OLIMPIADE MATEMATIKA TINGKAT SEKOLAH MENENGAH ATAS

MATERI : TEORI BILANGAN

Disajikan pada Pembimbingan Kompetisi Guru-Guru Matematika dalam pemecahan soal-soal OSN di lingkungan Sekolah Menengah Atas Kota Yogyakarta

Oleh :

Nikenasih Binatari, M.Si

Jurusan Pendidikan Matematika

FMIPA UNY

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
Yogyakarta
2013

BAB TEORI BILANGAN (Sesi I)

1. Sifat-Sifat Penjumlahan Dan Perkalian Dua Bilangan

Sifat-sifat dalam penjumlahan dua bilangan adalah :
1. Bilangan Ganjil ± Bilangan Ganjil = Bilangan Genap
2. Bilangan Ganjil ± Bilangan Genap = Bilangan Ganjil
3. Bilangan Genap ± Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
4. Bilangan Genap ± Bilangan Genap = Bilangan Genap

Sifat-sifat dalam perkalian dua bilangan adalah :
1. Bilangan Ganjil x Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
2. Bilangan Ganjil x Bilangan Genap = Bilangan Genap
3. Bilangan Genap x Bilangan Ganjil = Bilangan Genap
4. Bilangan Genap x Bilangan Genap = Bilangan Genap

Contoh 1 :

Tentukan bilangan prima terkecil yang membagi $19^{2004} + 45^{2005}$.
Jawab :
19 dan 45 merupakan bilangan ganjil, sehingga 19^{2004} , 45^{2005} keduanya juga merupakan bilangan ganji.
Jumlahan dua buah bilangan ganjil merupakan bilangan genap. Oleh karena $19^{2004} + 45^{2005}$ bilangan genap, maka habis dibagi 2 sedangkan 2 adalah bilangan prima terkecil.
Jadi, bilangan prima terkecil yang membagi $19^{2004} + 45^{2005}$ adalah 2.

Contoh 2 :
Diketahui p dan q adalah bilangan prima dan $p > q$. Jika $p + q = 2005$, maka berapakah $p - q$?
Jawab :
Diketahui $p + q = 2005$. Bilangan 2005 merupakan bilangan ganjil, oleh karena itu p dan q merupakan bilangan ganjil atau genap. Diketahui pula bahwa p dan q adalah bilangan prima. Satu-satunya bilangan prima genap adalah 2. Oleh karena itu salah satu dari p atau q adalah 2, akibatnya bilangan yang lain adalah 2003. Karena $p > q$ maka $p = 2003$ dan $q = 2$.

2. Sifat-sifat Keterbagian

Definisi : Sebuah bilangan bulat a dikatakan membagi b jika terdapat bilangan bulat k sehingga $b = a \cdot k$.

Beberapa hal berkaitan dengan pembagian adalah sebagai berikut :
1.1 Misalkan a, b, c, x dan y bilangan bulat, maka sifat-sifat di bawah ini berlaku :
(1) $a \mid a$ (semua bilangan bulat membagi dirinya sendiri)
(2) $a \mid 0$ (semua bilangan bulat membagi 0)
(3) $1 \mid a$ (satu membagi semua bilangan bulat)
(4) Jika $a \mid 1$ maka $a = \pm 1$
(5) Jika $a \mid b$ maka $a \mid xb$

(6) Jika a | b dan b | c maka a | c
(7) Jika a|b dan a|c maka a|(bx + cy)
(8) Jika a|b maka xa|xb
(9) Jika a|b dan b ≠ 0 maka |a| ≤ |b|
(10) Jika a|b dan b|a maka a = ±b
(11) Jika ab = c maka a|c
(12) Jika a|bc dan FPB(a, b) = 1 maka a|c
(13) 0|a hanya jika a = 0

1.2 Dua bilangan dikatakan prima relatif, jika faktor persekutuan terbesarnya (FPB) dua bilangan tersebut sama dengan 1. Jika suatu bilangan habis dibagi a dan juga habis dibagi b, maka bilangan tersebut akan habis dibagi ab dengan syarat a dan b relatif prima. Berlaku sebaliknya.

