STRATEGI VAKSINASI *PULSE* UNTUK MENGATASI EPIDEMI PENYAKIT CAMPAK BERDASARKAN MODEL SIR

Nikenasih Binatari, M.Si., Eminugroho Ratna Sari, M.Sc.

Abstrak

Berdasarkan teori dinamika populasi dalam lingkungan, dihipotesiskan bahwa epidemi campak dapat dikendalikan secara efisien oleh vaksinasi *pulse* yaitu dengan pemberian vaksin secara periodik. Keadaan sistem dapat dianalisa dengan model yang representative terhadap perilaku sistem. Pengembangan model SIR dengan melibatkan parameter *p*, proporsi banyaknya individu yang tervaksin setiap periode waktu, digunakan sebagai model paling sederhana.

Berdasarkan model yang diperoleh pada akhir penelitian dapat dianalisa bahwa epidemi campak dapat dikendalikan jika proporsi *p* memenuhi $\frac{(mT-p)\left(e^{mT}-1\right)+mpT}{mT\left(p-1+e^{mT}\right)}<\frac{m+\alpha}{\beta}$. Hal ini berarti bahwa pemberian vaksin kepada individu yang rentan terhadap penyakit, secara berulang-ulang (dengan periode tertentu), memungkinkan pembasmian kejangkitan penyakit campak dari seluruh populasi.

Kata Kunci: vaksinasi *pulse*, SIR, epidemi penyakit campak

PENDAHULUAN

Latar Belakang Masalah

Campak adalah penyakit yang disebabkan oleh infeksi virus yang menular pada anak-anak, dan terkadang juga menyerang orang dewasa. Penyakit ini ditandai dengan demam tinggi, radang selaput mata, dan bercak kemerahan pada kulit. Anak kurang gizi mudah terserang komplikasi yang fatal. Campak disebabkan oleh *Paramiksovirus*. Penularan terjadi melalui percikan ludah dari hidung, mulut, maupun tenggorokan. Penderita bisa menularkan penyakit dalam waktu 2-4 hari sebelum timbul ruam kulit dan selama ruam kulit ada. Masa inkubasi 10-14 hari sebelum gejala muncul.

Sebelum vaksinasi campak digunakan secara meluas, wabah campak terjadi setiap 2-3 tahun, terutama pada anak-anak usia pra-sekolah dan anak-anak SD. Jika seseorang pernah menderita campak, maka seumur hidupnya dia akan kebal terhadap penyakit ini. Data yang ada menyebutkan, kematian akibat campak di dunia yang dilaporkan pada 2002 mencapai 777.000 orang. Di negara-negara ASEAN terdapat 202.000 orang meninggal akibat campak dan 15 % (30.300 orang) diantaranya berasal dari Indonesia. Setiap tahun diperkirakan 30.000 anak Indonesia meninggal karena komplikasi yang diakibatkan campak. Hal ini berarti, kira-kira ada 1 anak yang meninggal setiap 20 menitnya (Depkes RI, 2007).

Baik langsung maupun tidak langsung, penyakit campak merupakan salah satu penyakit yang dapat mengakibatkan kematian. Pemerintah Indonesia telah melakukan beberapa upaya untuk mereduksi kematian, salah satunya yaitu dengan pemberian imunisasi campak. Di Indonesia, program imunisasi campak telah dimulai sejak 1984 dengan kebijakan memberikan 1 dosis pada bayi usia 9 bulan. Pada awalnya cakupan campak sebesar 12,7 persen di tahun 1984, kemudian meningkat sampai di atas 80 persen pada tahun 1990 dan seterusnya bertahan di atas angka tersebut sampai 2006. Pemberian vaksin pada bayi usia 9 bulan ini berdasarkan atas konsep lama ‘strategi imunisasi waktu konstan’.

Meskipun pemberian imunisasi telah diberikan, bahkan dengan dosis yang semakin tinggi, perkembangan penyakit campak masih belum dapat dikendalikan. Bahkan, individu yang telah divaksin masih dapat terinfeksi campak. Strategi yang baru untuk mengendalikan penyakit campak kemudian dikemukakan, yaitu dengan pemberian vaksin secara periodik, yang dikenal dengan strategi vaksinasi *pulse*. Strategi ini digunakan untuk mempercepat reduksi perkembangan penyakit campak. Harapannya strategi ini dapat menghilangkan kemungkinan terjadinya epidemi atas penyakit campak. Strategi ini didasarkan atas sugesti bahwa penyakit campak dapat dikendalikan secara efektif ketika proses alami yang bersifat sementara ditimbulkan oleh proses lain yang bersifat sementara pula.

