

Analisa Kestabilan Bebas Penyakit pada Penyebaran Demam Berdarah Menggunakan Model *Host – Vector*

Kasus: Dua *Serotype*

Eminugroho Ratna Sari, Nikenasih Binatari

FMIPA UNY

Email: eminugroho@uny.ac.id

Abstrak—Tujuan dari penelitian ini adalah membentuk model matematika demam berdarah dengan mengasumsikan setelah sembuh dari sakit, maka dapat kembali rentan terhadap penyakit, dalam hal ini dibatasi untuk dua *serotype*. Model yang dibentuk tidak hanya mempertimbangkan populasi *host*, tetapi juga *vector* dengan mempertimbangkan adanya perbedaan laju kesembuhan antara terinfeksi pertama dengan yang kedua. Berdasarkan model dibahas tiga titik ekuilibrium yaitu bebas penyakit, endemic hanya pada *serotype* pertama dan endemic hanya pada *serotype* kedua. Menggunakan *next generating matriks* diperoleh dua jenis *basic reproduction number*. Selanjutnya perilaku solusi model di sekitar titik ekuilibrium dianalisa menggunakan MAPLE. Hasil menunjukkan bahwa jika *basic reproduction number* kurang dari satu, maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik local. Jika *basic reproduction number* lebih dari satu, maka ketiga titik ekuilibrium tidak stabil.

Kata kunci: *model Host – Vector, titik ekuilibrium, stabil*

I. PENDAHULUAN

Seperti yang telah diketahui bahwa demam berdarah merupakan penyakit yang sering muncul pada musim pancaroba. Virus *dengue* merupakan penyebab penyakit demam berdarah ini. Transmisi demam berdarah dimulai dari manusia yang telah terinfeksi demam berdarah digigit nyamuk *Aedes Aegypti* sehat. Akibatnya virus juga akan berada dalam tubuh nyamuk. Virus mempunyai masa inkubasi 4 – 10 hari di dalam tubuh nyamuk. Selanjutnya nyamuk sehat ini disebut sebagai nyamuk terinfeksi. Apabila nyamuk terinfeksi menggigit manusia sehat, maka dengan masa inkubasi 4 – 5 hari sebelum akhirnya gejala pertama demam berdarah muncul yang menyebabkan manusia sehat ini disebut terinfeksi.

Penelitian mengenai pemodelan matematika penyebaran demam berdarah telah banyak dilakukan. Dimulai dari [1] yang membahas tentang model penyebaran demam berdarah dimana populasi dibagi menjadi tiga kelas, yaitu kelas rentan, kelas terinfeksi dan kelas sembuh dari penyakit. Penelitian ini lebih difokuskan pada populasi manusia saja sebagai *host* dari penyakit demam berdarah. Namun pada kenyataannya nyamuk *Aedes Aegypti* sebagai *vector* penyakit mempunyai peranan penting dalam penyebaran demam berdarah. Untuk itu perlu dibentuk suatu model *host-vector* untuk menjawab permasalahan ini.

Esteva [2] telah membahas mengenai hal ini. Pada model ini masih diasumsikan *host* yang telah sembuh dari sakit tidak dapat kembali rentan terhadap penyakit. Padahal virus penyebab demam berdarah mempunyai empat *serotype* yang berbeda, yaitu DEN1, DEN2, DEN3 dan DEN4. Jika seseorang telah terinfeksi oleh salah satu *serotype*, maka dapat terinfeksi kembali dengan *serotype* yang berbeda.

Jadi model dikembangkan dengan mengasumsikan *host* yang telah sembuh dapat kembali rentan. Pada penelitian yang telah dilakukan Soewono [3] masih belum membedakan kelas rentan dengan kemungkinan *serotype* yang berbeda. Sementara James [4] membahas model *host-vector* dengan memisahkan kelas rentan dengan dua *serotype* yang berbeda, namun masih mengasumsikan bahwa laju kesembuhan dari terinfeksi pertama sama dengan yang terinfeksi kedua.

Untuk itu dalam makalah ini akan dibentuk model *host-vector* dengan memisahkan kelas rentan antara yang pernah terinfeksi pertama dengan infeksi kedua, juga diasumsikan bahwa laju kesembuhan dari terinfeksi pertama berbeda dengan yang kedua. Berdasarkan model yang diperoleh, perilaku solusi di sekitar titik ekuilibrium akan diamati menggunakan MAPLE.

