
Penentuan Harga Dan Batas Eksekusi Opsi Tipe Amerika Model Black-Scholes Menggunakan *Finite Element Methods (FEM)*

Ade Latif. S.Si., Nikenasih Binatari M.Si, Rosita Kusumawati M.Sc.
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Abstrak

Opsi dapat digunakan untuk memperoleh keuntungan dan membatasi jumlah kerugian akibat perubahan harga saham yang acak. Opsi tipe Amerika merupakan opsi yang paling banyak diperdagangkan di bursa opsi. Agar investor dapat membuat keputusan yang tepat di real market, harga dan batas eksekusi opsi tipe Amerika perlu ditentukan secara teoritis. Kerangka pemodelan Black-Scholes dapat digunakan untuk memodelkan opsi tipe Amerika dengan pembagian dividen. Solusi analitik model ini belum ditemukan karena memuat batas eksekusi. Finite Elements Method (FEM) merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan menyelesaikan model Black-Scholes opsi tipe Amerika. Diperoleh algoritma penentuan harga dan batas eksekusi opsi untuk opsi beli dan opsi jual tipe Amerika.

Kata kunci : **Opsi tipe Amerika, dividen, Black-Scholes, FEM.**

1. PENDAHULUAN

Investor memiliki kesempatan untuk mendapatkan keuntungan pada setiap situasi pasar apabila tepat memilih strategi berinvestasi pada kontrak opsi. Kunci untuk memperoleh keuntungan dari opsi tipe Amerika adalah ketepatan penentuan harga dan batas eksekusi opsi. Model Black-Scholes merupakan model yang telah digunakan secara luas sebagai pendekatan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Model Black-Scholes untuk opsi tipe Amerika dengan pembagian dividen berupa persamaan diferensial parsial orde dua non-linier non-homogen yang disertai nilai awal, syarat batas dan *free boundary*. Akibat adanya *free boundary*, belum ditemukan solusi analitik dari model tersebut.

Berbagai macam metode numerik sudah lazim digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial, salah satunya adalah *FEM (Finite Elements Method)*. *FEM* memiliki beberapa kelebihan jika dibandingkan dengan metode numerik lain, seperti *FDM*. Diantara kelebihan *FEM* adalah mudah diaplikasikan pada setiap jenis syarat batas. Selain itu, *FEM* dapat diaplikasikan pada permasalahan dengan domain *irregular*. Pada karya ilmiah ini, model Black-Scholes untuk opsi tipe Amerika dengan pembagian dividen akan diselesaikan menggunakan *FEM*.

Pada awal pembahasan, akan dibahas mengenai model Black-Scholes untuk opsi tipe Amerika dengan pembagian dividen, dilanjutkan dengan pembentukan *weak formulation* dari model yang telah diperoleh. Pembahasan diakhiri dengan penyelesaian model menggunakan *FEM*.

2. PEMBAHASAN

Misalkan t menyatakan waktu, S harga saham, E harga eksekusi opsi, C harga opsi beli, P harga opsi jual, S_c batas eksekusi opsi beli, S_p batas eksekusi opsi jual, r tingkat suku bunga bebas resiko, T tanggal kadaluwarsa dan q proporsi pembagian dividen. Harga opsi beli dan opsi jual memenuhi persamaan berikut,

Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema " **Kontribusi Pendidikan Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa**" pada tanggal 10 November 2012 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial C}{\partial S} S - rC = -(qS - rE)H(S - S_c(t)), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial P}{\partial S} S - rP = -(rE - qS)H(S - S_p(t)), \quad (1.2)$$

dengan H adalah fungsi Heaviside yang didefinisikan sebagai

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x < 0 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Persamaan (1.1) dan (1.2) berturut-turut disebut sebagai Persamaan Jamshidian opsi beli dan opsi jual tipe Amerika (Kang *et al*, 2008:272).

