\gamma+\upsilon+\mu)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta(\gamma+\mu) + \sigma\beta\upsilon}{(\alpha+\mu)(\gamma+\upsilon+\mu)} < 1$$

$$\Leftrightarrow R_0 < 1$$

Jadi, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil lokal untuk $R_o < 1$.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

1. Kestabilan di sekitar titik ekuilibrium endemi.
    a. jika $R_o = Q$, hanya terdapat dengan tunggal titik ekuilibrium endemic
    b. jika $Q < R_o < 1$, terdapat dua buah titik ekuilibrium endemi $P_* = \left(\hat{S}_*, \hat{I}_*\right)$ dan $P^* = \left(\hat{S}^*, \hat{I}^*\right)$ dengan $\hat{S}_* < \hat{S}^*$ dan $\hat{I}_* > \hat{I}^*$. $P_* = \left(\hat{S}_*, \hat{I}_*\right)$ stabil asimtotik lokal sedangkan $P^* = \left(\hat{S}^*, \hat{I}^*\right)$ merupakan titik saddle.
    c. Jika $R_o > 1$, terdapat dengan tunggal titik ekuilibrium endemic $P_* = \left(\hat{S}_*, \hat{I}_*\right)$ yang stabil asimtotik global.

Bukti :
Diketahui sebelumnya :

$$f(S,I) = mN - bS\frac{I}{N} + faI + g(N - S - I) - uS - mS$$

$$\frac{\P f(S,I)}{\P S} = - b\frac{I}{N} - g - u - m$$

$$\frac{\P f(S,I)}{\P I} = - b\frac{S}{N} + fa - g$$

$$g(S,I) = bS\frac{I}{N} + sb(N - S - I)\frac{I}{N} - (1 - f)aI - faI - mI$$

$$\frac{\P g(S,I)}{\P S} = b\frac{I}{N} - sb\frac{I}{N}$$

$$\frac{\P g(S,I)}{\P I} = b\frac{S}{N} + s\frac{b}{N}(N - S) - 2s\frac{b}{N}I - a - m$$

Dibentuk matrik Jacobian sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} -\beta\frac{I}{N} - \gamma - \upsilon - \mu & -\beta\frac{S}{N} + f\alpha - \gamma \\ \beta\frac{I}{N} - \sigma\beta\frac{I}{N} & \beta\frac{S}{N} + \sigma\frac{\beta}{N}\left(N - S\right) - 2\sigma\frac{\beta}{N}I - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium endemi $P\left(\hat{S}, \hat{I}\right)$ adalah

$$J_{P\left(\hat{S},\hat{I}\right)} = \begin{bmatrix} -\beta\frac{\hat{I}}{N} - \gamma - \upsilon - \mu & -\beta\frac{\hat{S}}{N} + f\alpha - \gamma \\ \beta\frac{\hat{I}}{N} - \sigma\beta\frac{\hat{I}}{N} & \beta\frac{\hat{S}}{N} + \sigma\frac{\beta}{N}\left(N - \hat{S}\right) - 2\sigma\frac{\beta}{N}\hat{I} - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

Karena $b\frac{\hat{S}}{N} + s\,b\frac{\left(N - \hat{S} - \hat{I}\right)}{N} - a - m = 0$ (menurut *) didapatkan

$$J_{P\left(\hat{S},\hat{I}\right)} = \begin{bmatrix} -\beta\frac{\hat{I}}{N} - \gamma - \upsilon - \mu & -\beta\frac{\hat{S}}{N} + f\alpha - \gamma \\ \beta\frac{\hat{I}}{N} - \sigma\beta\frac{\hat{I}}{N} & -\sigma\frac{\beta}{N}\hat{I} \end{bmatrix}$$

Darisini didapatkan

$$TrJ_{P\left(\hat{S},\hat{I}\right)} = -\beta\frac{\hat{I}}{N} - \gamma - \upsilon - \mu - \sigma\frac{\beta}{N}\hat{I} < 0$$

Jadi, $TrJ_{P\left(\hat{S},\hat{I}\right)} < 0$ untuk $P_* = \left(\hat{S}_*, \hat{I}_*\right)$ dan $P^* = \left(\hat{S}^*, \hat{I}^*\right)$.