II. PEMBENTUKAN MODEL

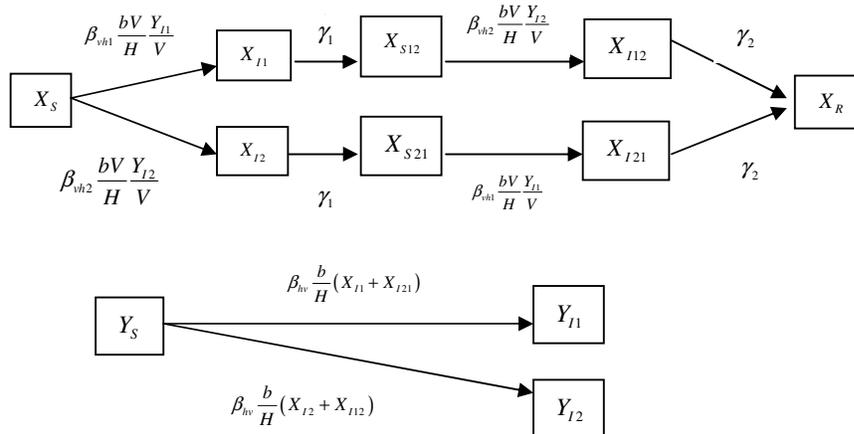
Pada bagian ini akan dibahas mengenai pembentukan model demam berdarah dengan memperhatikan populasi *host* dan *vector*. Didefinisikan H untuk total populasi *host* dan V untuk total populasi *vector*. Populasi *host* dibagi menjadi kelas yang rentan terhadap demam berdarah baik *serotype* yang pertama maupun kedua, X_S , kelas terinfeksi oleh *serotype* pertama, X_{I1} , kelas terinfeksi oleh *serotype* kedua, X_{I2} , kelas rentan oleh *serotype* kedua setelah terinfeksi oleh *serotype* pertama, X_{S12} , kelas rentan oleh *serotype* pertama setelah terinfeksi oleh *serotype* kedua, X_{S21} , kelas terinfeksi oleh *serotype* kedua setelah sembuh dari *serotype* pertama, X_{I12} , kelas terinfeksi oleh *serotype* pertama setelah sembuh dari *serotype* kedua, X_{I21} , kelas yang sembuh dari penyakit, X_R .

Sementara pada populasi *vector* tidak didefinisikan kelas sembuh karena *virus dengue* akan ada di dalam tubuh nyamuk sepanjang hidupnya. Populasi *vector* dibagi menjadi kelas yang rentan terhadap *virus dengue* baik *serotype* pertama maupun kedua, Y_S , kelas terinfeksi oleh *serotype* pertama, Y_{I1} , dan kelas terinfeksi oleh *serotype* kedua, Y_{I2} .

Jika b untuk menyatakan banyaknya gigitan per nyamuk per hari, maka untuk V nyamuk akan ada bV gigitan nyamuk per hari. Jadi manusia akan menerima sebanyak $\frac{bV}{H}$ gigitan nyamuk per hari. Banyaknya gigitan dari nyamuk yang terinfeksi oleh *serotype* pertama per hari adalah $\frac{bV}{H} \frac{Y_{I1}}{V}$. Jika β_{vh1} menyatakan laju transmisi dari nyamuk ke manusia, maka laju infeksi manusia yang rentan terhadap *serotype* pertama adalah $\beta_{vh1} \frac{bV}{H} \frac{Y_{I1}}{V}$.

Karena satu nyamuk akan menggigit $\frac{b}{H}$ per hari per manusia, maka satu nyamuk per hari akan mendapat *virus dengue* untuk *serotype* pertama sebesar $\frac{b}{H}(X_{I1} + X_{I21})$. Jika laju transmisi dari manusia ke nyamuk sebesar β_{nv} , maka laju infeksi per nyamuk yang rentan terhadap *serotype* pertama adalah $\beta_{nv} \frac{b}{H}(X_{I1} + X_{I21})$. Selanjutnya untuk laju kesembuhan setelah terinfeksi pertama dinotasikan γ_1 dan untuk yang kedua adalah γ_2 .

Berikut diberikan diagram transfer model



GAMBAR 1. DIAGRAM TRANSFER MODEL

Diasumsikan bahwa kematian akibat demam berdarah sangat kecil, sehingga tidak diperhitungkan. Laju kelahiran untuk populasi *host* diasumsikan konstan dan sama dengan kematian alami. Dinotasikan dengan μ . Demikian juga laju kelahiran untuk populasi *vector* diasumsikan konstan dan sama dengan kematian alami. Dinotasikan dengan α . Jadi model matematikanya adalah

$$\frac{dX_S}{dt} = \mu H - \beta_{vh1} \frac{bV}{H} \frac{Y_{I1}}{V} X_S - \beta_{vh2} \frac{bV}{H} \frac{Y_{I2}}{V} X_S - \mu X_S \quad (1.1)$$

$$\frac{dX_{I1}}{dt} = \beta_{vh1} \frac{bV}{H} \frac{Y_{I1}}{V} X_S - \gamma_1 X_{I1} - \mu X_{I1} \quad (1.2)$$

$$\frac{dX_{I2}}{dt} = \beta_{vh2} \frac{bV}{H} \frac{Y_{I2}}{V} X_S - \gamma_1 X_{I2} - \mu X_{I2} \quad (1.3)$$