1.3 Bilangan yang dapat diubah menjadi perkalian n bilangan bulat berurutan akan habis dibagi n! dengan tanda "!" menyatakan faktorial. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

1.4 Mengingat penjabaran pada dua persamaan berikut :
(i) $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan n ∈ bilangan asli
(ii) $(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan n ∈ bilangan ganjil
Maka $(a - b)$ membagi $(a^n - b^n)$ untuk semua a, b bulat dan n bilangan asli
$(a + b)$ membagi $(a^n + b^n)$ untuk semua a, b bulat dan n bilangan ganjil

Contoh 3 :
Buktikan bahwa 7, 13 dan 181 adalah faktor dari $3^{105} + 4^{105}$
Jawab :
Karena 105 ganjil maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 3 + 4 = 7.
$3^{105} + 4^{105} = (3^3)^{35} + (4^3)^{35} = 27^{35} + 64^{35}$
Karena 35 ganjil maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 27 + 64 = 91.
Karena $91 = 7 \cdot 13$ maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 13.
$3^{105} + 4^{105} = (3^5)^{21} + (4^5)^{21} = 243^{21} + 1024^{21}$
Karena 21 ganjil maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 243 + 1024 = 1267. Karena $1267 = 7 \cdot 181$ maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 181.

Latihan 1.
1. Let *n* be an integer greater than 1. Prove that
   (a) 2^n is the sum of two odd consecutive integers;
   (b) 3^n is the sum of three consecutive integers.
2. (OSK 2002) Bilangan n terbesar sehingga 8^n membagi 44^{44} adalah
3. (OSK 2002) Berapa banyak pasang bilangan bulat positif (a,b) yang memenuhi 1/a + 1/b =1/6
4. (OSK 2003) Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2003$, maka berapakah nilai dari $a^2 + b^2$? (Diketahui bahwa 2003 merupakan bilangan prima)

5. (AIME 1986) Tentukan nilai n terbesar sehingga n + 10 membagi $n^3 + 100$.

3. Uji Habis dibagi

Sebuah bilangan memiliki sifat khusus jika dibagi oleh suatu bilangan tertentu. Beberapa sifat tersebut adalah :

a. Suatu bilangan habis dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhir dari bilangan tersebut adalah 0 atau 5.

b. Suatu bilangan habis dibagi 2^n jika dan hanya jika n digit terakhir dari bilangan tersebut habis dibagi 2^n.

c. Suatu bilangan habis dibagi 3 jika dan hanya jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 3.

d. Suatu bilangan habis dibagi 9 jika dan hanya jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 9.

e. Suatu bilangan habis dibagi 11 jika dan hanya jika selisih antara jumlah digit dari bilangan tersebut pada posisi ganjil dengan jumlah digit dari bilangan tersebut pada posisi genap habis dibagi 11.

Contoh 4 :

(Canadian MO 1980) Jika a679b adalah bilangan lima angka yang habis dibagi 72, tentukan nilai a dan b.

Jawab :

$72 = 9 \cdot 8$. Karena 9 dan 8 relatif prima maka a679b harus habis dibagi 8 dan 9. Karena a679b habis dibagi 8 maka 79b habis dibagi 8. Agar 790 + b habis dibagi 8 maka b = 2.

Karena a6792 habis dibagi 9 maka a + 6 + 7 + 9 + 2 habis dibagi 9. Nilai a yang memenuhi hanya 3.

Jadi bilangan tersebut adalah 36792.

Latihan 2.

1. (AIME 1983) Tentukan bilangan terkecil n sehingga angka-angka 15n hanya terdiri dari 0 dan 8.
2. Tentukan bilangan asli terkecil yang merupakan kelipatan 84 yang angka-angkanya hanya 6 atau 7.
3. (Flanders MO 2000 Final Round) Bilangan asli n terdiri dari 7 angka berbeda dan n habis dibagi oleh masing-masing angkanya. Tentukan tiga angka yang bukan angka dari n.

BAB TEORI BILANGAN (Sesi II)

4. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) Dan Persekutuan Terkecil (KPK)

Pengertian :

FPB (a, b) adalah bilangan asli terbesar d sehingga $d|a$, $d|b$ dan untuk setiap bilangan bilangan asli $e \neq d$ dimana $d|a$ dan $d|b$, maka $e < d$.

KPK (a,b) adalah bilangan asli terkecil m sehingga $a|m$, $b|m$ dan untuk setiap bilangan asli $n \neq m$ dimaan $a|n$ dan $b|n$, maka $m < n$.

Misalkan M dan N adalah dua bilangan asli, maka M dan N dapat dinyatakan sebagai berikut

$$M = p_1^{a1} . p_2^{a2} . p_3^{a3} ... p_n^{an} \text{ dan } N = p_1^{b1} p_2^{b2} p_3^{b3} ... p_n^{bn}$$

Dengan pi adalah faktor prima dari M dan N, sedangkan ai dan bi adalah bilangan cacah, untuk setiap i=1,2,…,n.

