Disajikan pada Pelatihan TOT untuk guru-guru SMA di Kabupaten Bantul

"Training of Trainer (TOT) Olimpiade Matematika Tingkat Sekolah Menengah Atas Untuk Guru-guru Sekolah Menengah Atas di Kabupaten Bantul"

Oleh :

Nikenasih Binatari, M.Si

Jurusan Pendidikan Matematika

FMIPA UNY

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Yogyakarta

2013

SESI I TEORI BILANGAN

1.1 SIFAT HABIS DIBAGI PADA BILANGAN BULAT

Untuk dapat memahami sifat habis dibagi pada bilangan bulat, sebelumnya perhatikan contoh berikut :

234 = (5 x 46) + 4.

Secara umum, contoh diatas dapat dinyatakan sebagai berikut

Untuk sebarang a dan b bilangan bulat dengan $a \neq 0$, maka terdapat dengan tunggal q dan r bilangan bulat sedemikian sehingga b dapat dinyatakan sebagai

$$b = (a \times q) + r$$

atau

$$b = aq + r$$

dengan $0 \leq r < |a|$.

a kemudian disebut pembagi, *q* disebut hasil bagi dan *r* disebut sisa hasil bagi. Pernyataan $b = aq + r$ sering disebut sebagai algoritma pembagian. Untuk kasus r = 0 maka *b* dikatakan habis dibagi *a*. Akibatnya muncul definisi berikut :

Definisi :

Suatu bilangan bulat b dikatakan habis dibagi (divisible) oleh suatu bilangan bulat tak nol a jika ada suatu bilangan bulat q sedemikian sehingga b = aq, atau dapat juga dikatakan a membagi habis b dan ditulis dengan a | b .

Sifat – sifat hasil bagi :

1. *jika* a | b *maka* a | bc *untuk sebarang c bilangan bulat.*
2. *jika* a | b *dan* b | c *maka* a | c.
3. *jika* a | b *dan* a | c *maka* a | bx+cy *untuk sebarang x,y bilangan bulat.*
4. *jika* a | b *dan* b | a *maka* $a = \pm b$.
5. *jika* a | b *dan* $b \neq 0$, *maka* $|a| \leq |b|$.
6. *jika* $m \neq 0$, *maka* a | b *jika hanya jika* ma | mb.

Jika a | b maka a disebut faktor dari b. Kemudian jika suatu bilangan bulat d membagi dua bilangan bulat a dan b maka d disebut faktor persekutuan dari a dan b. Bilangan bulat terbesar di antara semua faktor persekutuan bagi a dan b dinamakan **faktor persekutuan terbesar** (greatest common divisor) bagi a dan b dan dilambangkan dengan GCD(a,b).

Untuk menentukan faktor persekutuan terbesar dapat pula digunakan Teorema A*lgoritma Euclide* berikut :

Teorema 1 : Algoritma Euclide

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan a > b > 0, maka GCD(a,b) dapat dicari dengan mengulang algoritma pembagian.

$$a = q_1 b + r_1 \quad 0 < r_1 < b$$
$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad 0 < r_2 < r_1$$
$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad 0 < r_3 < r_2$$
$$\vdots$$
$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0$$

Maka, r_n, *sisa terakhir dari pembagian diatas yang bukan nol merupakan GCD(a,b).*

Contoh 1.1 :

Tentukan GCD(4840,1512) ?

Akibat dari teorema algoritma euclide yaitu untuk setiap GCD(*a.b*) maka terdapat bilangan bulat *x* dan *y* sedemikian hingga GCD(*a,b*) = *ax* + *by*. Misalnya pada contoh diatas, akan dicari *x* dan *y* sedemikian hingga 8 = 4840*x* + 1512*y*.

GCD(4840,1512) = 8 = 304 – 296
= 304 – (1512 – (304 x 4))
= (304 x 5) – 1512
= (4840 – (1512 x 3)) x 5 – 1512
= (5 x 4840) – (15 x 1512) – 1512
= (5 x 4840) – (16 x 1512)

Jadi x= 5 dan y = -16.

Akibat selanjutnya dari teorema euclide yaitu persamaan linear Diophantine.

Teorema 2 : Diophantine

Suatu persamaan linear Diophantine ax + by = c dengan a,b dan c bilangan bulat mempunyai penyelesaian bilangan bulat jika dan hanya jika GCD(a,b) membagi habis c.

Bukti :

Dari akibat sebelumnya diketahui bahwa untuk setiap GCD(*a.b*) maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian hingga GCD(*a,b*) = *am* + *bn.* Selanjutnya Karena GCD(a,b) membagi habis c maka terdapat bilangan k sedemikian hingga

$c = k \cdot GCD(a,b)$
$c = k \cdot (am + bn)$
$c = a(km) + b(kn)$
Jadi salah satu penyelesain untuk persamaan linear Diophantine tersebut yaitu $x = km$ dan $y = kn$. Terbukti.