$$\frac{dX_{S12}}{dt} = \gamma_1 X_{I1} - \beta_{vh2} \frac{bV}{H} \frac{Y_{I2}}{V} X_{S12} - \mu X_{S12} \quad (1.4)$$

$$\frac{dX_{S21}}{dt} = \gamma_1 X_{I2} - \beta_{vh1} \frac{bV}{H} \frac{Y_{I1}}{V} X_{S21} - \mu X_{S21} \quad (1.5)$$

$$\frac{dX_{I12}}{dt} = \beta_{vh2} \frac{bV}{H} \frac{Y_{I2}}{V} X_{S12} - \gamma_2 X_{I12} - \mu X_{I12} \quad (1.6)$$

$$\frac{dX_{I21}}{dt} = \beta_{vh1} \frac{bV}{H} \frac{Y_{I1}}{V} X_{S21} - \gamma_2 X_{I21} - \mu X_{I21} \quad (1.7)$$

$$\frac{dX_R}{dt} = \gamma_2 X_{I21} + \gamma_2 X_{I12} - \mu X_R, \quad (1.8)$$

dengan $X_S + X_{I1} + X_{I2} + X_{S12} + X_{S21} + X_{I12} + X_{I21} + X_R = H$. Sedangkan untuk populasi vector

$$\frac{dY_S}{dt} = \alpha V - \beta_{hv} \frac{b}{H} (X_{I1} + X_{I21}) - \beta_{hv} \frac{b}{H} (X_{I2} + X_{I12}) - \alpha Y_S \quad (1.9)$$

$$\frac{dY_{I1}}{dt} = \beta_{hv} \frac{b}{H} (X_{I1} + X_{I21}) - \alpha Y_{I1} \quad (1.10)$$

$$\frac{dY_{I2}}{dt} = \beta_{hv} \frac{b}{H} (X_{I2} + X_{I12}) - \alpha Y_{I2}, \quad (1.11)$$

dengan $Y_S + Y_{I1} + Y_{I2} = V$.

Jika diambil $x_S = \frac{X_S}{H}$, $x_{I1} = \frac{X_{I1}}{H}$, $x_{I2} = \frac{X_{I2}}{H}$, $x_{S12} = \frac{X_{S12}}{H}$, $x_{S21} = \frac{X_{S21}}{H}$, $x_{I12} = \frac{X_{I12}}{H}$, $x_{I21} = \frac{X_{I21}}{H}$, $x_R = \frac{X_R}{H}$, $y_S = \frac{Y_S}{V}$, $y_{I1} = \frac{Y_{I1}}{V}$, $y_{I2} = \frac{Y_{I2}}{V}$, maka dari sistem (1) diperoleh

$$\frac{dx_S}{dt} = \mu - \beta_{vh1} \frac{bV}{H} y_{I1} x_S - \beta_{vh2} \frac{bV}{H} y_{I2} x_S - \mu x_S \quad (2.1)$$

$$\frac{dx_{I1}}{dt} = \beta_{vh1} \frac{bV}{H} y_{I1} x_S - \gamma_1 x_{I1} - \mu x_{I1} \quad (2.2)$$

$$\frac{dx_{I2}}{dt} = \beta_{vh2} \frac{bV}{H} y_{I2} x_S - \gamma_1 x_{I2} - \mu x_{I2} \quad (2.3)$$

$$\frac{dx_{S12}}{dt} = \gamma_1 x_{I1} - \beta_{vh2} \frac{bV}{H} y_{I2} x_{S12} - \mu x_{S12} \quad (2.4)$$

$$\frac{dx_{S21}}{dt} = \gamma_1 x_{I2} - \beta_{vh1} \frac{bV}{H} y_{I1} x_{S21} - \mu x_{S21} \quad (2.5)$$

$$\frac{dx_{I12}}{dt} = \beta_{vh2} \frac{bV}{H} y_{I2} x_{S12} - \gamma_2 x_{I12} - \mu x_{I12} \quad (2.6)$$

$$\frac{dx_{I21}}{dt} = \beta_{vh1} \frac{bV}{H} y_{I1} x_{S21} - \gamma_2 x_{I21} - \mu x_{I21} \quad (2.7)$$

$$\frac{dx_R}{dt} = \gamma_2 x_{I21} + \gamma_2 x_{I12} - \mu x_R, \quad (2.8)$$

dengan $x_S + x_{I1} + x_{I2} + x_{S12} + x_{S21} + x_{I12} + x_{I21} + x_R = 1$. Sedangkan untuk populasi vector

$$\frac{dy_S}{dt} = \alpha - \beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I1} + x_{I21}) - \beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I2} + x_{I12}) - \alpha y_S \quad (2.9)$$

$$\frac{dy_{I1}}{dt} = \beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I1} + x_{I21}) - \alpha y_{I1} \quad (2.10)$$

$$\frac{dy_{I2}}{dt} = \beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I2} + x_{I12}) - \alpha y_{I2}, \quad (2.11)$$

dengan $y_S + y_{I1} + y_{I2} = 1$.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai titik ekuilibrium sistem (2) dan analisa kestabilan di sekitar titik ekuilibrium. Titik-titik ekuilibrium yang dibahas adalah titik ekuilibrium bebas penyakit, titik ekuilibrium endemic pada *serotype* pertama dan pada *serotype* kedua.

