

MATERI PELATIHAN
TRAINING OF TRAINER
OLIMPIADE NASIONAL MATEMATIKA
TINGKAT SEKOLAH DASAR
DI KECAMATAN SRANDAKAN BANTUL



Oleh :

Musthofa, M.Sc

Nikenasih Binatari, M.Si

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMUPENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2012

TEORI BILANGAN

Jika a adalah suatu bilangan bulat dan b suatu bilangan bulat positif, maka ada tepat satu bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga $a = qb + r$, $0 \leq r < b$.

Bilangan bulat q disebut hasil bagi dan r disebut sisa pembagian. Jika $r = 0$ maka dikatakan a habis dibagi oleh b dan ditulis $b \mid a$. Jika $r \neq 0$ maka ditulis $b \nmid a$.

Sifat-sifat keterbagian:

1. $a \mid a$ (sifat refleksif)
2. $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$ (sifat transitif)
3. $a \mid b$ maka $a \mid mb$, untuk setiap bilangan bulat m .
4. $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid b + c$, $a \mid b - c$ atau $a \mid bc$
5. $ab \mid c$ maka $b \mid c$ dan $a \mid c$
6. $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (bx + by)$ untuk setiap bilangan bulat x dan y .

KETERBAGIAN OLEH 2, 4, 8, 16,..., 2^n

Suatu bilangan habis dibagi oleh 2^n jika n digit terakhir bilangan tersebut habis dibagi oleh 2^n .

Jadi dapat disimpulkan sebagai berikut:

- a. suatu bilangan habis dibagi 2 jika digit terakhir bilangan itu habis dibagi 2.
- b. Suatu bilangan habis dibagi 4 jika 2 digit bilangan terakhir habis dibagi 4.
- c. Suatu bilangan habis dibagi 8 jika 3 digit bilangan terakhir habis dibagi 8.

Contoh :

- 1234536 habis dibagi 2, sebab angka terakhirnya habis dibagi 2
- 1233436 habis dibagi 4, sebab dua angka terakhir habis dibagi 4
- 1233436 tidak habis dibagi 8, sebab tiga angka terakhir tidak habis dibagi 8

KETERBAGIAN OLEH 3, 9 DAN 11

Misal diberikan suatu bilangan bulat $x = abcde$

1. x habis dibagi 3 jika jumlah angka-angkanya ($a + b + c + d + e$) habis dibagi 3
2. x habis dibagi 9 jika jumlah angka-angkanya ($a + b + c + d + e$) habis dibagi 9
3. x habis dibagi 11 jika ($a - b + c - d + e$) habis dibagi 11

CONTOH:

1. Tentukan apakah 9123333456789 habis dibagi :

- a).3 b). 9 c).11

Jawab:

$$9+1+2+3+3+3+3+4+5+6+7+8+9 = 63$$

a). Karena $3 \mid 63$ maka $3 \mid 9123333456789$

b). Karena $9 \mid 63$ maka $9 \mid 9123333456789$

c). $9-1+2-3+3-3+3-4+5-6+7-8+9 = 13$. Karena $\not\mid 11$ tidak membagi 13, maka bilangan tersebut tidak terbagi oleh 11.

2. Tentukan nilai a dan b jika bilangan 6 angka $a1989b$ habis dibagi oleh 72.

Jawab :

$$72 = 8 \times 9. \text{ Sehingga } 8 \mid a1989b \text{ dan } 9 \mid a1989b.$$

$$8 \mid a1989b \Rightarrow 8 \mid 89b \Rightarrow b = 6$$

$$9 \mid a1989b \Rightarrow 9 \mid a+1+9+8+9+b = a+33 \Rightarrow a = 3$$

Jadi $a = 3$ dan $b = 6$.

SISA PEMBAGIAN BILANGAN BULAT

Perhatikan bentuk berikut :

$$6 = 1 \times 5 + 1 \quad \Rightarrow 6^2 = 7 \times 5 + 1$$

$$7 = 1 \times 5 + 2 \quad \Rightarrow 7^2 = 9 \times 5 + 4$$

$$8 = 1 \times 5 + 3 \quad \Rightarrow 8^2 = 12 \times 5 + 4$$

$$9 = 1 \times 5 + 4 \quad \Rightarrow 9^2 = 16 \times 5 + 1$$

$$10 = 2 \times 5 + 0 \quad \Rightarrow 10^2 = 20 \times 5 + 0$$

Tampak bahwa bahwa jika bilangan bulat a dibagi b bersisa r , maka sisa bilangan a^n jika dibagi b adalah sama dengan sisa r^n jika dibagi b .