Dalam penelitian ini, akan dirumuskan pembentukan model matematika berdasarkan model SIR dengan pemberian vaksin secara periodik pada populasi kelas rentan. Selanjutnya akan dianalisa titik ekuilibrium dan kestabilan di sekitar titik ekuilibrium sehingga dapat disimpulkan mengenai keefektifan pemberian vaksin secara periodik tersebut kepada kelas rentan.

Identifikasi masalah

Berdasarkan latar belakang masalah diatas, dapat diidentifikasi beberapa masalah. Adanya perbedaan yang signifikan antara strategi vaksinasi pada penyakit campak. Pada strategi konvensional, individu yang baru saja lahir tidak mempunyai peran dalam meyebarkan penyakit campak. Pemberian vaksin campak dilakukan pada bayi usia 9 bulan dan vaksin hanya dilakukan satu kali seumur hidup. Berbeda dengan strategi konvensional, strategi vaksinasi *pulse* didasarkan bahwa anak usia sekolah, rentang usia 5 tahun – 16 tahun mempunyai peranan besar dalam menyebarkan penyakit campak. Oleh karena itu diperlukan pemberian vaksin secara periodik pada individu.

Pada penelitian kali ini, akan diuji keberhasilan vaksinasi *pulse* dari segi matematisnya. Analisa keberhasilan didasarkan atas perilaku sistem dalam model yang dibangun.

Rumusan Masalah

Dari identifikasi masalah tersebut, dapat dirumuskan masalah mengenai faktor yang diperlukan agar pemberian vaksin secara periodik terhadap individu yang rentan terhadap penyakit campak efektif untuk dilakukan, sehingga dapat mengurangi keterjangkitan terhadap penyakit campak.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, akan dikonstruksi suatu model matematika yang representative terhadap pola penyebaran penyakit campak khususnya pada anak usia dini dengan batasan, asumsi, dan parameter yang didefinisikan.

Sistem Dinamika Model SIR pada Penyakit Campak dengan Vaksinasi Pulse

Pembangunan model dimulai dengan mengklasifikasikan individu dalam populasi menjadi tiga kelas

- Kelas rentan (*susceptible*/S), yaitu kelompok individu yang sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit
- Kelas terinfeksi (*infected*/I), yaitu kelompok individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh dari penyakit
- Kelas sembuh (*removed, recover*/R), yaitu kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit

Sesuai dengan kondisi pada penyabaran penyakit campak, model SIR kemudian dibatasi oleh asumsi-asumsi berikut ini :

- Populasi tertutup, dalam arti tidak ada kelahiran, kematian dan migrasi. Jumlah populasi konstan N.
- Hanya menular apabila terjadi kontak langsung dengan penderita.
- Individu yang sembuh mempunyai kekebalan permanen, dalam arti setelah sembuh individu tidak bisa menjadi rentan lagi.
- Masa inkubasi sangat singkat.
- Laju kenaikan jumlah individu di kelas I sebanding dengan jumlah individu kelas S dan I yaitu βSI . Laju penurunan jumlah individu kelas S juga βSI .
- Laju kenaikan jumlah individu pada kelas R sebanding dengan jumlah individu kelas I yaitu αI .
- Laju kelahiran dan kematian diasumsikan sama yaitu m yang artinya harapan hidup adalah $1/m$.

Model SIR klasik sebelum adanya vaksinasi yang sesuai dengan asumsi diatas adalah

$$\frac{dS}{dt} = mN - (\beta I + m)S, \qquad \frac{dI}{dt} = \beta IS - mI - \alpha I, \qquad \frac{dR}{dt} = \alpha I - mR \tag{4.1}$$

dimana $S(t) + I(t) + R(t) = N$ untuk setiap t.