A. Titik Ekuilibrium

Pembahasan mengenai titik ekuilibrium akan dijelaskan melalui lemma berikut

Lemma 1

a. Jika $x_I = x_{I1} = x_{I12} = x_{I2} = x_{I21} = y_{I1} = y_{I2} = 0$, maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$.

b. Jika $x_{I2} = 0, x_{I12} = 0, x_{S21} = 0, x_{I21} = 0, x_R = 0, y_{I2} = 0$, maka diperoleh titik ekuilibrium endemic hanya pada *serotype* pertama $(x_S^*, x_{I1}^*, 0, x_{S12}^*, 0, 0, 0, 0, y_S^*, y_{I1}^*, 0)$, dengan

$$x_S^* = \frac{(\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V}, x_{I1}^* = \frac{\mu [\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{hv} b^2 V \beta_{vh1} (\mu + \gamma_1)}, x_{S12}^* = \frac{\gamma_1 [\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V (\mu + \gamma_1)},$$

$$y_S^* = \frac{\alpha H b V \beta_{vh1} (\mu + \gamma_1) - \mu \beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V + \mu (\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\alpha H b V \beta_{vh1} (\mu + \gamma_1)}, y_{I1}^* = \frac{\mu [\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{vh1} b V (\mu + \gamma_1) \alpha H}.$$

c. Jika $x_{I1} = 0, x_{I12} = 0, x_{S12} = 0, x_{I21} = 0, x_R = 0, y_{I1} = 0$, maka diperoleh titik ekuilibrium endemic hanya pada *serotype* kedua $(x_S^*, 0, x_{I2}^*, 0, x_{S21}^*, 0, 0, 0, y_S^*, 0, y_{I2}^*)$, dengan $x_S^* = \frac{(\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V}$,

$$x_{I2}^* = \frac{\mu [\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{hv} b^2 V \beta_{vh2} (\mu + \gamma_1)}, x_{S21}^* = \frac{\gamma_2 [\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V (\mu + \gamma_1)},$$

$$y_S^* = \frac{\alpha H b V \beta_{vh2} (\mu + \gamma_1) - \mu \beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V + \mu (\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\alpha H b V \beta_{vh2} (\mu + \gamma_1)}, y_{I2}^* = \frac{\mu [\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{vh2} b V (\mu + \gamma_1) \alpha H}.$$

Bukti

a. Jika ruas kanan dari masing-masing persamaan pada sistem (2) sama dengan nol, maka dari (2.1) diperoleh $x_S = 1$ dan pada (2.9) diperoleh $y_S = 1$. Sedangkan berturut-turut pada (2.2) – (2.8) dan (2.10) – (2.11) diperoleh $x_I = x_{I1} = x_{I12} = x_{I2} = x_{I21} = x_R = y_{I1} = y_{I2} = 0$. Jadi diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$.

b. Jika $x_{I2} = 0, x_{I12} = 0, x_{S21} = 0, x_{I21} = 0, x_R = 0, y_{I2} = 0$, maka dengan mengambil nol di ruas kanan dari (2.10) diperoleh

$$y_{I1} = \frac{\beta_{hv} b}{\alpha H} x_{I1}. \quad (3)$$

Jika ruas kanan (2.2) sama dengan nol dan mensubstitusi (3) ke (2.2), maka diperoleh

$$x_s = \frac{(\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V}. \quad (4)$$

Jika ruas kanan (2.1) sama dengan nol dan mensubstitusikan (4) ke (2.1), maka diperoleh

$$y_{I1} = \frac{\mu [\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{vh1} b V (\mu + \gamma_1) \alpha H}. \quad (5)$$

Jika (5) disubstitusikan ke (3), maka diperoleh

$$x_{I1} = \frac{\mu [\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{hv} b^2 V \beta_{vh1} (\mu + \gamma_1)}. \quad (6)$$

Jika ruas kanan (2.4) sama dengan nol dan mensubstitusikan (6) ke (2.4), maka diperoleh

$$x_{S12} = \frac{\gamma_1 [\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V (\mu + \gamma_1)}. \quad (7)$$

Selanjutnya jika ruas kanan (2.9) sama dengan nol dan mensubstitusikan (6) ke (2.9), maka diperoleh

$$y_s = \frac{\alpha H b V \beta_{vh1} (\mu + \gamma_1) - \mu \beta_{vh1} \beta_{hv} b^2 V + \mu (\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\alpha H b V \beta_{vh1} (\mu + \gamma_1)}. \quad (8)$$

Jadi, terbukti untuk titik ekuilibrium endemic untuk *serotype* pertama dengan $x_s^*, x_{I1}^*, x_{S12}^*, y_s^*, y_{I1}^*$ berturut-turut seperti pada (4), (6), (7), (8), (5).

