Materi Pembinaan Olimpiade SMA I MAGELANG

TEORI BILANGAN

Oleh. Nikenasih B

1.1 SIFAT HABIS DIBAGI PADA BILANGAN BULAT

Untuk dapat memahami sifat habis dibagi pada bilangan bulat, sebelumnya perhatikan contoh berikut :

234 : 5 = 46 sisa 4

dan dapat ditulis

234 = (5 x 46) + 4.

Secara umum, contoh diatas dapat dinyatakan sebagai berikut

Untuk sebarang a dan b bilangan bulat dengan $a \neq 0$, maka terdapat q dan r bilangan bulat yang tunggal sedemikian sehingga b dapat dinyatakan sebagai

$$b = (a \times q) + r$$

atau

$$b = aq + r$$

dengan $0 \leq r < |a|$.

a kemudian disebut pembagi, *q* disebut hasil bagi dan *r* disebut sisa hasil bagi. Pernyataan $b = aq + r$ sering disebut sebagai algoritma pembagian. Untuk kasus r = 0 maka *b* dikatakan habis dibagi *a*. Akibatnya muncul definisi berikut :

Definisi :

Suatu bilangan bulat b dikatakan habis dibagi (divisible) oleh suatu bilangan bulat tak nol a jika ada suatu bilangan bulat q sedemikian sehingga b = aq. Atau dapat juga dikatakan a membagi habis b dan ditulis dengan $a \mid b$.

Sifat – sifat hasil bagi :

1. *jika* $a \mid b$ *maka* $a \mid bc$ *untuk sebarang c bilangan bulat.*
2. *jika* $a \mid b$ *dan* $b \mid c$ *maka* $a \mid c$.
3. *jika* $a \mid b$ *dan* $a \mid c$ *maka* $a \mid bx+cy$ *untuk sebarang x,y bilangan bulat.*
4. *jika* $a \mid b$ *dan* $b \mid a$ *maka* $a = \pm b$.

5. *jika* a | b *dan* $b \neq 0$, *maka* $|a| \leq |b|$.
6. *jika* $m \neq 0$, *maka* a | b *jika hanya jika* ma | mb.

Jika a | b maka a disebut faktor dari b. Kemudian jika suatu bilangan bulat d membagi dua bilangan bulat a dan b maka d disebut faktor persekutuan dari a dan b. Bilangan bulat terbesar di antara semua faktor persekutuan bagi a dan b dinamakan **faktor persekutuan terbesar** (greatest common divisor) bagi a dan b dan dilambangkan dengan GCD(a,b).

Contoh : GCD(24,32) = 8.

Untuk menentukan faktor persekutuan terbesar dapat pula digunakan teorema algoritma euclide berikut :

Teorema 1 : Algoritma Euclide

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan a > b > 0, maka GCD(a,b) dapat dicari dengan mengulang algoritma pembagian.

$$a = q_1 b + r_1 \quad 0 < r_1 < b$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad 0 < r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0$$

Maka, $r_{n,}$ *sisa terakhir dari pembagian diatas yang bukan nol merupakan GCD(a,b).*

Contoh 1.1 :

Tentukan GCD(4840,1512) ?

Akibat dari teorema algoritma euclide yaitu untuk setiap GCD($a.b$) maka terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian hingga GCD(a,b) = $ax + by$. Misalnya pada contoh diatas, akan dicari x dan y sedemikian hingga 8 = 4840x + 1512y.

GCD(4840,1512) = 8 = 304 – 296

$= 304 - (1512 - (304 \text{ x } 4))$

$= (304 \text{ x } 5) - 1512$

$= (4840 - (1512 \text{ x } 3)) \text{ x } 5 - 1512$

$= (5 \text{ x } 4840) - (15 \text{ x } 1512) - 1512$

$= (5 \text{ x } 4840) - (16 \text{ x } 1512)$

Jadi x= 5 dan y = -16.