Faktor Persekutuan Terbesar dari M dan N ditulis FPB (M, N) = $p_1^{c1} . p_2^{c2} .p_3^{c3} ... p_n^{cn}$

Kelipatan Persekutuan Terkecil dari M dan N ditulis KPK (M, N) = $p_1^{d1} . p_2^{d2} . p_3^{d3} ... p_n^{dn}$

Dengan

$c_1 = \min (a_1, b_1)$; $c_2 = \min (a_2, b_2)$; $c_2 = \min (a_3, b_3)$; ... ; $c_n = \min (a_n, b_n)$

$d_1 = \text{maks} (a_1, b_1)$; $d_2 = \text{maks} (a_2, b_2)$; $d_3 = \text{maks} (a_3, b_3)$; ... ; $d_n = \text{maks} (a_n, b_n)$

Beberapa hal berkaitan dengan FPB adalah :

a. FPB(0,0) = 0
b. FPB(a, 0) = |a|
c. FPB (a, b) = FPB (|a|, |b|)
d. FPB (a,b) = FPB(b,a)
e. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua bilangan asli berurutan adalah 1.
f. Jika d = FPB(a, b) maka $d|a$ dan $d|b$
g. Misalkan a = mp dan b = mq maka FPB(a, b) = m . FPB(p, q)
h. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka $0 \leq$ FPB(a,b) $\leq \min (|a|, |b|)$
i. Misalkan $a > b > 0$ dan $a = bq + r$ untuk bilangan asli a, b, p dan r maka
FPB(a,b) = FPB(b,r)
j. Dua bilangan dikatakan prima relatif, jika faktor persekutuan terbesarnya (FPB) sama dengan 1.
k. Bezout's Lemma : Untuk setiap bilangan bulat a dan b terdapat bilangan bulat x dan y yang memenuhi ax + by = FPB(a, b)

LATIHAN 1 :

1. (OSK 2008) Diketahui FPB (a, 2008) = 251. Jika a > 2008 maka nilai terkecil yang mungkin bagi a adalah ....
2. (OSK 2011) Bilangan asli terkecil lebih dari 2011 yang bersisa 1 jika dibagi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 adalah ....

3. (OSK 2009) Nilai dari $\sum_{k=1}^{2009} fpb(k,7)$ adalah ....

4. (OSP 2004) Notasi fpb(a, b) menyatakan *faktor persekutuan terbesar d*ari bilangan bulat a dan b. Tiga bilangan asli $a_1 < a_2 < a_3$ memenuhi $fpb(a_1, a_2, a_3) = 1$, tetapi $fpb(a_i, a_j) > 1$ jika $i \neq j$, i, j = 1, 2, 3. Tentukan (a_1, a_2, a_3) agar $a_1 + a_2 + a_3$ minimal.

5. (OSP 2006) Dari setiap bilangan satu-angka a, bilangan N dibuat dengan menyandingkan ketiga bilangan a + 2, a + 1, a yaitu N = (a+2)(a+1)a . Sebagai contoh, untuk a = 8, N = 1098. Kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar ....

6. (OSP 2010) Banyaknya anggota himpunan $S = \{\gcd(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) \mid n \in Z\}$ adalah ....

7. (AIME 1998) Ada berapa banyak nilai k sehingga $KPK(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$?

8. Jumlah dua bilangan asli sama dengan 52 sedangkan Kelipatan Persekutuan Terkecilnya sama dengan 168. Tentukan selisih positif dua bilangan tersebut.

5. Banyaknya Faktor Positif

Misalkan $M = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot p_3^{a3} \cdots p_n^{an}$ untuk bilangan asli M serta $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ semuanya adalah bilangan prima maka :

Banyaknya faktor positif dari M adalah $(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \ldots (a_n + 1)$

Contoh 12 :

(OSK 2004 SMP/MTs) Joko mengalikan tiga bilangan prima berbeda sekaligus. Ada berapa faktor berbeda dari bilangan yang dihasilkan ?

Contoh 13 :

(OSK 2004) Bilangan 2004 memiliki faktor selain 1 dan 2004 sendiri sebanyak ....

LATIHAN 2 :

1. (OSK 2008) Banyaknya faktor positif dari 5! adalah

2. (OSP 2007) Di antara bilangan-bilangan 2006, 2007 dan 2008, bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah ....

3. (MATNC 2001) Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki tepat 12 faktor positif.

4. (MATNC 2001) Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki tepat 12 faktor positif dan tidak habis dibagi 3.