- c. Jika $x_{I1} = 0, x_{I12} = 0, x_{S12} = 0, x_{I21} = 0, x_R = 0, y_{I1} = 0$, maka dengan mengambil nilai nol di ruas kanan dari (2.19) diperoleh

$$\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I2}) - \alpha y_{I2} = 0$$

atau

$$y_{I2} = \frac{\beta_{hv} b}{\alpha H} x_{I2}. \quad (9)$$

Jika (2.3) diambil sama dengan nol dan (9) disubstitusikan, maka diperoleh

$$\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \left(\frac{\beta_{hv} b}{\alpha H} x_{I2} \right) x_s - \gamma_1 x_{I2} - \mu x_{I2} = 0$$

atau

$$x_s = \frac{(\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V}. \quad (10)$$

Jika (2.1) diambil sama dengan nol dan (10) disubstitusikan, maka diperoleh

$$\mu - \beta_{vh2} \frac{bV}{H} y_{I2} \left(\frac{(\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V} \right) - \mu \left(\frac{(\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V} \right) = 0$$

atau

$$y_{I2} = \frac{\mu [\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{bV \beta_{vh2} (\mu + \gamma_1) \alpha H}. \quad (11)$$

Jika (11) disubstitusi ke (9), maka diperoleh

$$x_{I2} = \frac{\mu [\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{b^2 V \beta_{hv} \beta_{vh2} (\mu + \gamma_1)} \quad (12)$$

Jika (2.9) diambil sama dengan nol dan (12) disubstitusikan, maka diperoleh

$$y_S = \frac{\alpha H b V \beta_{vh2} (\mu + \gamma_1) - \mu \beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V + \mu (\mu + \gamma_1) \alpha H^2}{\alpha H b V \beta_{vh2} (\mu + \gamma_1)} \quad (13)$$

Jika ruas kanan (2.5) sama dengan nol dan mensubstitusikan (12), maka diperoleh

$$x_{S21} = \frac{\gamma_1 [\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V - (\mu + \gamma_1) \alpha H^2]}{\beta_{vh2} \beta_{hv} b^2 V (\mu + \gamma_1)}. \quad (14)$$

Jadi terbukti titik ekuilibrium endemic untuk *serotype* kedua dengan $x_S^*, x_{I2}^*, x_{S21}^*, y_S^*, y_{I2}^*$ berturut-turut seperti pada (10), (12), (14), (13), (11). \square

B. Basic Reproduction Number

Berikut akan diberikan langkah-langkah untuk mendapatkan *basic reproduction number* menggunakan *next generating matrix* seperti yang telah dilakukan oleh Driessche [5]. Dibentuk matriks F yang entri-entri-nya adalah suku-suku yang “masuk” ke kelas-kelas terinfeksi selanjutnya diambil turunannya terhadap masing-masing kelas pada saat $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$.

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial \left(\beta_{vh1} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_S}}{\partial x_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_S}}{\partial x_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_{S12}}}{\partial x_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_{S21}}}{\partial x_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I1} + x_{I21}) \right)}{\partial x_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I2} + x_{I12}) \right)}{\partial x_{I1}} \\ \frac{\partial \left(\beta_{vh1} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_S}}{\partial x_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_S}}{\partial x_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_{S12}}}{\partial x_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_{S21}}}{\partial x_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I1} + x_{I21}) \right)}{\partial x_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I2} + x_{I12}) \right)}{\partial x_{I2}} \\ \frac{\partial \left(\beta_{vh1} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_S}}{\partial x_{I12}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_S}}{\partial x_{I12}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_{S12}}}{\partial x_{I12}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_{S21}}}{\partial x_{I12}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I1} + x_{I21}) \right)}{\partial x_{I12}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I2} + x_{I12}) \right)}{\partial x_{I12}} \\ \frac{\partial \left(\beta_{vh1} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_S}}{\partial x_{I21}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_S}}{\partial x_{I21}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_{S12}}}{\partial x_{I21}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_{S21}}}{\partial x_{I21}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I1} + x_{I21}) \right)}{\partial x_{I21}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I2} + x_{I12}) \right)}{\partial x_{I21}} \\ \frac{\partial \left(\beta_{vh1} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_S}}{\partial y_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_S}}{\partial y_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_{S12}}}{\partial y_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_{S21}}}{\partial y_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I1} + x_{I21}) \right)}{\partial y_{I1}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I2} + x_{I12}) \right)}{\partial y_{I1}} \\ \frac{\partial \left(\beta_{vh1} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_S}}{\partial y_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_S}}{\partial y_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I2} x_{S12}}}{\partial y_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{vh2} \frac{bV}{H} \right)_{y_{I1} x_{S21}}}{\partial y_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I1} + x_{I21}) \right)}{\partial y_{I2}} & \frac{\partial \left(\beta_{hv} \frac{b}{H} (x_{I2} + x_{I12}) \right)}{\partial y_{I2}} \end{bmatrix}_{(1,0,0,0,0,0,0,1,0,0)}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{hv} \frac{b}{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{hv} \frac{b}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{hv} \frac{b}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{hv} \frac{b}{H} & 0 \\ \beta_{vh1} \frac{bV}{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{vh2} \frac{bV}{H} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dibentuk matriks L yang entri-entri-nya adalah suku-suku yang “keluar” dari kelas-kelas terinfeksi selanjutnya diambil turunannya terhadap masing-masing kelas pada saat $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$.