Persamaan (1.1) dan (1.2) memuat batas eksekusi opsi jual dan opsi beli. Belum ada formula eksplisit dari batas eksekusi, sehingga batas eksekusi sering disebut sebagai syarat batas bebas. Meskipun demikian, ada sifat-sifat batas eksekusi yang telah diketahui dan dapat dimanfaatkan untuk mencari pendekatan numerik dari nilai batas eksekusi. Batas eksekusi opsi beli dan opsi jual dapat didefinisikan sebagai berikut

$$S_c(t) = \inf\{S \mid C(S, t) = S - E\}, \quad (1.4)$$

$$S_p(t) = \inf\{S \mid P(S, t) = E - S\}. \quad (1.5)$$

Sifat-sifat dari batas eksekusi adalah sebagai berikut,

$$S_c(T) = E \leq S_c(t) \leq S_c^\infty = \frac{\lambda E}{\lambda - 1}$$

$$0 \leq S_p(t) \leq S_p(T) = E,$$

dengan

$$\lambda = \frac{\left(\frac{\sigma^2}{2} + q - r\right) + \sqrt{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}. \quad (1.6)$$

Didefinisikan S_{\max} sebagai batas atas dari harga saham yang memenuhi $S_c^\infty \leq S_{\max}$. Akibatnya, Persamaan (1.1) dan (1.2) terdefinisi pada daerah D , $D = \{(S, t) \mid 0 \leq t \leq T; 0 \leq S \leq S_{\max}\}$.

Selain batas eksekusi, nilai awal dan syarat batas yang harus dipenuhi Persamaan (1.1) adalah sebagai berikut.

1. Pada saat tanggal kadaluwarsa, harga opsi memenuhi

$$C(S, T) = \max(S - E, 0), \quad 0 \leq S \leq S_{\max} \quad (1.7)$$

2. Pada saat harga saham sama dengan nol, maka harga opsi beli mencapai titik terendah yakni nol.

$$C(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.8}$$

3. Pada saat harga saham mencapai harga maksimal, maka harga opsi beli mencapai titik tertinggi yakni,

$$C(S_{\max},t) = S_{\max} - E, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.9}$$

Nilai awal dan syarat batas yang harus dipenuhi Persamaan (1.2) adalah

1. Pada saat tanggal kadaluwarsa harga opsi beli memenuhi

$$P(S,T) = \max(E - S, 0), \quad 0 \leq S \leq S_{\max} \tag{1.10}$$

2. Pada saat harga saham sama dengan nol, harga opsi jual mencapai titik maksimal yakni sebesar harga eksekusi E .

$$P(0,t) = E, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.11}$$

3. Pada saat harga saham mencapai harga maksimal, maka harga opsi beli sama dengan nol.

$$P(S_{\max},t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.12}$$

Diperoleh model Black-Scholes opsi beli dan opsi jual tipe Amerika yang direpresentasikan dalam Sistem (1.13) dan (1.14)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial C}{\partial S} S - rC = -(qS - rE)H(S - S_c(t))$$

$$C(S,T) = \max(S - E, 0), \quad 0 \leq S \leq S_{\max}$$

$$S_c(t) = \inf\{S \mid C(S,t) = S - E\}$$

$$S_c(T) = E$$

$$C(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$C(S_{\max},t) = S_{\max} - E, \quad 0 \leq t \leq T$$

untuk $(S,t) \in D$. (1.13)

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial P}{\partial S} S - rP = -(qS - rE)^+ H(S_c(t) - S)$$

$$S_p(t) = \sup\{S \mid P(S, t) = E - S\}$$

$$P(S, T) = \max(E - S, 0), \quad 0 \leq S \leq S_{\max}$$

$$S_p(T) = E$$

$$P(0, t) = E, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$P(S_{\max}, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

untuk $(S, t) \in D$. (1.14)

Finite Element Methods (FEM) adalah suatu teknik untuk mencari solusi hampiran dari masalah nilai awal dan syarat batas. Pada metode ini, langkah awal penentuan solusi adalah merubah masalah nilai awal dan syarat batas ke bentuk *weak formulation*, kemudian dilanjutkan dengan membagi domain solusi menjadi sejumlah berhingga subdomain. Langkah diakhiri dengan mencari solusi hampiran pada setiap subdomain yang diasumsikan sebagai anggota ruang fungsi tertentu.

Misalkan $(0, S_{\max}) \subset \square$ dan $V = H_0^1(0, S_{\max})$ adalah ruang Hibert. Diasumsikan solusi Sistem (3.44) merupakan elemen dari ruang V . Agar memenuhi syarat batas Dirichlet homogeny pada V , dilakukan transformasi pada harga opsi beli $C(S, t)$ sebagai berikut,

$$U(S, t) = y(S) - C(S, t) \tag{1.15}$$

dimana

$$y(S) = \frac{S_{\max} - E}{S_{\max}} S. \tag{1.16}$$

Akibatnya, Sistem (1.13) menjadi

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial U}{\partial S} S - rU = F(S, S_c(t))$$

$$S_c(t) = \inf\{S \mid U(S, t) = U(S, T)\}$$

$$U(S, T) = y(s) - \max(S - E, 0), \quad 0 \leq S \leq S_{\max}$$

$$S_c(T) = E$$

$$U(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$U(S_{\max}, t) = 0$$

untuk $(S, t) \in D$. (3.66)