Akibat selanjutnya dari teorema euclide yaitu persamaan linear Diophantine.

Teorema 2 : Diophantine

Suatu persamaan linear Diophantine ax + by = c dengan a,b dan c bilangan bulat mempunyai penyelesaian bilangan bulat jika dan hanya jika GCD(a,b) membagi habis c.

Bukti :

Dari akibat sebelumnya diketahui bahwa untuk setiap GCD(*a.b*) maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian hingga GCD(*a,b*) = *am* + *bn.* Selanjutnya Karena GCD(a,b) membagi habis c maka terdapat bilangan k sedemikian hingga

$$c = k \cdot GCD(a,b)$$
$$c = k \cdot (am + bn)$$
$$c = a(km) + b(kn)$$

Jadi salah satu penyelesain untuk persamaan linear Diophantine tersebut yaitu $x = km$ dan $y = kn$. Terbukti.

Diambil sebarang bilangan bulat k, akan ditunjukkan bahwa jika x_0 dan y_0 adalah salah satu penyelesaian persamaan linear diophantine ax + by = c, maka

$$x = x_0 + \frac{b}{GCD(a,b)}k$$

$$y = y_0 - \frac{a}{GCD(a,b)}k$$

juga merupakan penyelesain persamaan linear Diophantine tersebut.

Contoh 1.2:

Tentukan penyelesaian umum persamaan Diophantine $754x+221y=13$.

1.2 BILANGAN – BILANGAN KHUSUS

Ada beberapa macam macam bilangan khusus. Pada subbab ini hanya akan dibahas mengenai 3 biangan khusus yaitu bilangan prima, bilangan komposit dan bilangan kuadrat.

A. Bilangan Prima

Bilangan prima adalah bilangan asli hanya mempunyai dua faktor yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. Contoh bilangan prima yaitu 2, 3, 5, 7, …

B. Bilangan Komposit

Bilangan komposit adalah bilangan yang mempunyai lebih dari 2 faktor. Contoh bilangan komposit yaitu 4, 6, 8, 9, 10, …..

C. Bilangan Bulat Kuadrat

Suatu bilangan a disebut bilangan bulat kuadrat jika terdapat bilangan bulat b sedemikian hingga $b^2 = a$. Contoh bilangan bulat kuadrat yaitu 1, 4, 9, 16, 25, …

Selanjutnya, di bawah adalah teorema yang berkaitan dengan ketiga bilangan diatas.

Teorema 3 : Teori Erathosthenes

Untuk setiap bilangan komposit n ada bilangan prima p sehingga $p \mid n$ *dan p kurang dari sama dengan akar n. Atau dapat juga dikatakan jika tidak ada bilangan prima p yang dapat membagi n dengan p kurang dari sama dengan akar n maka n adalah bilangan prima.*

Sifat dari bilangan kuadrat yaitu

1. angka satuan yang mungkin untuk bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, dan 9.
2. setiap bilangan kuadrat dibagi 4 maka sisanya 0 atau 1.
3. jika p bilangan prima dan p membagi habis n^2 maka p^2 membagi habis n^2.

Contoh 1.3 :

Tunjukkan bahwa kuadrat sebarang bilangan bulat dapat dituliskan dalam bentuk 4k atau 8k+1.

Contoh 1.4:

Matematikawan August DeMorgan menghabiskan seluruh usianya pada tahun 1800an. Pada tahun terakhir dalam masa hidupnya dia mengatakan bahwa : "Dulu aku berusia x tahun pada tahun x^2." Tentukan pada tahun berapa ia dilahirkan?

(soal Olimpiade Matematika tk. Kabupaten)

Contoh 1.5:

Suatu bilangan bulat $p \geq 2$ merupakan bilangan prima jika faktornya hanyalah p dan 1. Misalkan M menyatakan perkalian 100 bilangan prima yang pertama. Berapa banyakkah angka 0 di akhir bilangan M?