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r1}}{\partial x_{r1}} & \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r2}}{\partial x_{r1}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r12}}{\partial x_{r1}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r21}}{\partial x_{r1}} & \frac{\partial(\alpha y_{r1})}{\partial x_{r1}} & \frac{\partial(\alpha y_{r2})}{\partial x_{r1}} \\ \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r1}}{\partial x_{r2}} & \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r2}}{\partial x_{r2}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r12}}{\partial x_{r2}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r21}}{\partial x_{r2}} & \frac{\partial(\alpha y_{r1})}{\partial x_{r2}} & \frac{\partial(\alpha y_{r2})}{\partial x_{r2}} \\ \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r1}}{\partial x_{r12}} & \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r2}}{\partial x_{r12}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r12}}{\partial x_{r12}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r21}}{\partial x_{r12}} & \frac{\partial(\alpha y_{r1})}{\partial x_{r12}} & \frac{\partial(\alpha y_{r2})}{\partial x_{r12}} \\ \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r1}}{\partial x_{r21}} & \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r2}}{\partial x_{r21}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r12}}{\partial x_{r21}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r21}}{\partial x_{r21}} & \frac{\partial(\alpha y_{r1})}{\partial x_{r21}} & \frac{\partial(\alpha y_{r2})}{\partial x_{r21}} \\ \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r1}}{\partial y_{r1}} & \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r2}}{\partial y_{r1}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r12}}{\partial y_{r1}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r21}}{\partial y_{r1}} & \frac{\partial(\alpha y_{r1})}{\partial y_{r1}} & \frac{\partial(\alpha y_{r2})}{\partial y_{r1}} \\ \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r1}}{\partial y_{r2}} & \frac{\partial(\gamma_1 + \mu)x_{r2}}{\partial y_{r2}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r12}}{\partial y_{r2}} & \frac{\partial(\gamma_2 + \mu)x_{r21}}{\partial y_{r2}} & \frac{\partial(\alpha y_{r1})}{\partial y_{r2}} & \frac{\partial(\alpha y_{r2})}{\partial y_{r2}} \end{bmatrix}_{(1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0)}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_1 + \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 + \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 + \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

dan inverse dari matriks L adalah

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1 + \mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_1 + \mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_2 + \mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_2 + \mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Dicari matriks G yaitu hasil perkalian antara matriks F dan L^{-1}

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_{hv}b}{\alpha H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_{hv}b}{\alpha H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_{hv}b}{\alpha H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_{hv}b}{\alpha H} & 0 \\ \frac{\beta_{vh1}bV}{H(\gamma_1 + \mu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{vh2}bV}{H(\gamma_1 + \mu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basic Reproduction Number adalah nilai eigen terbesar dari matriks G berkenaan dengan *serotype* pertama dan kedua berturut-turut ditunjukkan R_1, R_2 pada (15)

$$R_1 = \frac{b\sqrt{\alpha(\gamma_1 + \mu)\beta_{hv}\beta_{vh1}V}}{\alpha(\gamma_1 + \mu)H}, R_2 = \frac{b\sqrt{\alpha(\gamma_1 + \mu)\beta_{hv}\beta_{vh2}V}}{\alpha(\gamma_1 + \mu)H}. \quad (15)$$

Untuk R_1 menunjukkan jumlah *host* terinfeksi berikutnya jika yang terinfeksi pertama disebabkan oleh *serotype* pertama. Sedangkan R_2 menunjukkan jumlah *host* terinfeksi berikutnya jika yang terinfeksi pertama disebabkan oleh *serotype* kedua.