Contoh :

Sisa pembagian 9^{26} oleh 26 adalah (OSN SD 2011)

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} 9^{26} &= 9 \times 9 \times 9 \times \dots \times 9 \text{ (sebanyak 26 kali)} \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3 \text{ (sebanyak 52 kali)} \\ &= 27^{17} \times 9 \\ &= 1^{17} \times 9 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Jadi sisanya adalah 9.

BARISAN DAN DERET

BARISAN ARITMETIKA

Perhatikan barisan bilangan 1, 3, 5, 7, 9, 11,...

Bilangan –bilangan tersebut semuanya mempunyai selisih yang sama untuk setiap dua bilangan yang berdekatan. Barisan bilangan seperti di atas dinamakan barisan aritmetika. Dalam barisan di atas, 1 disebut suku pertama dan selisih dua bilangan berurutan yaitu 2 dinamakan beda.

RUMUS SUKU Ke-n.

Misal akan dicari suku ke-1000 dari barisan bilangan 1, 3, 5, 7,

Untuk menentukan suku ke-n digunakan rumus $U_n = U_1 + (n-1)b$.

Jadi, suku ke-1000 dari barisan 1,3,5,7,... adalah :

$$\begin{aligned}U_{1000} &= U_1 + (1000-1) 2 \\&= 1 + 999 (2) \\&= 1 + 1998 \\&= 1999.\end{aligned}$$

DERET ARITMETIKA

Jumlahan dari barisan aritmetika dinamakan deret aritmetika. Sebagai contoh akan dicari hasil dari $1 + 3 + 5 + \dots + 2013$.

Untuk menentukan hasil jumlahan n suku pertama digunakan rumus :

$$S_n = \frac{1}{2} n (U_1 + U_n)$$

Dalam barisan 1, 3, 5, .., 2013, harus ditentukan terlebih dahulu suku terakhir yaitu 2013 merupakan suku keberapa.

Untuk itu digunakan rumus suku ke-n sebagai berikut :

$$\begin{aligned}2013 &= U_1 + (n-1)b \\&= 1 + (n-1) 2 \\&= 1 + 2n - 2 \\&= 2n - 1 \Rightarrow 2n = 2014 \Rightarrow n = 1007\end{aligned}$$

Diperoleh $n = 1007$. Selanjutnya digunakan rumus deret sebagai berikut :

$$S_n = \frac{1}{2} n (U_1 + U_n)$$

$$= \frac{1}{2} 1007 (1 + 2013)$$

$$= 1007 (1007)$$

$$= 1007^2$$

$$= 1014049$$

Jadi $1 + 3 + 5 + \dots + 2013 = 1014049$.

SOAL :

Jumlah dari 31 bilangan bulat kelipatan 13 yang berurutan sama dengan 12493.

Bilangan terbesarnya adalah (olimpiade SD 2011)

Penyelesaian :

Soal di atas merupakan bentuk soal yang berkaitan dengan deret. Berdasarkan soal, diketahui $n = 31$, $b = 13$.

$$S_n = \frac{1}{2} n (U_1 + U_n)$$

$$12493 = \frac{1}{2} (31) (U_1 + U_n)$$

$$806 = (U_1 + U_n)$$

$$806 = (U_1 + U_1 + (n-1) 13)$$

$$806 = 2 U_1 + 30 (13)$$

$$= 2U_1 + 390$$

$$2 U_1 = 806 - 390$$

$$2 U_1 = 416$$

$$U_1 = 208 \Rightarrow U_{31} = 208 + 30 (13) = 208 + 390 = 598$$

Jadi bilangan terbesarnya adalah 598.

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Suatu persamaan dalam bentuk :

$$ax + by = c$$

$$px + qy = r$$

dinamakan sistem persamaan linear. Metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang akan dibahas di sini adalah metode eliminasi dan substitusi.

ELIMINASI

Misal akan diselesaikan sistem persamaan linear :

$$2x + 3y = 11$$

$$x + 2y = 7$$

Jika persamaan pada baris ke-2 dikalikan 2, dan kemudian persamaan (1) dikurqangi dengan persamaan (2) maka diperoleh :

$$\begin{array}{r|l} 2x + 3y = 11 & \times 1 \\ x + 2y = 7 & \times 2 \\ \hline 2x + 3y = 11 & \\ 2x + 4y = 14 & (-) \\ \hline -y = -3 & \\ y = 3 & \end{array}$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\begin{array}{r|l} 2x + 3y = 11 & \times 2 \\ x + 2y = 7 & \times 3 \\ \hline 4x + 6y = 22 & \\ 3x + 6y = 21 & (-) \\ \hline x = 1 & \end{array}$$

Jadi solusi sistem persamaan linear di atas adalah $x = 1$ dan $y = 3$.