Analisa pada model tersebut bergantung pada nilai *basic reproduction number* R_0, yaitu banyaknya individu rentan yang kemudian terinfeksi jika berinteraksi dengan penderita (dalam hal ini, penderita campak) dan banyaknya individu yang rentan, terinfeksi, dan sembuh mula-mula.
Sistem Dinamika (4.1) mempunyai dua titik kesetimbangan

- Jika banyaknya individu yang rentan dan individu yang terinfeksi disekitar (N,0) dengan $R_0 < 1$, artinya setiap interaksi dengan penderita tidak cukup kuat untuk menginfeksi individu yang rentan, maka penyebaran penyakit campak tidak akan mewabah dan cenderung menghilang. Kondisi ini kemudian dikatakan stabil asimtotik disekitar titik kesetimbangan (N,0) jika $R_0 < 1$. Oleh karena itu, pada titik kesetimbangan (N,0) penyakit campak tidak mewabah dan cenderung menghilang, maka titik kesetimbangan (N,0) disebut juga dengan titik kesetimbangan bebas penyakit (*free disease equilibrium point*).
- Jika banyaknya individu yang rentan dan individu yang terinfeksi disekitar $\left(\frac{\alpha + m}{\beta}, \frac{mN - m\left(\frac{\alpha + m}{\beta}\right)}{\alpha + m}\right)$ dengan $R_0 > 1$, maka penyebaran penyakit campak akan mewabah tetapi tidak mencapai kepunahan. Banyaknya individu yang rentan dan individu terinfeksi akan bergerak menuju nilai $\left(\frac{\alpha + m}{\beta}, \frac{mN - m\left(\frac{\alpha + m}{\beta}\right)}{\alpha + m}\right)$. Kondisi ini kemudian juga dikatakan stabil asimtotik disekitar titik kesetimbangan $\left(\frac{\alpha + m}{\beta}, \frac{mN - m\left(\frac{\alpha + m}{\beta}\right)}{\alpha + m}\right)$.

  Oleh karena terdapat individu yang terinfeksi pada titik kesetimbangan ini, maka titik kesetimbangan ini disebut dengan titik kesetimbangan epidemic (*epidemic equilibrium point*).

Vaksinasi dalam penelitian ini hanya diberikan pada individu yang rentan terhadap penyakit. Individu yang terinfeksi penyakit maupun yang sudah sembuh tidak diberikan vaksinasi. Pada vaksinasi konstan *p* bagian, yaitu vaksinasi yang hanya diberikan satu kali dan diawal waktu, maka sistem dinamika model SIR yang sesuai adalah

$$\frac{dS}{dt} = (1 - p)mN - (\beta I + m)S \qquad \frac{dI}{dt} = \beta IS - mI - \alpha I \qquad \frac{dR}{dt} = \alpha I - mR + pmN \tag{4.2}$$

Skema dari vaksinasi pulse yaitu memberikan vaksinasi sebesar *p* bagian dari semua individu yang rentan terhadap penyakit campak secara periodic setiap *T* tahun. Akibatnya, banyaknya individu yang rentan pada suatu periode berkurang sebanyak *p* bagian dari individu yang rentan pada periode sebelumnya. Misalkan t_n adalah waktu dimana vaksinasi pulse ke-*n* dilakukan, maka pernyataan pada kalimat sebelumnya dapat dinyatakan dalam simbol matematika sebagai berikut

$$S(t_n) = (1 - p)S(t_n^-) \tag{4.3}$$

dimana $t_{n+1} = t_n + T$ dan t_n^- adalah waktu sesaat sebelum vaksinasi pulse ke-*n* atau

$$S(t_n^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} S(t_n - \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Diketahui sebelumnya bahwa dalam vaksinasi pulse, vaksin diberikan secara periodik pada individu yang rentan, oleh karena itu sistem dinamika model SIR yang sesuai dengan vaksinasi pulse adalah

$$\frac{dS}{dt} = m(N-S) - \beta SI - p\sum_{n=0}^{\infty} S(t_n^-)\delta(t-t_n) \qquad \frac{dI}{dt} = \beta IS - mI - \alpha I \qquad \frac{dR}{dt} = \alpha I - mR + p\sum_{n=0}^{\infty} S(t_n^-)\delta(t-t_n) \quad (4.4)$$

Misalkan setelah vaksinasi ke-*n*, banyaknya individu yang terinfeksi adalah 0, $I(t) = 0 \quad t \geq t_n$, maka solusi bebas penyakit pada Sistem Dinamika (4.4) dengan vaksinasi pulse untuk banyaknya individu yang rentan harus memenuhi memenuhi hubungan

$$\frac{dS}{dt} = m(N-S) - pS(t_{n+1}^-)\delta(t-t_{n+1}) \quad (4.5)$$

dimana $S(t_{n+1}) = (1-p)S(t_{n+1}^-)$ dan $t_{n+1} = t_n + T$.