C. Kestabilan di Sekitar Titik Ekuilibrium

Pembahasan mengenai kestabilan di sekitar titik ekuilibrium akan dibahas melalui Gambar 2 – 3, menggunakan nilai – nilai parameter seperti yang tampak pada Tabel 1. Karena laju kematian diasumsikan sama dengan laju kelahiran, sementara angka harapan hidup penduduk Indonesia rata-rata 70 tahun, maka nilai μ sebesar $\frac{1}{(70)(365)\text{hari}}$. Untuk nyamuk mempunyai angka harapan hidup 2 minggu,

sehingga nilai α sebesar $\frac{1}{14}$ hari. Sedangkan nilai γ_2 lebih besar dibandingkan γ_1 . Karena untuk infeksi kedua seringkali lebih fatal dibandingkan dengan yang pertama [6].

TABEL 1. NILAI PARAMETER

Parameter	Nilai	Referensi
μ	0.0000391389	[7]
α	0.0714285714	[8]
b	0.5	[2]
β_{vh1}	0.525	[4]
β_{vh2}	0.49	[4]
β_{hv}	0.3	[4]
γ_1	0.1428	[2]
γ_2	0.2	Diasumsikan

Lebih lanjut, melalui sistem (2) dibentuk matriks Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} -\beta_{v1} \frac{bV}{H} y_{11} - \beta_{v2} \frac{bV}{H} y_{12} - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{v1} \frac{bV}{H} x_s & -\beta_{v2} \frac{bV}{H} x_s \\ \beta_{v1} \frac{bV}{H} y_{11} & -\gamma_1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{v1} \frac{bV}{H} x_s & 0 \\ \beta_{v2} \frac{bV}{H} y_{12} & 0 & -\gamma_1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{v2} \frac{bV}{H} x_s \\ 0 & \gamma_1 & 0 & -\beta_{v2} \frac{bV}{H} y_{12} - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{v2} \frac{bV}{H} x_{s12} \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & -\beta_{v1} \frac{bV}{H} y_{11} - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{v1} \frac{bV}{H} x_{s21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{v2} \frac{bV}{H} y_{12} & 0 & -\gamma_2 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{v2} \frac{bV}{H} x_{s12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{v1} \frac{bV}{H} y_{11} & 0 & -\gamma_2 - \mu & 0 & 0 & 0 & \beta_{v1} \frac{bV}{H} x_{s21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_2 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{hv} \frac{b}{H} & -\beta_{hv} \frac{b}{H} & 0 & 0 & -\beta_{hv} \frac{b}{H} & -\beta_{hv} \frac{b}{H} & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{hv} \frac{b}{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{hv} \frac{b}{H} & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{hv} \frac{b}{H} & 0 & 0 & \beta_{hv} \frac{b}{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

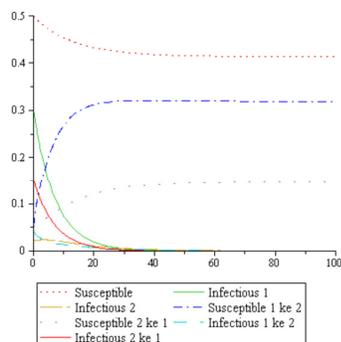
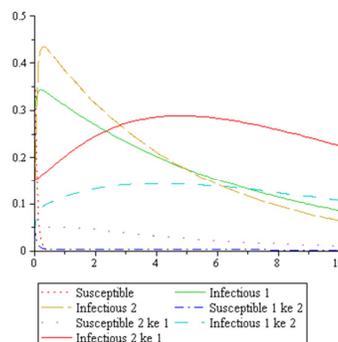
Selanjutnya nilai-nilai parameter yang tampak di Tabel 1 disubstitusi pada matriks J serta diambil pada saat $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $(x_s^*, x_{I1}^*, 0, x_{S12}^*, 0, 0, 0, 0, y_s^*, y_{I1}^*, 0)$, dan $(x_s^*, 0, x_{I2}^*, 0, x_{S21}^*, 0, 0, 0, y_s^*, 0, y_{I2}^*)$, berturut-turut. Jika $V = 5000$ dan $H = 10000$ disubstitusi pada (15), maka diperoleh nilai $R_1 = 0.017933294$, $R_2 = 0.017325208$, sementara $R_1 = 5.671005475$, $R_2 = 5.478711792$ diperoleh untuk $V = 50000$ dan $H = 100$. Menggunakan hasil perhitungan ini, maka diperoleh nilai-nilai eigen seperti tampak pada Tabel 2 berikut.