Diambil sebarang bilangan bulat k, akan ditunjukkan bahwa jika x_0 dan y_0 adalah salah satu penyelesaian persamaan linear diophantine ax + by = c, maka

$$x = x_0 + \frac{b}{GCD(a,b)}k$$

$$y = y_0 - \frac{a}{GCD(a,b)}k$$

juga merupakan penyelesain persamaan linear Diophantine tersebut.

Contoh 1.2:
Tentukan penyelesaian umum persamaan Diophantine 754x+221y=13.

1.2 BILANGAN – BILANGAN KHUSUS
Ada beberapa macam macam bilangan khusus. Pada subbab ini hanya akan dibahas mengenai 3 biangan khusus yaitu bilangan prima, bilangan komposit dan bilangan kuadrat.

A. Bilangan Prima
   Bilangan prima adalah bilangan asli hanya mempunyai dua faktor yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. Contoh bilangan prima yaitu 2, 3, 5, 7, …

B. Bilangan Komposit
   Bilangan komposit adalah bilangan yang mempunyai lebih dari 2 faktor. Contoh bilangan komposit yaitu 4, 6, 8, 9, 10, …..

C. Bilangan Bulat Kuadrat
   Suatu bilangan a disebut bilangan bulat kuadrat jika terdapat bilangan bulat b sedemikian hingga $b^2 = a$. Contoh bilangan bulat kuadrat yaitu 1, 4, 9, 16, 25, …

Sifat dari bilangan kuadrat yaitu
1. angka satuan yang mungkin untuk bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, dan 9.
2. setiap bilangan kuadrat dibagi 4 maka sisanya 0 atau 1.
3. jika p bilangan prima dan p membagi habis n^2 maka p^2 membagi habis n^2.

Contoh 1.3 :

Tunjukkan bahwa kuadrat sebarang bilangan bulat dapat dituliskan dalam bentuk 4k atau 8k+1.

1.3 KONGRUENSI

Misalkan m adalah suatu bilangan bulat positif. Dua buah bilangan a dan b dikatakan kongruen modulo m jka dan hanya jika m | a – b, dan ditulis dengan $a \equiv b \pmod{m}$

Contoh :
23 = 3 mod 5.

Teorema 4 :
Misalkan a, b, c, d, x dan y melambangkan bilangan bulat, maka

a. $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv a \pmod{m}$ dan $a - b \equiv 0 \pmod{m}$ adalah pernyataan pernyataan yang setara.

b. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ maka $a \equiv c \pmod{m}$.

c. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan d membagi habis m maka $a \equiv b \pmod{d}$

d. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $ax + cy \equiv bx + dy \pmod{m}$ dan $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Bukti ;
$a \equiv b \pmod{m}$, maka terdapat q sedemikian hingga a – b = qm. Akibatnya $-(a-b) = -qm$ sehingga $-a + b = (-q)m$. Karena terdapat bilangan bulat $-q$ sedemikian hingga $b - a = (-q)m$, maka $b \equiv a \pmod{m}$. Kemudian karena $a - b = qm + 0$, maka $a - b \equiv 0 \pmod{m}$. Terbukti.

Latihan b dan c disediakan sebagai latihan.

d.
m | (a – b) dan m | (c – d) maka m | $\left[x(a-b) + y(c-d)\right]$, atau $m \mid \left[(ax+cy) - (bx+dy)\right]$.
Sehingga didapatkan $ax + cy = bx + dy \pmod{m}$.

Akibat dari teorema diatas yaitu jika $f(x)$ adalah suatu fungsi polinom dengan koefisien koefisien bulat dan $a \equiv b \bmod m$, maka berlaku $f(a) \equiv f(b) \bmod m$. Berikut adalah contoh penggunaan akibat dari teorema 2.

Contoh 1.4 :

Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli n, $A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ *habis dibagi 1897.*

Jawab :

Misalkan n suatu bilangan asli. Perhatikan bahwa 1897 = 7 x 271. selanjutnya $2903 \equiv 803 \pmod 7$ dan $464 \equiv 261 \pmod 7$ Begitu pula $2903 \equiv 464 \pmod{271}$ dan $803 \equiv 261 \pmod{271}$, dengan demikian A habis dibagi 7 dan 271. karena GCD(7,271) = 1, maka dapat disimpulkan bahwa A habis dibagi 1897.

Contoh 1.5 :

Buktikan bahwa kuadrat bilangan suatu bilangan bulat berbentuk $\equiv 0 \text{ } atau \text{ } 1 \pmod 3$

TUGAS KELOMPOK HARI PERTAMA

1. Tentukan bilangan prima p sedemikian sehingga 23p + 1bilangan prima

2. Tentukan bilangan prima terkecil p sedemikian sehingga 2002 – p dan 2002 + p kedua juga bilangan prima.

3. If *p* and *q* leave remainders of 1111 and 1234 respectively when divided by 2004, what is the remainder when *p*+*q* is divided by 2004?