Didefinisikan operator diferensial

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (r - q) \frac{\partial}{\partial S} - rI . \tag{1.17}$$

Akibatnya diperoleh persamaan

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{L}U = F(S, S_c(t)) . \tag{1.18}$$

Diberikan operasi hasil kali $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dalam dalam ruang $L_2(0, S_M)$ yang didefinisikan dengan

$$\langle u, v \rangle = \langle u(S), v(S) \rangle_{[0, S_{\max}]} = \int_0^{S_{\max}} u(S)v(S)dS$$

Mengalikan Persamaan (1.18) dengan fungsi tes $v \in V$, diperoleh

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, v \right\rangle + \langle \mathcal{L}U, v \rangle = \langle F, v \rangle . \tag{1.19}$$

Hasil operasi $\langle \mathcal{L}U, v \rangle$ dijabarkan sebagai berikut,

$$\langle \mathcal{L}U, v \rangle = -\frac{\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial U}{\partial S}, S \frac{\partial v}{\partial S} \right\rangle + (r - q - \sigma^2) \left\langle S \frac{\partial U}{\partial S}, v \right\rangle - r \langle U, v \rangle . \tag{1.20}$$

Permasalahan pada Persamaan (1.18) menjadi mencari $U \in V$ yang memenuhi Persamaan (1.29) untuk $\forall v \in V$.

Diberikan $N, M \in \mathbb{N}$, domain t akan dibagi menjadi N subdomain sedangkan domain S akan dibagi menjadi M subdomain. Misalkan ukuran tiap interval subdomain t adalah k dan ukuran tiap interval subdomain S adalah h , akibatnya diperoleh $k = T/N$ dan $h = S_{\max}/M$. Dipilih V_h sebagai subruang V yang terdiri dari polinomial-polinomial berderajat satu, kontinu sepotong-sepotong dan jumlahnya berhingga. Subruang V_h terdiri dari semua fungsi v yang memenuhi

$$v|_{[S_{i-1}, S_i]} \in P^1([S_{i-1}, S_i]), v(0) = v(S_M) = 0, v \in C[S_{i-1}, S_i]$$

Pembagian ruang V menjadi subruang V_h mengakibatkan permasalahan pada Persamaan (1.19) berubah menjadi mencari $u_h \in V_h$ sedemikian sehingga

$$\left\langle \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right\rangle + \langle \mathcal{L}u_h, v_h \rangle = \langle F, v_h \rangle, \tag{1.21}$$

untuk $\forall v_h \in V_h$. Subruang V_h memiliki basis $\{\phi_i(S)\}_{i=1}^{M-1}$, sehingga $V_h = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_{M-1}\}$. Fungsi ϕ_i adalah fungsi “hat” dimana $\phi_i(S_j) = \delta_{ij}$ untuk setiap i dan j , dengan δ_{ij} delta kronecker.

Fungsi u_h^j merupakan elemen subruang V_h , sehingga u_h^j merupakan kombinasi linier dari basis V_h , yakni

$$u_h^j(S) = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^j \phi_i(S), \tag{1.22}$$

Solusi Persamaan (1.21) pada saat t^j cukup dengan menentukan nilai α_i^j pada Persamaan (1.22). Dalam notasi vektor, α_i^j dapat dinyatakan sebagai

$$\alpha^j = [\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_{M-1}^j]^T. \tag{1.23}$$

1. Perhitungan pada saat t^N

Batas eksekusi numerik S_c^N , diperoleh dari batas eksekusi pada saat T , yakni $S_c(T) = E$. Agar lebih memudahkan perhitungan, digunakan titik nodal S_l sedemikian sehingga

$$S_c^N = S_l \tag{1.24}$$

dimana $S_{l-1} < S_c(T) \leq S_l, l \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$. Pemilihan ini didasarkan pada $|S_c(T) - S_c^N| \leq h$.