TABEL 2. NILAI-NILAI EIGEN DARI MATRIKS J DI SETIAP TITIK EKUILIBRIUM SISTEM (2)

Titik Ekuilibrium $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$		Titik Ekuilibrium $(x_s^*, x_{I1}^*, 0, x_{S12}^*, 0, 0, 0, 0, y_s^*, y_{I1}^*, 0)$		Titik Ekuilibrium $(x_s^*, 0, x_{I2}^*, 0, x_{S21}^*, 0, 0, 0, y_s^*, 0, y_{I2}^*)$	
$R_2 < 1$	$R_2 > 1$	$R_2 > 1$		$R_2 > 1$	
-0.0000391389	-0.0000391389	-0.0000391389		-0.0000391389	
-0.0000391389	-0.0000391389	-0.0000391389		-0.0000391389	
-0.07142857140	-0.0000391389	-0.07142857140		-0.07142857140	
-0.2000391389	-0.0714285714	$-0.0002978839799 + 0.005829589546i$		$-0.0002783252560 + 0.005621509347i$	
-0.07140284918	-0.5372790252	$-0.0002978839799 - 0.005829589546i$		$-0.0002783252560 - 0.005621509347i$	
-0.07140101259	0.3230113149	-0.2144271737		-0.2144159424	
-0.1428666977	0.3380064231	-0.2000391389		-0.0007048825768	
-0.0000391389	-0.5522741334	-0.0007552313322		-0.5824292670	
-0.2000391389	-0.0000391389	-0.1457404976		0.3140746793	
-0.1428666977	-0.2000391389	0.2990879142		-0.1459522614	
-0.0000391389	-0.2000391389	-0.5676542658		-0.2000391389	
stabil asimtotik lokal	tidak stabil	tidak stabil		tidak stabil	

Kesimpulan yang sama juga diperoleh untuk R_1 .

Berikut diberikan Gambar 2 dan 3 untuk menunjukkan perilaku solusi dari Sistem (2) menggunakan MAPLE. Berdasarkan Gambar 2 untuk nilai $R_0 < 1$, maka mula-mula populasi kelas rentan, x_s , turun hingga hari ke-20, tetapi untuk $t \rightarrow \infty$, akhirnya menuju 1. Sedangkan populasi kelas terinfeksi menuju 0. Hal ini dikarenakan tidak cukupnya kelas rentan yang bisa diinfeksi. Artinya penyakit demam berdarah semakin lama semakin menghilang. Sedangkan dari Gambar 3, kelas x_s turun lebih cepat dan untuk kelas terinfeksi tetap ada di alam. Artinya penyakit demam berdarah selalu ada. Lebih lanjut, proporsi untuk kelas terinfeksi *serotype* kedua $x_{i_2} + x_{i_{12}}$ lebih tinggi dibandingkan dengan $x_{i_1} + x_{i_{21}}$. Hal ini wajar terjadi karena seringkali seseorang yang terinfeksi demam berdarah yang kedua lebih fatal dibandingkan sebelumnya.


 GAMBAR 2. PERILAKU SOLUSI UNTUK $R_0 < 1$

 GAMBAR 3. PERILAKU SOLUSI UNTUK $R_0 > 1$

IV. SIMPULAN

Model matematika untuk penyebaran demam berdarah dengan mempertimbangkan tidak hanya populasi *host* tetapi juga *vector* diberikan dalam Sistem (2). Model ini juga membedakan antara laju kesembuhan antara yang terinfeksi oleh *serotype* pertama dan kedua. Berdasarkan model, dibahas tiga titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit, endemic oleh *serotype* pertama dan endemic oleh *serotype* kedua. Menggunakan MAPLE tampak bahwa untuk *basic reproduction number* berkenaan dengan *serotype* pertama dan kedua kurang dari satu, maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik local. Sementara jika lebih dari satu, maka ketiga titik ekuilibrium menjadi tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Howard Weiss, "The SIR model and the Foundations of Public Health," *MATerials MATemàtics*, vol. 17, pp. 1-17, 2013.
- [2] Lourdes Esteva and Cristobal Vargas, "Analysis of a Dengue Disease Transmission Model," *Mathematical Biosciences*, vol. 150, pp. 131-151, 1998.
- [3] Edy Soewono and Asep K Supriatna, "A Two-dimensional Model for the Transmission of Dengue Fever Disease," *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 24, pp. 49-57, 2001.
- [4] Ashan James, "Coexistence of Two Serotypes of Dengue Virus with and without Seasonal Variation," McMaster University, Canada, 2013.
- [5] P. van den Driessche and James Watmough, "Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission," *Mathematical Biosciences*, vol. 180, pp. 29-48, 2002.
- [6] Padmalal Gurugama, Pankaj Garg, Jennifer Perera, Ananda Wijewickrama, and Suranjith L Seneviratne, "Dengue Viral Infections," *Indian Journal of Dermatology*, vol. 55, no. 1, pp. 68-78, Jan-Mar 2010.
- [7] Badan Pusat Statistik. (2015) Angka Harapan Hidup Penduduk Beberapa Negara (tahun), 1995-2015. [Online]. <http://www.bps.go.id/linkTabelStatis/view/id/1517>
- [8] Zhilan Feng and Jorge X. Velasco Hernandez, "Competitive Exclusion in a Vector-Host Model for the Dengue Fever," *Journal of mathematical Biology*, vol. 35, pp. 523-544, 1997.