SUBSTITUSI

Persamaan (2) pada soal di atas dapat ditulis sebagai $x = 7-2y$. hasil ini jika disubstitusikan ke persamaan (1) diperoleh :

$$2(7-2y) + 3y = 11$$

$$\Leftrightarrow 14-4y + 3y = 11$$

$$\Leftrightarrow 14 - y = 11$$

$$\Leftrightarrow y = 3$$

Karena $y=3$, maka diperoleh $x = 7 - 2y = 7-6 = 1$

Kita juga dapat melakukan kombinasi dari kedua metode tersebut. Pada soal di atas setelah mengeliminasi diperoleh $y =3$, maka kemudian disubstitusikan ke salah satu persamaan, misalnya persamaan (2) , yaitu $x + 2(3) = 7$ sehingga diperoleh $x = 1$.

SOAL:

Saat ini, usia Hasan sama dengan 7 kali usia Yenny. Dua tahun lalu, usia Hasan sama dengan 9 kali usia Yenny. Usia Hasan saat ini adalah . (OSN SD 2010)

Penyelesaian :

Misal usia hasan sekarang = x dan usia Yenny sekarang = y . Diperoleh :

$$x = 7y$$

$$x - 2 = 9(y - 2)$$

Substitusi persamaan(1) ke persamaan(2):

$$7y - 2 = 9(y-2)$$

$$\Leftrightarrow 7y - 2 = 9y - 18$$

$$\Leftrightarrow 7y-9y = 2-18 \Leftrightarrow -2y = -16 \Leftrightarrow y = 8 \Rightarrow x = 7 (8) = 56 = \text{usia hasan sekarang.}$$

KOMBINATORIKA

Masalah kombinatorika biasanya berkaitan cara pengambilan obyek-obyek yang diberikan. Salah satunya adalah menghitung banyaknya cara untuk memilih r obyek dari n obyek. Misalnya terdapat 6 warna berbeda, yaitu A,B, C, D, E dan F. Jika akan dipilih 3 warna, berapa banyaknya cara memilih 3 warna tersebut?

Dalam soal di atas, urutan pemilihan warna tidak diperhatikan, jadi ketika dipilih A,B, C maka sama saja dengan BCA = CAB. Selanjutnya masalah di atas dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut :

Cara 1:

ABC	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF	ADE	ADF	AEF	10
BCD	BCE	BCF	BDE	BDF	BEF					6
CDE	CDF	CEF								3
DEF										1
Jumlah										20

Cara 2:

Andaikan urutan pemilihan warna diperhatikan, jadi $ABC \neq BCA$.

Warna ke-1	Warna ke- 2	Warna ke-3
6 cara	5 cara	4 cara
Banyak cara	$6 \times 5 \times 4 = 120$	

Jika kita memperhatikan urutan maka banyak cara yang diperlukan adalah 120 cara. Tetapi karena pada kenyataannya urutan tidak diperhatikan, maka banyaknya cara tersebut dibagi dengan banyaknya warna yang sama. Hal ini dapat dihitung sebagai berikut :

3	2	1	$= 3 \times 2 \times 1$
---	---	---	-------------------------

Jadi banyaknya cara = $120/6 = 20$.

Soal :

1. Dari angka 1,2,3,4,5,6 akan disusun bilangan 3 angka yang nilainya lebih besar dari 400 dengan syarat tidak boleh ada angka yang berulang. Berapa banyaknya bilangan berbeda yang dapat dibentuk?

Penyelesaian :

3	5	4	$= 3 \times 5 \times 4 = 60$
---	---	---	------------------------------

Pada digit pertama kita bisa memilih 3 angka yaitu 4, 5 dan 6. Pada digit ke-2 kita bisa memilih 5 angka dan pada digit ke-3 kita bisa memilih 4 angka sehingga total bilangan yang dapat dibentuk ada 60 bilangan.

2. Ada lima koin yang dimiliki Joko yaitu A,B,C,D, dan E. Ia juga memiliki sebuah kaleng berwarna merah dan sebuah kaleng berwarna biru. Dengan berapa cara berbeda koin-koin itu dapat dimasukkan ke dalam kedua kaleng, dengan syarat paling sedikit ada sebuah koin disetiap kaleng? (OSN SD 2006).