Pada saat T harga $U(S, T)$ dapat dihitung menggunakan Persamaan (1.15), sedangkan solusi hampiran u_h^N dicari dengan memilih u_h^N sebagai proyeksi orthogonal dari $U(S, T)$ di ruang V_h . Didefinisikan u_h^N sebagai

$$u_h^N(S) = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^N \phi_i(S). \tag{1.25}$$

Akibat dari $U(S, T) \in V$, dengan Teorema Proyeksi Orthogonal diperoleh persamaan

$$\left\langle \left(U(\bullet, T) - \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^N \phi_i \right), \phi_l \right\rangle = 0. \tag{1.26}$$

2. Perhitungan pada saat t^{N-1}

Turunan parsial U terhadap t dihampiri menggunakan rumus selisih mundur dua titik Euler. Hampiran turunan U terhadap t pada saat t^{N-1} didefinisikan dengan

$$\frac{\partial U(S, t^{N-1})}{\partial t} \approx \frac{U(S, t^N) - U(S, t^{N-1})}{k}. \tag{1.27}$$

Substitusi hampiran turunan U terhadap t pada Persamaan (1.27) ke Persamaan (1.18) diperoleh

$$u_h^{N-1} = u_h^N(S) + k \mathcal{L}u_h^N(S) - kF(S, S_c^N), \tag{1.28}$$

dengan u_h^{N-1} adalah solusi hampiran $U^{N-1}(S) \in V$ pada subruang V_h . Dipilih fungsi $\phi_i \in V_h$ sebagai fungsi tes, dan mengalikannya ke kedua ruas Persamaan (1.28), diperoleh

$$\begin{aligned} \langle u_h^{N-1}, \phi_i \rangle &= \langle u_h^N + k \mathcal{L}u_h^N - kF(S, S_c^N), \phi_i \rangle \\ &= (1 - kr) \langle u_h^N, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial u_h^N}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \right\rangle + k(r - q - \sigma^2) \left\langle S \frac{\partial u_h^N}{\partial S}, \phi_i \right\rangle \\ &\quad - k \langle F(S, S_c^N), \phi_i \rangle. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Akibat dari

$$\langle u_h^{N-1}, \phi_i \rangle = \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_j^{N-1} \langle \phi_j, \phi_i \rangle, \tag{1.30}$$

maka $\langle u_h^{N-1}, \phi_i \rangle$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yakni

$$\langle u_h^{N-1}, \phi_i \rangle = A\alpha. \tag{1.31}$$

Matriks A memiliki entri-entri

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \frac{2h}{3}, \langle \phi_{i-1}, \phi_i \rangle = \frac{h}{6}, \langle \phi_{i+1}, \phi_i \rangle = \frac{h}{6}$$

Bagian ruas kanan Persamaan (1.29) yakni

$$(1 - kr) \langle u_h^N, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial u_h^N}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \right\rangle + k(r - q - \sigma^2) \left\langle S \frac{\partial u_h^N}{\partial S}, \phi_i \right\rangle$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, misalkan matriks $B = [b_{ij}]$ dengan entri

$$b_{ij} = (1-kr)\langle \phi_j, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial \phi_j}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \right\rangle + k(r-q-\sigma^2) \left\langle S \frac{\partial \phi_j}{\partial S}, \phi_i \right\rangle.$$

Didefinisikan $f_i^N = -k \langle F(S, S_c^N), \phi_i \rangle$, untuk $i = 1, 2, \dots, M-1$. Ada tiga kemungkinan harga S_i terkait dengan S_c^N , akibanya nilai f_i^N menjadi

$$f_i^N = \begin{cases} -k \langle F_1, \phi_i \rangle_{[S_{i-1}, S_{i+1}, 1]} & S_i < S_c^N \\ -k \langle F_1, \phi_i \rangle_{[S_{i-1}, S_i, 1]} - k \langle F_2, \phi_i \rangle_{[S_i, S_{i+1}, 1]} & S_i = S_c^N \\ -k \langle F_2, \phi_i \rangle_{[S_{i-1}, S_{i+1}, 1]} & S_i > S_c^N \end{cases} \quad (1.32)$$

dengan

$$F_1 = qS \left(\frac{E - S_{\max}}{S_{\max}} \right) \quad (1.33)$$

$$F_2 = qS \left(\frac{E - S_{\max}}{S_{\max}} \right) + (qS - rE). \quad (1.34)$$

Diperoleh

$$f_i^N = \begin{cases} k \left(q - \frac{qE}{S_{\max}} \right) hS_i, & S_i < S_c^N \\ k \left(\left(\frac{hS_i}{2} - \frac{h^2}{6} \right) q - \frac{qEhS_i}{S_{\max}} + \frac{rEh}{2} \right), & S_i = S_c^N \\ k \left(-\frac{qE}{S_{\max}} hS_i + rEh \right), & S_i > S_c^N \end{cases} \quad (1.35)$$