Kemudian, dengan menggunakan definisi f_1 dan f_2 didapatkan

$$\det J_{P\left(\hat{S},\hat{I}\right)} = \left(-\beta\frac{\hat{I}}{N} - \gamma - \upsilon - \mu\right)\left(-\sigma\frac{\beta}{N}\hat{I}\right) - \left(-\beta\frac{\hat{S}}{N} + f\alpha - \gamma\right)\left(\beta\frac{\hat{I}}{N} - \sigma\beta\frac{\hat{I}}{N}\right)$$

$$= \left(\beta\frac{\hat{I}}{N} + \gamma + \upsilon + \mu\right)\left(\sigma\frac{\beta}{N}\hat{I}\right) - \left(-\beta\frac{\hat{S}}{N} + f\alpha - \gamma\right)\left(\beta\frac{\hat{I}}{N} - \sigma\beta\frac{\hat{I}}{N}\right) \quad .$$

$$= \frac{\beta}{N}\hat{I}\left(\sigma\left(\beta\frac{\hat{I}}{N} + \gamma + \upsilon + \mu\right) - \left(-\beta\frac{\hat{S}}{N} + f\alpha - \gamma\right)(1-\sigma)\right)$$

Karena $\hat{I} = \frac{(1 - s)}{s}\hat{S} - \left(\frac{a + m}{s\,b} - 1\right)N$, maka

$$\det J_{P\left(\hat{S},\hat{I}\right)} = \frac{\beta}{N}\hat{I}\left(\sigma\beta\frac{1}{N}\left(\frac{(1-\sigma)}{\sigma}\hat{S} - \left(\frac{\alpha+\mu}{\sigma\beta} - 1\right)N\right) + \sigma\gamma + \sigma\upsilon + \sigma\mu - \left(-\beta\frac{\hat{S}}{N} + f\alpha - \gamma\right)(1-\sigma)\right)$$

$$= \frac{\beta}{N}\hat{I}\left((1-\sigma)\beta\frac{\hat{S}}{N} - (\alpha + \mu - \sigma\beta) + \sigma\gamma + \sigma\upsilon + \sigma\mu - \left(-\beta\frac{\hat{S}}{N} + f\alpha - \gamma\right)(1-\sigma)\right)$$

$$= \frac{\beta}{N}\hat{I}\left(2(1-\sigma)\beta\frac{\hat{S}}{N} + (-f\alpha + \gamma)(1-\sigma) - (\alpha + \mu - \sigma\beta) + \sigma(\gamma + \upsilon + \mu)\right)$$

$$= \frac{\beta}{N}\hat{I}\left(\sigma\left(2\frac{(1-\sigma)}{\sigma}\beta\frac{\hat{S}}{N} + (-f\alpha + \gamma)\frac{(1-\sigma)}{\sigma} - \beta\left(\frac{\alpha+\mu}{\sigma\beta} - 1\right)\right) + \sigma(\gamma + \upsilon + \mu)\right)$$

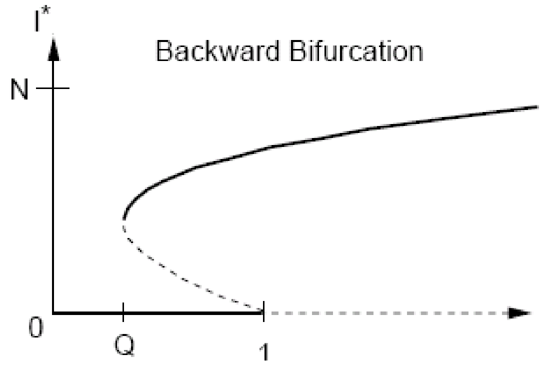
$$= \frac{\sigma\beta}{N}\hat{I}\left(f_2'\left(\hat{S}\right) + f_1'\left(\hat{S}\right)\right)$$

Misalkan $f_2'\left(\hat{S}\right) + f_1'\left(\hat{S}\right) > 0$ untuk $S = \hat{S}^*$ dan $f_2'\left(\hat{S}\right) + f_1'\left(\hat{S}\right) < 0$ untuk $S = \hat{S}_*$ Dari sini didapatkan $P_* = \left(\hat{S}_*, \hat{I}_*\right)$ dan $P^* = \left(\hat{S}^*, \hat{I}^*\right)$ dengan $\hat{S}_* < \hat{S}^*$ dan

ISBN : 978-979-16353-3-2

$\hat{I}_* > \hat{I}^*$, $P_* = \left(\hat{S}_*, \hat{I}_*\right)$ stabil asimtotik lokal sedangkan $P^* = \left(\hat{S}^*, \hat{I}^*\right)$ merupakan titik saddle.
Terbukti.

Kurva Bifurkasi untuk sistem (2) dapat digambarkan sebagai berikut :



B. DAFTAR PUSTAKA (BAHAN ACUAN)

1. Reluga C. Timothy, Medlock Jan, *Resistance Mechanisms Matter in SIR Models*, 3 May 2007, Mathematical Biosciences and Engineering journal, volume 00, number 0, Xxxx XXXX.
2. Y.Li Michael. Gomez-Acevedo, Horacio. *Backward bifurcation in a model for HTLV-I infection of CD4+ T cells*, Bulletin of Mathematical Biology. University of Alberta. Canada.
3. Castillo-Chaves, Carlos. Brauer, Fred. *Mathematical Models In Population Biology And Epidemiology*. Springer.