Penyelesaian :

❖ jika satu kaleng berisi 1 koin dan kaleng lain berisi 4 koin

A-BCDE, B-ACDE, C-ABDE, D-ABCE, E-ABCD

Karena kalengnya ada dua, maka banyaknya cara adalah $5 \times 2 = 10$

❖ jika satu kaleng berisi 2 koin dan kaleng lain berisi 3 koin.

Kita cukup memperhatikan 2 koin saja. Berarti kita akan memilih 2 koin dari 5 koin yang disediakan. Banyaknya cara :

5	4	$= 5 \times 4 = 20$
2	1	$= 2 \times 1 = 2$
Banyak cara		$= 20/2 = 10$

Selanjutnya karena ada 2 kaleng, maka untuk setiap pilihan terdapat 2 cara memasukkan ke dalam kaleng sehingga banyaknya cara adalah 10×2 yaitu 20 cara.

Jadi banyaknya cara untuk memasukkan koin tersebut adalah $10 + 30 = 40$ cara.

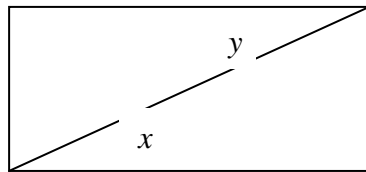
GEOMETRI

SEGITIGA

- luas segitiga = $\frac{1}{2}$ (alas) (tinggi)
- dua segitiga yang mempunyai tinggi sama, maka perbandingan luasnya sama dengan perbandingan panjang alasnya
- jumlah semua sudut dalam segitiga adalah 180^0
- Pada segitiga ABC berlaku $AC = BC \Leftrightarrow \angle B = \angle A$

PERSEGI PANJANG

- Luas persegi panjang = panjang \times lebar
- sudut yang berseberangan mempunyai besar yang sama ($\angle x = \angle y$)

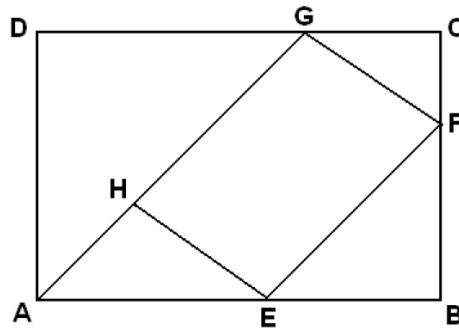


TRAPESIUM

- Luas trapezium = $\frac{1}{2}$ (jumlah sisi sejajar \times tinggi)

Contoh soal :

1. Perhatikan persegi panjang ABCD dan persegi panjang EFGH berikut ini. Jika segitiga CGF adalah segitiga siku-siku sama kaki, $AE = EB$, dan $CG = 2$ cm, maka luas persegi panjang ABCD adalah . . .cm².
(OSN SD 2011)



Penyelesaian :

Karena segitiga CGF merupakan segitiga siku-siku, maka menurut teorema Pythagoras panjang $GF = \sqrt{8}$.

Karena CGF sama kaki, maka besar sudut $\angle CGF = \angle GFC = 45^\circ$.

Karena EFGH persegi panjang, maka setiap sudutnya besarnya adalah 90° .

Sehingga besar sudut $\angle EFB = \angle AGD = \angle BEF = \angle AEH = \angle HAE = 45^\circ$.

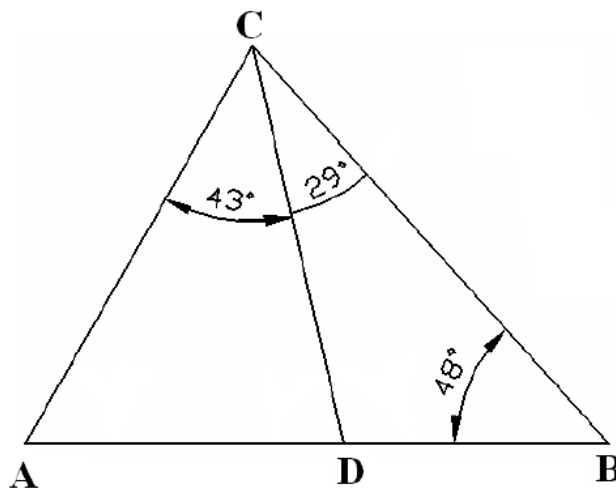
Diperoleh panjang $HE = GF = \sqrt{8}$.

Akibatnya segitiga AHE, Segitiga BEF semuanya merupakan segitiga samakaki. Menurut Pythagoras diperoleh panjang $AE = BE = BF = 4$.