Misalkan f^N merupakan vektor kolom sedemikian sehingga

$$f^N = [f_1^N, f_2^N, \dots, f_{M-1}^N]^T. \quad (1.36)$$

Persamaan (1.29) menjadi

$$A\alpha^{N-1} = B\alpha^N + f^N. \quad (1.37)$$

Matriks A merupakan matriks tridiagonal dominan, sehingga Persamaan (1.37) dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai macam metode eliminasi.

Batas eksekusi pada saat t^{N-1} ditentukan dengan mendefinisikan parameter relaksasi δ yang dikaitkan dengan k dan h , δ didefinisikan sebagai

$$\delta = maks\left(\min\left((k^2 + k * h), 10^{-4}\right), 10^{-8}\right). \tag{1.38}$$

Batas eksekusi numerik ditentukan sebagai berikut,

$$S_c^{N-1} = \min_{1 \leq i \leq M-1} \left\{ S_i \geq S_c^N \mid |u_h^{N-1}(S_i) - U(T, S)| \leq \delta \right\}. \tag{1.39}$$

3. Perhitungan pada saat t^j , $j = N - 2, \dots, 1, 0$

Solusi hampiran $U^j(S)$ dihitung dengan skema yang hampir sama dengan perhitungan pada saat t^{N-1} . Perbedaannya terletak pada penggunaan skema tiga titik untuk hampiran turunan U terhadap t di titik t^j (Kang *et al*, 2008:279). Persamaan (1.18) menjadi

$$\frac{u_h^{j+2}(S) - u_h^j(S)}{2k} + \frac{1}{2}(\mathcal{L}u_h^{j+2}(S) + \mathcal{L}u_h^j(S)) = F(S, S_c^{j+1}) \tag{1.40}$$

dimana u_h^{j+2} dan S_c^{j+1} telah diketahui nilainya dari perhitungan sebelumnya. Dari Persamaan (1.40) diperoleh

$$(I - k\mathcal{L})u_h^j(S) = (I - k\mathcal{L})u_h^{j+2}(S) + 2kF(S, S_c^{j+1}). \tag{1.41}$$

Dipilih fungsi $\phi_i \in V_h$ sebagai fungsi test dan mengalikan ϕ_i pada kedua ruas Persamaan (1.41) diperoleh

$$\langle (I - k\mathcal{L})u_h^j, \phi_i \rangle = \langle (I - k\mathcal{L})u_h^{j+2}, \phi_i \rangle + \langle 2kF(S, S_c^{j+1}), \phi_i \rangle. \tag{1.42}$$

Substitusi Persamaan (1.29) ke Persamaan (1.41) diperoleh

$$\begin{aligned} & (1 + kr) \langle u_h^j, \phi_i \rangle + \frac{k\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial u_h^j}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \right\rangle - k(r - q - \sigma^2) \left\langle S \frac{\partial u_h^j}{\partial S}, \phi_i \right\rangle \\ & = (1 - kr) \langle u_h^{j+2}, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \right\rangle + k(r - q - \sigma^2) \left\langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, \phi_i \right\rangle \\ & = (1 - kr) \langle u_h^{j+2}, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \right\rangle + k(r - q - \sigma^2) \left\langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, \phi_i \right\rangle \\ & \quad - 2k \langle F(S, S_c^{j+1}), \phi_i \rangle. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Ruas kiri Persamaan (1.43) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yakni

$$\begin{aligned}
 & (1+kr)\langle u_h^j, \phi_i \rangle + \frac{k\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial u_h^j}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \right\rangle - k(r-q-\sigma^2) \left\langle S \frac{\partial u_h^j}{\partial S}, \phi_i \right\rangle \\
 & = 2\langle u_h^j, \phi_i \rangle - (1-kr)\langle u_h^j, \phi_i \rangle + \frac{k\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial u_h^j}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \right\rangle \\
 & \quad - k(r-q-\sigma^2) \left\langle S \frac{\partial u_h^j}{\partial S}, \phi_i \right\rangle \\
 & = (2A - B)\alpha^j. \tag{1.44}
 \end{aligned}$$

Sedangkan ruas kanan Persamaan (1.43) menjadi

$$\begin{aligned}
 & (1-kr)\langle u_h^{j+2}, \phi_i \rangle - \frac{k\sigma^2}{2} \left\langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, S \frac{\partial \phi_i}{\partial S} \right\rangle + k(r-q-\sigma^2) \left\langle S \frac{\partial u_h^{j+2}}{\partial S}, \phi_i \right\rangle \\
 & - 2k\langle F(S, S_c^{j+1}), \phi_i \rangle = B\alpha^{j+2} + 2f\alpha^{j+1} \tag{1.45}
 \end{aligned}$$

dengan $\alpha^j = [\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_{M-1}^j]^T$, untuk $j = N-2, \dots, 2, 1, 0$.