4. For positive integers *n*, we define the ‘left’ of *n* as the number formed by removing its rightmost digit. Similarly, we define the ‘right’ of *n* as the number formed by removing its leftmost digit. For example, the ‘left’ and ‘right’ of 12345 are 1234 and 2345 respectively. If the difference between the ‘left’ and the ‘right’ of *n* is a multiple of 9, then we say that *n* is a ‘good number’; otherwise *n* is not a ‘good number’. How many ‘good numbers’ are there between 10000 and 100000?

KUNCI JAWABAN TUGAS KELOMPOK

1. Tentukan bilangan prima p sedemikian sehingga 23p + 1bilangan prima

   Jawab :

   Diketahui bahwa 23p + 1 merupakan bilangan prima. Karena p > 1 dan satu-satunya bilangan prima yang genap adalah 2 maka jelas bahwa 23p + 1 tidak mungkin bilangan genap. Darisini diperoleh bahwa 23p + 1 adalah bilangan ganjil, yang berakibat 23p merupakan bilangan genap. Karena 23 bilangan ganjil, maka agar 23p bilangan genap, p haruslah bilangan genap. Satu-satunya bilangan prima yang juga merupakan bilangan genap adalah 2. Jadi, satu-satunya nilai p dipenuhi oleh 2.

2. Tentukan bilangan prima terkecil p sedemikian sehingga 2002 – p dan 2002 + p keduanya juga bilangan prima.

   Jawab :

   2002 = 2 x 7 x 11 x 13

   Agar 2002 – p dan 2002 + p bilangan prima, jelas bahwa p tidak boleh sama dengan 2, 7, 11 dan 13. Karena 2002 – p juga bilangan prima, maka nilai p tidak boleh negatif. Akibatnya p < 2001.

   p = 1999.

3. If *p* and *q* leave remainders of 1111 and 1234 respectively when divided by 2004, what is the remainder when *p*+*q* is divided by 2004?

   Jawab :

   Diketahui bahwa terdapat p1 dan q1 sedemikian sehingga

   p = 2004p1 + 1111 dan q = 2004q1 + 1234.

   Darisini diperoleh bahwa

   p + q = (2004p1 + 1111) + (2004q1 + 1234)

   = 2004(p1+q1) + 1111 + 1234

   = 2004(p1 + q1) + 2345

   = 2004(p1 + q1 + 1) 341

   Jadi, sisa pembagian p + q terhadap 2004 adalah 341.

4. For positive integers *n*, we define the 'left' of *n* as the number formed by removing its rightmost digit. Similarly, we define the 'right' of *n* as the number formed by removing its leftmost digit. For example, the 'left' and 'right' of 12345 are 1234 and 2345 respectively. If the difference between the 'left' and the 'right' of *n* is a multiple of 9, then we say that *n* is a 'good number'; otherwise *n* is not a 'good number'. How many 'good numbers' are there between 10000 and 100000?

   Jawab :

   Bilangan diantara 10000 sampai 100000 terdiri dari 5 digit. Misalkan bilangan tersebut adalah abcde, maka left dan right dari abcde adalah abcd dan bcde.

   abcd = 1000a + 100b + 10c + d dan

   bcde = 1000b + 100c + 10d + e.

   Oleh karena itu selisih dari abcd dan bcde adalah

$$|abcd - bcde| = |(1000a + 100b + 10c + d) - (1000b + 100c + 10d + e)|$$
$$= |1000a - 900b - 90c - 9d - e|$$
$$= |999a - 900b - 90c - 9d + a - e|$$

Darisini diperoleh bahwa selisih dari abcd dan bcde merupakan kelipatan 9 untuk berapapun nilai b, c dan d jika selisih a dan e juga merupakan kelipatan 9. Karena a dan e merupakan digit, maka satu-satunya kemungkinan agar selisihnya kelipatan 9 adalah jika a dan e bernilai sama.

Banyaknya cara memilih bcd adalah 10 x 10 x 10 = 1000.

Banyaknya cara memilih a dan e adalah 9.

DAFTAR PUSTAKA

Binatari, Nikenasih. Super Genius Olimpiade Matematika SMP. 2011. Pustaka Widyatama. Yogyakarta.

- Olson, Steve. Count down : Six kids vie for glory at the world's toughest math competition. 2004. Houghton Mifflin. USA.

- Shadiq, Fajar. Sistem Pembinaan dan Karakteristik Soal Olimpiade Matematika. 2009. PPPPTK Matematika Yogyakarta.