Dari persamaan kedua pada Sistem Dinamika (4.4)

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - mI - \alpha I$$

diperoleh bahwa

$$\frac{dI}{dt} = (-m-\alpha)I\left(1 - \frac{\beta S}{m+\alpha}\right)$$

Dari persamaan terakhir ini, kemudian diperoleh *basic reproduction number* sebagai berikut

$$R_0 = \frac{\beta S}{m+\alpha}$$

Solusi Bebas Penyakit

Tujuan dari adanya vaksinasi pulse yaitu penyebaran penyakit campak tidak mewabah dan tidak ada individu yang terinfeksi penyakit ini. Oleh karena itu, penelitian ini hanya akan difokuskan pada titik kesetimbangan bebas penyakit saja. Titik kesetimbangan bebas penyakit ini kemudian disebut dengan solusi bebas penyakit. Jadi, langkah yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah mencari titik kesetimbangan bebas penyakit pada model yang representative terhadap perilaku penularan penyakit campak kemudian menganalisa perilaku sistem disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit tersebut.

Misalkan *F* adalah pemetaan yang menyatakan hubungan antara banyaknya individu yang rentan sesaat setelah vaksinasi pulse ke-*n+1* dengan banyaknya individu yang rentan sesaat setelah vaksinasi pulsa ke-*n*, maka

$$S_{n+1} = F(S_n)$$

Titik tetap S^* pada interval waktu $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ untuk pemetaan *F* tersebut adalah

$$S^* = \frac{(1-p)N}{1-(1-p)e^{-mT}} = \frac{(1-p)(e^{mT}-1)}{e^{mT}+p-1}N \quad (4.6)$$

Oleh karena tujuan penelitian adalah mencari banyaknya individu rentan yang perlu divaksin dengan vaksinasi pulse secara periodic sehingga tidak ada individu yang terinfeksi, maka titik tetap S^* haruslah sama dengan banyaknya individu mula-mula yang rentan sesaat setelah vaksinasi pulse ke-*n*, atau $S^* = S_n$.

Dengan demikian, solusi bebas penyakit pada Sistem Dinamika (4.5) pada interval waktu $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ adalah

$$\tilde{S}(t) = \begin{cases} N\left\{1 + \dfrac{pe^{mT}}{1-p-e^{mT}} e^{-m(t-t_n)}\right\}, & t_n \le t < t_{n+1} \\ \dfrac{(1-p)(e^{mT}-1)}{e^{mT}+p-1} N, & t = t_{n+1} \end{cases}$$

$$\tilde{I}(t) = 0 \qquad (4.7)$$

Solusi bebas penyakit ini disebut juga dengan titik kesetimbangan bebas penyakit.

Analisa Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Selanjutnya akan dianalisa sifat kestabilan Sistem Dinamika (4.4) di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit. Misalkan

$$F(S,I) = m(N-S) - \beta SI - p\sum_{n=0}^{\infty} S(t_n^-)\delta(t-t_n) \qquad G(S,I) = \beta IS - mI - \alpha I \qquad (4.8)$$

Kedua fungsi diatas merupakan fungsi nonlinear. Dengan menggunakan deret taylor di titik kesetimbangannya, maka diperoleh system persamaan diferensial linear

$$\frac{dS}{dt} = (-m)(S - \tilde{S}) + (-\beta\tilde{S})(I)$$

$$\frac{dI}{dt} = (\beta\tilde{S} - m - \alpha)(I) \qquad (4.9)$$

Matriks Jacobian yang bisa dibentuk dari Sistem (4.9) adalah $\begin{bmatrix} -m & -\beta\tilde{S} \\ 0 & \beta\tilde{S} - m - \alpha \end{bmatrix}$

Analisa kestabilan dari sistem di sekitar titik kesetimbangan dapat dilakukan dengan memperhatikan nilai eigen dari matriks jacobian, yaitu

$$\lambda_1 = -m \qquad \lambda_2 = -m + \beta\tilde{S} - \alpha$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik jika kedua nilai eigen bernilai negatif. Darisini dapat diambil kesimpulan bahwa jika

$$R_0 < 1$$

maka kedua nilai eigen bernilai negative, yang berakibat bahwa sistem akan stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit jika *basic reproduction number* bernilai kurang dari satu.