Sehingga diperoleh luas persegi panjang ABCD adalah :

Panjang $AB \times$ panjang $BC = 8 \times 6 = 48 \text{ cm}^2$.

2. Berapa besar sudut CAD? (OSN SD 2006)



Penyelesaian :

$$\text{Besar sudut CDB} = 180 - (29 + 48) = 103.$$

$$\text{Besar sudut ADC} = 180 - \text{besar sudut CDB} = 180 - 103 = 77$$

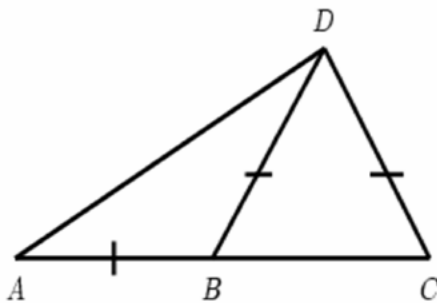
$$\begin{aligned} \text{Besar sudut CAD} &= 180 - (\text{besar sudut ACD} + \text{Besar sudut ADC}) \\ &= 180 - (43 + 77) \\ &= 180 - 120 \\ &= 60^{\circ}. \end{aligned}$$

LATIHAN

1. Bilangan 279 akan dinyatakan sebagai penjumlahan dua bilangan, A dan B. Jika A dibagi 4 dan B dibagi 7 maka jumlahnya menjadi 57. Berapa selisih A dan B?
2. Berapakah nilai dua angka terakhir pada bilangan ke-1000 pada barisan aritmatika di bawah ini?

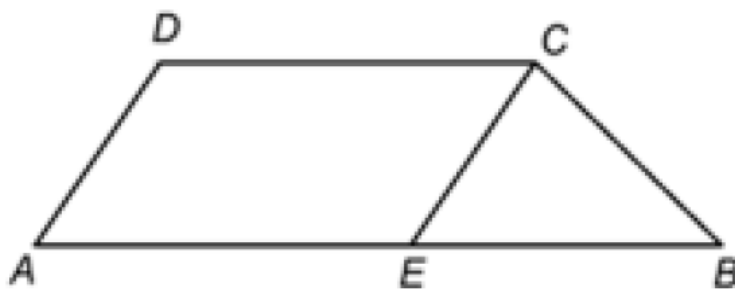
$$12, 15, 18, 21, 24, 27, \dots$$

3. Segitiga pada Gambar di bawah ini memiliki sisi-sisi dengan panjang $AB = BD = CD$, dan $\angle ADC - \angle BAD = 75^{\circ}$. Tentukan $\angle ADB$.



4. Jumlah semua angka bilangan bulat dari 11 sampai dengan 15 adalah $1+1+1+2+1+3+1+4+1+5 = 20$. Berapakah jumlah semua angka bilangan bulat dari 1 sampai dengan 220?
5. Hartono membuat bilangan 10 angka dengan menggunakan empat buah angka 1, tiga buah angka 2, dua buah angka 3, dan satu buah angka 4. Dua buah angka yang sama tidak terletak bersebelahan. Bilangan terbesar yang mungkin adalah

6. Data penduduk suatu desa adalah sebagai berikut.
- Sebanyak 70% penduduk berusia di bawah 50 tahun
 - Sebanyak 45% penduduk berusia di atas 40 tahun
- Desa tersebut berpenduduk 1200 orang. Berapakah penduduk desa tersebut yang berusia mulai dari 40 sampai dengan 50 tahun?
7. Di laci terdapat 10 kaos kaki yang terdiri atas 5 pasang, masing-masing berwarna hitam, putih, biru, coklat, dan merah. Paling sedikit banyaknya kaos kaki yang harus diambil dari laci tersebut agar diperoleh sepasang kaos kaki berwarna sama adalah
8. Agar perbandingan luas jajargenjang $AECD$ dan luas bangun $ABCD$ adalah 4 : 5, maka panjang AB adalah . . . kali panjang CD .



9. Pada suatu pesta ulang tahun, setiap orang yang memperoleh kartu undangan dapat datang sendirian atau membawa seorang teman. Semua orang yang diundang hadir pada acara tersebut. Perbandingan banyaknya kartu undangan dan banyaknya tamu yang hadir adalah 3 : 5. Perbandingan banyaknya kartu undangan dan banyaknya tamu yang membawa teman adalah
10. Angka ke-2011 di belakang koma pada bentuk desimal dari $1/7$ adalah