Misalkan

$$f^{j+1} = [f_1^{j+1}, f_2^{j+1}, \dots, f_{M-1}^{j+1}]^T \tag{1.46}$$

dimana

$$f_i^{j+1} = \begin{cases} k \left(q - \frac{qE}{S_{\max}} \right) hS_i, & S_i < S_c^{j+2} \\ k \left(\left(\frac{hS_i}{2} - \frac{h^2}{6} \right) q - \frac{qEhS_i}{S_{\max}} + \frac{rEh}{2} \right), & S_i = S_c^{j+2} \\ k \left(-\frac{qE}{S_{\max}} hS_i + rEh \right), & S_i > S_c^{j+2} \end{cases}. \tag{1.47}$$

Persamaan (1.43) akan menjadi

$$(2A - B)\alpha^j = B\alpha^{j+2} + 2f^{j+1} \tag{1.48}$$

untuk $j = N-2, \dots, 1, 0$. Persamaan (1.48) dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai metode eliminasi sehingga diperoleh nilai α^j .

Solusi hampiran $u_h^0(S)$ dan harga opsi pada saat $t = 0$ adalah

$$C(S_i, 0) = y(S_i) - u_h^0(S_i) \tag{1.49}$$

Batas eksekusi pada saat $j = N - 2, \dots, 1, 0$ ditentukan sebagai berikut,

$$S_c^j = \min_{1 \leq i \leq M-1} \left\{ S_i \geq S_c^{j-1} \mid \left| u_h^j(S_i) - u_h^{j-1}(S_i) \right| \leq \delta \right\}. \tag{1.50}$$

Penentuan harga dan batas eksekusi pada opsi jual dapat dilakukan secara analog. Transformasi harga opsi jual P menjadi

$$W(S, t) = y_p(S) - P(S, t) \tag{3.51}$$

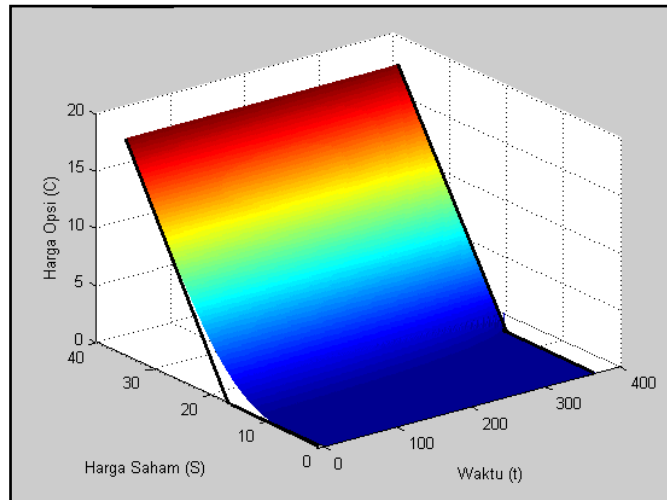
dimana
$$y_p(S) = E \frac{S_{\max} - S}{S_{\max}}. \tag{3.52}$$

Diperoleh suatu kasus dimana diketahui parameter-parameter input perhitungan sebagai berikut : $T = 1, \sigma = 0.32, r = 0.1, q = 0.05, E = 10$. Dipilih $M = 365$ dan $N = 365$. Sebagian hasil perhitungan harga dan batas eksekusi opsi beli pada saat $t = 0$, disajikan pada Tabel 1 berikut,