(soal Olimpiade Matematika tk. Kabupaten)

1.3 KONGRUENSI

Misalkan m adalah suatu bilangan bulat positif. Dua buah bilangan a dan b dikatakan kongruen modulo m jka dan hanya jika m | a – b, dan ditulis dengan $a \equiv b \pmod{m}$

Contoh :

23 ≡ 3 mod 5.

Teorema 4 :

Misalkan a, b, c, d, x dan y melambangkan bilangan bulat, maka

a. $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv a \pmod{m}$ dan $a - b \equiv 0 \pmod{m}$ adalah pernyataan pernyataan yang setara.
b. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ maka $a \equiv c \pmod{m}$.
c. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan d membagi habis m maka $a \equiv b \pmod{d}$
d. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $ax + cy \equiv bx + dy \pmod{m}$

$a \equiv b \pmod{m}$, maka terdapat q sedemikian hingga a – b = qm. Akibatnya $-(a-b) = -qm$ sehingga $-a+b = (-q)m$. Karena terdapat bilangan bulat $-q$ sedemikian hingga $b-a = (-q)m$, maka $b \equiv a \pmod{m}$. Kemudian karena $a-b = qm+0$, maka $a-b \equiv 0 \pmod{m}$. Terbukti.

Latihan b dan c disediakan sebagai latihan.

d.

m | (a – b) dan m | (c – d) maka m | $\left[x(a-b)+y(c-d)\right]$, atau m | $\left[(ax+cy)-(bx+dy)\right]$. Sehingga didapatkan $ax+cy = bx+dy \pmod{m}$.

Akibat dari teorema diatas yaitu jika $f(x)$ adalah suatu fungsi polinom dengan koefisien koefisien bulat dan $a \equiv b \bmod m$, maka berlaku $f(a) \equiv f(b) \bmod m$. Berikut adalah contoh penggunaan akibat dari teorema 2.

Contoh 1.6 :

Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli n, $A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ *habis dibagi 1897.*

Jawab :

Misalkan n suatu bilangan asli. Perhatikan bahwa 1897 = 7 x 271. selanjutnya $2903 \equiv 803 \pmod{7}$ dan $464 \equiv 261 \pmod{7}$ Begitu pula $2903 \equiv 464 \pmod{271}$ dan $803 \equiv 261 \pmod{271}$, dengan demikian A habis dibagi 7 dan 271. karena GCD(7,271) = 1, maka dapat disimpulkan bahwa A habis dibagi 1897.

Contoh 1.7 :

Buktikan bahwa kuadrat bilangan suatu bilangan bulat berbentuk $\equiv 0 \text{ atau } 1 \pmod{3}$

Contoh 1.8 :

Buktikan bahwa jika 2n+1 dan 3n+1 keduanya bilangan kuadrat murni, maka n habis dibagi 40

1.4 FUNGSI BILANGAN BULAT TERBESAR

Untuk x biangan real, lambang $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. jadi $[x] \le x$.

Teorema 5 :

Misalkan x dan y bilangan real, maka diperoleh :

a. $[x] \le x < [x]+1$ Dan $x-1 < [x] \le x, \quad 0 \le x-[x] < 1.$

b. Jika $x \ge 0$ maka $[x] = \sum_{1 \le i \le x} 1.$

c. Jika m suatu bilangan bulat, maka berlaku $[x+m] = [x]+m$.

d. $x-[x]$ adalah bagian pecahan dari x

e. $-[-x]$ adalah biangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x.

f. $[x+0{,}5]$ adalah bilangan bulat yang terdekat pada x. Jika dua bilangan bulat sama dekatnya dengan x maka melambangkan biangan built yang lebih besar dari keduanya.

g. Jika n dan a bilangan bulat positif, $\left[\frac{n}{a}\right]$ adalah bilangan bulat diantara 1, 2,

Contoh 1.9 :

Buktikan bahwa untuk n = 1,2,3,… berlaku

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+\left[\frac{n+8}{16}\right]+\cdots = n$$