ALJABAR ABSTRAK I

Dwi Lestari, M.Sc

Februari 2012

UNY

dwilestari@uny.ac.id

Apersepsi

Silabus Aljabar Abstrak

- **Pendahuluan (1,2,3,4)**
- **OPERASI BINER: Grupoid, Semigrup dan Monoid (5,6)**
- **GRUP DAN CONTOHNYA (7,8,9)**
- **SIFAT SEDERHANA GRUP (10,11,12)**
- **KOMPLEKS DAN SUBGRUP (13,14,15)**
- Usip I (16)
- **GRUP SIMETRI (17,18)**
- **GRUP SIKLIK (19,20,21)**
- **ISOMORPISME GRUP (22,23,24)**
- Usip II **(25)**
- **KOSET SUATU SUB-GRUP (26,27)**
- **SUBGRUP NORMAL (28,29)**
- **HOMOMORPISME GRUP (30,31,32)**

Bilangan bulat dengan operasi " + "

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

1. Diambil sebarang dua bilangan bulat, hasil penjumlahan kedua bilangan bulat tersebut juga merupakan bilangan bulat. **(tertutup)**

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z})\, a + b \in \mathbb{Z}$$

2. diambil sebarang tiga bilangan bulat, hasil penjumlahan kemudian hasilnya dijumlahkan dengan *c* akan sama hasilnya dengan *a* dijumlahkan dengan hasil penjumlahan, **(asosiatif)**

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})\,(a + b) + c = a + (b + c)$$

Bilangan bulat dengan operasi " + "

3. terdapat suatu bilangan yang apabila dijumlahkan dengan sebarang bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat itu sendiri,**(elemen identitas)**

$$(\exists 0 \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{Z})\, a + 0 = 0 + a = a$$

4. diambil sebarang bilangan bulat *a*, maka selalu dapat ditemukan suatu bilangan bulat sehingga kedua bilangan bulat tersebut apabila dijumlahkan menghasilkan elemen identitas yaitu 0. **(elemen invers)**

$$(\forall a \in \mathbb{Z})(\exists -a \in \mathbb{Z})\, a + (-a) = -a + a = 0$$

bilangan real tidak nol dengan operasi " . "

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\left(\forall a, b \in \mathbb{R}^*\right) a \cdot b \in \mathbb{R}^*$$ **Tertutup**

$$\left(\forall a, b, c \in \mathbb{R}^*\right)(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$ **Asosiatif**

$$\left(\exists 1 \in \mathbb{R}^*\right)\left(\forall a \in \mathbb{R}^*\right) a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$ **Elemen identitas**

$$\left(\forall a \in \mathbb{R}^*\right)\left(\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^*\right) a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$ **Elemen invers**

Latihan

- himpunan semua matriks 2x2 atas himpunan semua bilangan real, $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

  Himpunan di atas terhadap operasi penjumlahan, apakah memenuhi keempat sifat sebelumnya?

Latihan

- Himpunan bilangan bulat terhadap operasi perkalian. (sifat 1,2,3)
- Himpunan bilangan asli terhadap operasi penjumlahan . (sifat 1,2)
- Himpunan bilangan asli terhadap operasi perkalian . (sifat 1,2,3)

DEFINISI

(Struktur Aljabar) → ***Suatu himpunan G yang dilengkapi dengan operasi-operasi pada G***

Operasi Biner → ***Suatu operasi pada G yang bersifat tertutup***

Grupoid → ***Struktur aljabar yang dilengkapi operasi biner***

1. Contoh grupoid yaitu $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Z},-)$, $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(M_2(\mathbb{R}),+)$ dan $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$.

2. Contoh bukan grupoid yaitu $(\mathbb{N},-)$, $(\mathbb{R}^*,+)$ dan $(\mathbb{Z},*)$ dengan definisi $a*b=\dfrac{a+b}{2},\forall a,b\in\mathbb{Z}$.

DEFINISI

- **GRUP**
  - ***Operasi* Biner (G1)**
  - ***Assosiatif (G2)***
  - ***Memuat elemen identitas G(3)***
  - ***Memuat elemen invers (G4)***
- **SEMIGRUP** → **G1 dan G2**
- **MONOID** → **G1 , G2 dan G3**

Contoh GRUP

$(\mathbb{Z},+)$

$(\mathbb{R},+)$

$(\mathbb{R}^*,\cdot)$

$(M_2(\mathbb{R}),+)$

Contoh bukan GRUP

$(\mathbb{N},+)$

$(\mathbb{Z},\cdot)$

$(\mathbb{R},\cdot)$

$(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

Latihan 1

1. Diberikan himpunan semua bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ dengan $i = \sqrt{-1}$. Diberikan operasi penjumlahan "+" pada $\mathbb{C}$ yaitu untuk $a, b \in \mathbb{C}$ dengan $a = x_1 + y_1 i$ dan $b = x_2 + y_2 i$, $a + b = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i$. Buktikan bahwa $(\mathbb{C}, +)$ merupakan grup.

Latihan 2

2. Diberikan himpunan $A=\{1,2,3\}$. Dibentuk himpunan kuasa dari A, yaitu himpunan semua himpunan bagian dari A, yaitu $P(A)=\{S \mid S\subseteq A\}$, apabila ditulis semua elemen-elemennya yaitu

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}.$$

Diberikan operasi irisan himpunan "$\cap$" dan gabungan himpunan "$\cup$" pada $P(A)$. Selidiki apakah $(P(A),\cap)$ dan $(P(A),\cup)$ merupakan grup, monoid atau semigrup.

Latihan 3

3. Diberikan $GL_2(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2x2 atas $\mathbb{R}$ yang invertibel atau yang mempunyai determinan tidak nol, yaitu $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0 \right\}$. Buktikan bahwa $GL_2(\mathbb{R})$ merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks.

Grup Abelian

Suatu grup $(G,*)$ *disebut* ***grup Abelian*** *atau* ***grup komutatif*** *jika operasi biner "* $*$ *" bersifat komutatif, yaitu* $(\forall a,b\in G)\, a*b=b*a$.

Grup $(G,*)$ *disebut* ***grup non-Abelian*** *atau* ***grup non-komutatif*** *jika operasi biner "* $*$ *" tidak bersifat komutatif, yaitu* $(\exists a,b\in G)\, a*b\neq b*a$.

1. Contoh grup Abelian adalah $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ dan $(M_2(\mathbb{R}),+)$.
2. Contoh grup non-komutatif adalah $(GL_2(\mathbb{R}),\cdot)$.

Sifat-sifat sederhana GRUP

Kanselasi kiri $\Rightarrow$ $\left(\forall a,b,c\in G\right)a*b=a*c\Rightarrow b=c$

Kanselasi kanan $\Rightarrow$ $\left(\forall a,b,c\in G\right)a*c=b*c\Rightarrow a=b$