Tabel 1. Hasil perhitungan numerik opsi beli

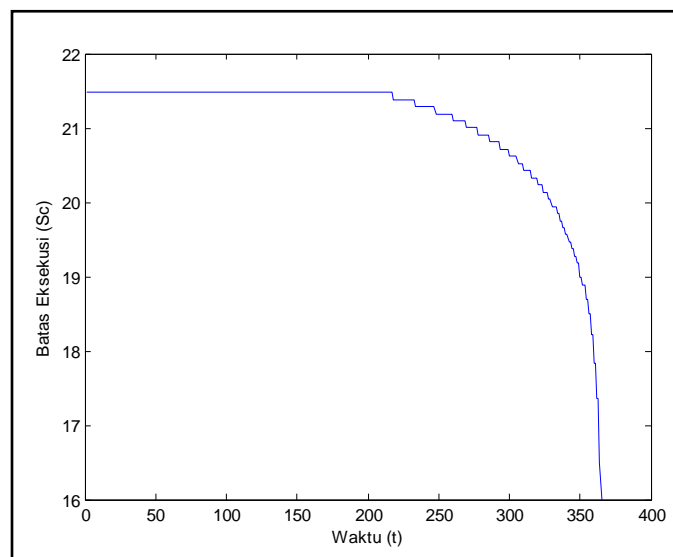
S	C	S_c
14.0000	1.1400	21.4795
15.0548	1.5775	
15.5342	1.7994	
16.0137	2.0355	

Dari Tabel 4, diperoleh harga opsi sebesar \$1.8 (dengan pembulatan). untuk harga saham \$15.5. Gambar 1 memperlihatkan *mesh* hasil perhitungan numerik harga opsi beli di seluruh domain D , sedangkan Gambar 2 memperlihatkan batas eksekusi opsi beli



Gambar 1. Mesh hasil numerik harga opsi beli

Pada Gambar 15, fungsi payoff opsi beli ditunjukkan dengan kurva berwarna hitam. Dapat dilihat bahwa harga opsi beli lebih besar atau sama dengan nilai fungsi *payoff* opsi beli. Selain itu, harga opsi beli monoton naik terhadap harga saham, dan monoton turun terhadap waktu. Pada saat $t = 0$, kurva harga opsi beli berupa kurva lengkung. Semakin mendekati tanggal kadaluwarsa kurva harga opsi beli memiliki bentuk mendekati kurva fungsi *payoff* opsi beli, sedangkan pada saat $t = T$, kurva harga opsi beli merepresentasikan fungsi *payoff* opsi beli.



Gambar 2. Plot hasil numerik batas eksekusi opsi beli

Pada domain waktu terdapat 365 titik nodal, sedangkan umur opsi selama satu tahun. Akibatnya, setiap titik nodal pada domain waktu menunjukkan satu satuan hari. Pada Gambar 16, dapat dilihat perilaku monoton turun dari batas eksekusi opsi beli terhadap waktu, dapat dilihat pada hari opsi akan dibeli ($t = 0$) sampai opsi berumur 217 hari ($t = 217$), batas eksekusi opsi bernilai \$21.5 (dengan pembulatan). Selanjutnya batas eksekusi opsi akan terus turun sampai titik terendah, yakni pada tanggal kadaluwarsa opsi ($t = 365$) sebesar \$16.

3. KESIMPULAN

1. Penentuan batas eksekusi opsi tipe Amerika model Black-Scholes menggunakan *Finite Elements Method* dibagi menjadi beberapa tahap sebagai berikut :
 - a. Memformulasikan batas eksekusi opsi secara matematis berdasarkan sifat-sifat yang telah diketahui.
 - b. Memilih parameter relaksasi untuk mengubah formula batas eksekusi opsi yang telah diperoleh menjadi formula batas eksekusi opsi numerik.
 - c. Menentukan batas eksekusi opsi numerik sepanjang umur opsi.
2. Penentuan harga opsi tipe Amerika model Black-Scholes menggunakan *Finite Elements Method* dibagi menjadi beberapa tahap berikut :
 - a. Memodelkan opsi tipe Amerika berdasarkan kerangka pemodelan Black-Scholes. Model yang diperoleh berupa sistem persamaan yang terdiri atas persamaan diferensial parsial orde dua nonhomogen, nilai awal dan syarat batas.
 - b. Mengasumsikan solusi dari sistem sebagai anggota ruang Hilbert. Transformasi sistem agar solusi memenuhi syarat keanggotaan ruang Hilbert. Mengubah model ke bentuk *weak formulation*.
 - c. Mencari solusi hampiran sistem pada subruang berdimensi hingga dengan basis fungsi *hat*.

4. DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. 1987. *Elementary Algebra with Application*. 5th.ed. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc.
- Ben-Yu, Guo. 1998. *Spectral Methods and Their Applications*. Singapore : World Scientific Publishing.
- Bierens, Herman J., 2007. *Introduction to Hilbert Space*. Lecture note. Pennsylvania State University.
- Black, F dan Scholes, M. 1973. *The Pricing of option dan Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy Vol. 81, no 3. JSTOR
- Brenner, Susanne.C. 2008. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*.3rd edition.New York : Springer.
- Bronson, R dan Costa,G. 2006. *Schaum's Outline of Differential Equations*. 3th.ed. New York : McGraw Hill Professional.
- Coelen, Nathan. 2002. *Black-Scholes Pricing Model*. Trinity University
- Courant, R. 1943. *Variational Methods for The Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations*. Bulletin of the American Mathematical Society.
- Evans, Lawrence. 2002. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. UC Berkeley.
- Fabozzi, Frank J. 2000. *The Handbook of Financial Instrument*. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc.
- Friedberg, Stephen H. 1989. *Linier Algebra*. 2nd.ed. New Jersey :Prentice Hall.
- Goldberg, Ricard R. 1976. *Methods of Real Analysis*. 2nd.ed. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc.
- Grimmett, G dan Stirzaker. 2001. *Probability and Random Processes*. 3th.ed. New York : Oxford University Press Inc.
- Gunzburger, Max.D dan Peterson, Janet.S. 2009. *Finite Element Methods*. Jurnal.
- Haugen, Robert.A. 1997. *Modern Invesment Theory*.4th edition. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall.
- Hoel, Paul.G *et al*. 1972. *Introduction to Stochastic Prosses*. Houghton Mifflin Company.

- Hull, John. 2006. *Option, Futures, and Other Derivative Securities*. New Jersey: Prentice Hall.
- Husnan, Suad. 1994. *Dasar - Dasar Teori Portofolio dan Analisis Sekuritas*. Yogyakarta: AMPYKPN.
- Kang, S. Kim dan T. Kwon, Y. 2008. *Finite Element Methods for The Price and The Free Boundary of American Call and Put Option*. J.KSIAM Vol 12, No.4.
- Kishimoto, Manabu. 2008. *On the Black-Scholes Equation: Various Derivations*. MS&E Term Paper.
- Kiusalaas, Jaan. 2005. *Numerical Methods In Engineering with MATLAB*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Kolmogorov, A.N, Fomin, S.V. 1980. *Introductory Real Analysis*. New York : Dover Publications
- Kwok, Yeu.K . 2008. *Mathematical Model of Financial Derivatif*, 2nd.ed. Berlin : Spinger.
- Kwok, Yeu.K dan Dai, Min. 2004. *Knok-In American option*. Jurnal of Futures Markets. Wiley Periodicals.
- Mikhlin, S.G. 1967. *Linier Equations of Mathematical Physics*. New York : Holt, Rinehart and Winston.
- Oliver, Pauly. 2004. *Numerical Simulations of American Option*. Universität Ulm. Diplomarbeit in Wirtschaftsmathematik.
- Pham, Keith. 2007. *Finite Element Modelling of Multi-Asset Barrier options*. Desertasi, University of Reading.
- Pinsky, Mark. A dan Karlin, S. 2010. *An Introduction to Stochastic Modeling*. 4th.ed. Academic Press.
- Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations*. 3th.ed. New York : John Wiley & Sons, Inc.
- Sahid. 2005. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Santosa, Widiarti. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta :Dirjen Dikti
- Salsa, Sandro. 2008. *Partial Differential Equations In Action*. Milan: Springer-Verlag.
- Süli, Endre. 2007. *Finite Element Methods for Partial Differential Equations*. Lecture Notes : Cambridge University.
- _____. *An Intoduction to Computational Finace*. Imperial College. <http://www.worldscibook.com/economics/p556.html>, diakses tanggal 11 September 2011.
- Süli, Endre dan Mayers, David. 2003. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Topper, Jürgen. 2005. *Option Pricing with Finite Element*. Wilmott Magazine.
- Wilmott, Paul dan Howison, Jeff D. S. *Option Pricing, Mathematical Model and Computation*.
- Zanten, Harry V. 2004. *An Introduction to Stochastic Processes in Continuous Time*. Lecture notes.
- Zhang, Jin. 2007. *Some Innovative Numerical Approaches for Pricing American Option*. Master Thesis. University of Wollongong.
- Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K. 1965. *Finite Elements in The Solution of Field Problems*. The Engineer.