5. (OSP 2002) Misalkan M dan m berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil di antara semua bilangan 4-angka yang jumlah keempat angkanya adalah 9. Berapakah faktor prima terbesar dari M − m ?

6. (OSP 2009) Misalkan n bilangan asli terkecil yang mempunyai tepat 2009 faktor dan n merupakan kelipatan 2009. Faktor prima terkeci dari n adalah ....

7. (AIME 1990) n adalah bilangan asli terkecil yang merupakan kelipatan 75 dan memiliki tepat 75 faktor positif. Tentukan nilai dari 75*n*.

8. Misalkan n bilangan asli. 2n mempunyai 28 faktor positif dan 3n punya 30 faktor positif maka banyaknya faktor positif yang dimiliki 6n adalah ....

9. (OSK 2011) Ada berapa faktor positif dari $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 10 ?

10. (AIME 1994) Tentukan faktor prima terbesar dari p(1) + p(2) + ... + p(999) dimana p(n) adalah hasil kali semua angka-angka taknol dari n.

11. (MATNC 2001) Tentukan penjumlahan semua faktor positif dari 84.

12. (AIME 1995) Tentukan banyaknya faktor positif dari n^2 yang kurang dari n tetapi tidak membagi n jika $n = 2^{31}3^{19}$.

13. (AIME 2000) Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki 12 faktor positif genap dan 6 faktor positif ganjil.

14. (OSN 2004) Berapa banyaknya pembagi genap dan pembagi ganjil dari $5^6 - 1$?

6. Kekongruenan

Konsep kekongruenan bilangan dikembangkan berdasarkan konsep bahwa setiap bilangan bulat positif dapat dinyatakan ke dalam bentuk $N = pq + r$ atau $N - r = pq$ dengan p, q, r adalah bilangan bulat dan r berada pada $0 \le r < p$. Persamaan $N = pq + r$ dengan p menyatakan pembagi, q menyatakan hasil bagi dan r menyatakan sisa.

Persamaan di atas sering pula ditulis $N \equiv r \pmod p$

Beberapa sifat berkaitan dengan modulu adalah sebagai berikut. Misalkan a, b, c, d dan m adalah bilangan-bilangan bulat dengan d > 0 dan m > 0, berlaku :

(i) $a \equiv a \pmod m$

(ii) Jika $a \equiv b \pmod m$, maka $b \equiv a \pmod m$

(iii) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $b \equiv c \pmod m$ maka $a \equiv c \pmod m$

(iv) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $d|m$ maka $a \equiv b \pmod d$

(v) Jika $a \equiv b \pmod m$ maka $a^k \equiv b^k \pmod m$ untuk semua k bilangan asli

(vi) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_o$ maka $f(a) \equiv f(b) \pmod m$

(vii) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$ maka $a + c \equiv b + d \pmod m$

(viii) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$ maka $ac \equiv bd \pmod m$

(ix) $(am + b)^k \equiv b^k \pmod m$ untuk semua k bilangan asli

(x) Dari sifat (viii) didapat $(am + b)^k \cdot (cm + d)^n \equiv b^k \cdot d^n \pmod m$ untuk semua k dan n bilangan asli

(xi) Jika $ca \equiv cb \pmod m$ dan FPB(c, m) = 1 maka $a \equiv b \pmod m$

(xii) Misalkan $n \in N$ dan S(n) adalah penjumlahan digit-digit dari n maka berlaku $n \equiv S(n) \pmod 9$.

(xiii) $n^5 \equiv n \pmod{10}$ untuk setiap $n \in N$.

7. Bilangan Bulat, Rasional dan Prima

Secara umum bilangan dibagi menjadi dua yaitu bilangan real dan bilangan tidak real.

Bilangan real dibagi menjadi dua yaitu bilangan rasional dan bilangan tak rasional.

Bilangan rasional adalah bilangan real yang dapat diubah ke dalam bentuk *ba* dengan a dan b keduanya bilangan bulat dan $b \neq 0$ sedangkan bilangan tak rasional adalah bilangan real yang tidak dapat diubah ke dalam bentuk *ba* dengan a dan b keduanya bilangan bulat dan $b \neq 0$.

Contoh bilangan tak rasional adalah $\sqrt{2}$, π, e, ${}^2\log 3$ dan sebagainya.

Bilangan rasional dapat dibagi menjadi dua yaitu bilangan bulat dan bilangan pecahan.