Proporsi Vaksinasi Pulse

Diperhatikan Persamaan (4.6),

$$S^* = \frac{(1-p)N}{1-(1-p)e^{-mT}} = \frac{(1-p)(e^{mT}-1)}{e^{mT}+p-1} N$$

Dalam hal ini epidemic campak dapat dikendalikan jika proporsi *p* memenuhi

$$\frac{(mT-p)(e^{mT}-1) + mpT}{mT(p-1+e^{mT})} < \frac{m+\alpha}{\beta}$$

Artinya bahwa pemberian vaksinasi kepada individu yang rentan terhadap penyakit, secara berulang-ulang (dengan periode tertentu), memungkinkan pembasmian kejangkitan penyakit campak dari seluruh populasi.

KESIMPULAN dan SARAN

Kesimpulan

Sistem dinamika model SIR yang sesuai dengan vaksinasi pulse adalah

$$\frac{dS}{dt} = m(N-S) - \beta SI - p\sum_{n=0}^{\infty} S(t_n^-)\delta(t-t_n) \qquad \frac{dI}{dt} = \beta IS - mI - \alpha I \qquad \frac{dR}{dt} = \alpha I - mR + p\sum_{n=0}^{\infty} S(t_n^-)\delta(t-t_n)$$

Tujuan dari adanya vaksinasi pulse yaitu penyebaran penyakit campak tidak mewabah dan tidak ada individu yang terinfeksi penyakit ini. Oleh karena itu, penelitian ini hanya akan difokuskan pada titik kesetimbangan bebas penyakit saja. Titik kesetimbangan bebas penyakit ini kemudian disebut dengan solusi bebas penyakit.

Berdasarkan Sistem tersebut, diperoleh solusi bebas penyakit

$$\tilde{S}(t) = \begin{cases} N\left\{1 + \dfrac{pe^{mT}}{1-p-e^{mT}} e^{-m(t-t_n)}\right\}, & t_n \le t < t_{n+1} \\[2ex] \dfrac{(1-p)(e^{mT}-1)}{e^{mT}+p-1} N, & t = t_{n+1} \end{cases}$$

$$\tilde{I}(t) = 0$$

Selanjutnya, epidemic campak dapat dikendalikan jika proporsi p memenuhi

$$\frac{(mT-p)(e^{mT}-1) + mpT}{mT\left(p-1+e^{mT}\right)} < \frac{m+\alpha}{\beta}$$

Artinya bahwa pemberian vaksinasi kepada individu yang rentan terhadap penyakit, secara berulang-ulang (dengan periode tertentu), memungkinkan pembasmian kejangkitan penyakit campak dari seluruh populasi

Saran

Penelitian ini masih jauh dari kata sempurna. Untuk itu diperlukan berbagai perbaikan dan pengembangan untuk penelitian selanjutnya. Salah satunya adalah dapat menghitung waktu maksimal untuk setiap periode vaksinasi sedemikian sehingga epidemic campak dapat dicegah.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Brauer, Fred. Castillo-Chavez, Carlos. 2001. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* Springer-Verlag New York, Inc.

[2] Depkes RI. 2007. *Peta Kesehatan Indonesia 2007*. Diakses melalui http://www.depkes.go.id/downloads/publikasi/Peta%20Kesehatan%202007.pdf pada tanggal 4 November 2011.

[3] Kermack, W.O., and Mc. Kendrick, 1927, A Contribution to The Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* , pp. 700-721.

[4] Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.

[5] Shulgin, Boris. Stone, Lewi. Agur, Zvia. 1998. *Pulse Vaccination Strategy in the SIR Epidemi Model.* Bulletin of Mathematical Biology 60. 1123 – 1148.