Sebuah bilangan bulat positif dapat diuraikan menjadi dalam bentuk angka-angkanya. Misalkan *NABCDE*L adalah suatu bilangan yang terdiri dari n digit, maka dapat diuraikan menjadi $A\cdot 10^{n-1} + B\cdot 10^{n-2} + C\cdot 10^{n-3} + D\cdot 10^{n-4} + \cdots + N$.

Sebuah bilangan bulat selalu dapat diubah menjadi bentuk $pq + r$ dengan $0 \le r < p$. Sehingga jika sebuah bilangan bulat dibagi oleh p maka kemungkinan sisanya ada p yaitu $0, 1, 2, \cdots, p - 1$.

Sebagai contoh jika sebuah bilangan bulat dibagi oleh 3 maka kemungkinan sisanya adalah 0, 1 atau 2. Maka setiap bilangan bulat dapat diubah menjadi salah satu bentuk 3k, 3k + 1 atau 3k + 2 untuk suatu bilangan bulat k.

Bilangan bulat positif $p > 1$ merupakan bilangan prima jika hanya memiliki tepat dua faktor positif yaitu 1 dan p itu sendiri sedangkan bilangan bulat n merupakan bilangan komposit jika n memiliki lebih dari dua faktor positif.

Bilangan prima genap hanya ada satu yaitu 2.

Beberapa sifat bilangan prima :

(1) Jika p prima maka untuk sebarang bilangan asli n berlaku $p|n$ atau $FPB(p, n) = 1$.

(2) Bilangan prima hanya memiliki dua faktor positif yaitu 1 dan p

(3) Jika p prima membagi n^2 untuk suatu bilangan asli n maka $p|n$.

(4) Jika $p|ab$ untuk a dan b bilangan asli maka $p|a$ atau $p|b$.

(5) Semua bilangan prima $p > 3$ memiliki bentuk $6k \pm 1$.

(6) Faktor prima terkecil dari n yang bukan bilangan prima $\le \sqrt{n}$.

8. Bilangan Kuadrat Sempurna

Bilangan kuadrat sempurna adalah bilangan bulat yang dapat diubah ke dalam bentuk n^2 dengan n adalah bilangan bulat.

Beberapa sifat bilangan kuadrat adalah :

a. Angka satuan dari bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, 9.

b. Bilangan kuadrat jika dibagi 3 akan bersisa 0 atau 1.

c. Bilangan kuadrat jika dibagi 4 akan bersisa 0 atau 1

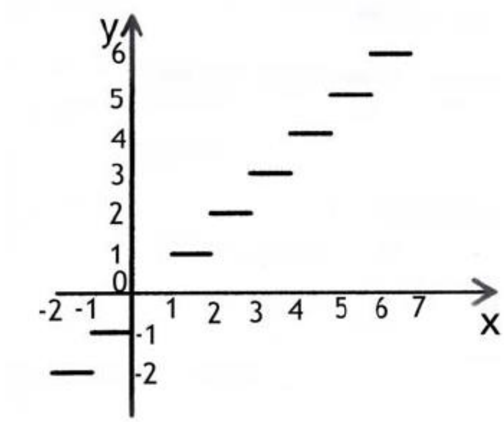
d. Bilangan kuadrat jika dibagi 5 akan bersisa 0, 1, atau 4.

e. Bilangan kuadrat jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1, atau 4. Dan seterusnya.

9. Fungsi Tangga dan Ceiling

Perhatikan fungsi $y = f(x) = \lfloor x \rfloor$ dengan tanda $\lfloor \alpha \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan α.

Jika fungsi tersebut digambarkan dalam koordinat kartesian maka



Selain itu ada juga yang disebut fungsi ceiling yang merupakan kebalikan dari fungsi tangga.
Perhatikan fungsi y = f(x) = $\lceil x \rceil$ dengan tanda $\lceil \alpha \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan α.
Dari pengertian tersebut akan didapatkan
(i) $(x - 1) < \lfloor x \rfloor \leq x$
(ii) $\lfloor x \rfloor \leq \lceil x \rceil$.
Tanda kesamaan terjadi hanya saat x adalah bilangan bulat.

Daftar Pustaka

- Binatari, Nikenasih. Super Genius Olimpiade Matematika SMP. 2011. Pustaka Widyatama. Yogyakarta.
- Hermanto, Edy. Diktat Pembinaan Olimpiade Matematika Dasar.
- Olson, Steve. Count down : Six kids vie for glory at the world's toughest math competition. 2004. Houghton Mifflin. USA.
- Shadiq, Fajar. Sistem Pembinaan dan Karakteristik Soal Olimpiade Matematika. 2009. PPPPTK Matematika Yogyakarta.