MATERI ALJABAR LINEAR LANJUT

RUANG VEKTOR

Disusun oleh:

Dwi Lestari, M.Sc
email: dwilestari@uny.ac.id

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2012

MATERI ALJABAR LINEAR

1. Ruang vektor
2. Subruang vektor
3. Kombinasi linear dan bebas linear
4. Basis dan Dimensi
5. Ruang baris dan Ruang kolom
6. Ruang hasil kali dalam
7. Orthogonalitas, basis ortonormal
8. Transformasi Linear, Matrik transformasi
9. Nilai eigen dan vektor eigen

IV Referensi/Sumber Bahan

A. Wajib
   Anton, H. 1995. *Elementary Linear Algebra*. New York: John Wiley and Sons.
B. Anjuran
   Setiadji, 1990. *Pengantar Aljabar Linear*. Diktat Kuliah.

V Evaluasi

No	Komponen	Bobot (%)
1	Partisipasi Kuliah	10
2	Tugas-tugas	25
3	Ujian Tengah Semester	30
4	Ujian Semester	35
Jumlah		100 %

BAB I

RUANG VEKTOR

Sebelum sampai pada definisi ruang vektor secara abstrak, lebih dulu diperkenalkan pengertian lapangan (*field*). Lapangan adalah suatu sistem aljabar dengan dua operasi yang dinamakan “addisi”(dinotasikan +) dan “multiplikasi”(dinotasikan **.**), yang memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

1. Terhadap addisi:
    a. Tertutup
    b. Assosiatif
    c. Terdapat elemen netral
    d. Setiap elemen mempunyai invers
    e. Komutatif
2. Terhadap multiplikasi:
    a. Tertutup
    b. Assosiatif
    c. Terdapat elemen satuan
    d. Setiap elemen tak nol mempunyai invers
    e. Komutatif

Sebagai contoh struktur aljabar yang merupakan lapangan yang sering dijumpai yaitu:

a. ($\mathbb{R}$, +, .) merupakan himpunan bilangan riil terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan riil.
b. ($\mathbb{C}$, +, .) merupakan himpunan bilangan kompleks terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks.
c. ($\mathbb{Q}$, +, .) merupakan himpunan bilangan rasional terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan rasional.

DEFINISI Diberikan himpunan tak kosong *V* bersama dengan suatu operasi $\oplus$ pada *V*. Diberikan suatu lapangan (*field*) ($\mathbb{R}$, +, .). Diberikan suatu operasi perkalian skalar $\odot$: $\mathbb{R} \times V \to V$. Himpunan *V* disebut ruang vektor atas $\mathbb{R}$ terhadap oeprasi perkalian skalar $\odot$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

1. $(\forall u,v\in V)u+v\in V$	6. $\alpha\in\mathbb{R},u\in V\Rightarrow \alpha u\in V$
2. $(\forall u,v\in V)u+v=v+u$	7. $\alpha,\beta\in\mathbb{R},u\in V\Rightarrow(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$
3. $(\forall u,v,w\in V)u+(v+w)=(u+v)+w$	8. $\alpha\in\mathbb{R},u,v\in V\Rightarrow\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$
4. $(\exists\overline{0}\in V)(\forall v\in V)\overline{0}+v=v+\overline{0}=v$	9. $\alpha,\beta\in\mathbb{R},u\in V\Rightarrow\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$
5. $(\forall u\in V)(\exists(-u)\in V)u+(-u)=\overline{0}$	10. $1.u=u$

Contoh:

Buktikan bahwa $\mathbb{R}^2$ merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

<u>Bukti:</u>

1. Ambil sebarang $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ berlaku

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{y_1 + y_2}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^2$$

SIFAT KOMUTATIF

2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$
$$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

SIFAT ASOSIATIF

3. $\left[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right] + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$
$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$
$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$
$$= (x_1, y_1) + \left[(x_2, y_2) + (x_3, y_3)\right]$$

ADA ELEMEN IDENTITAS

4. $\exists \overline{0}, \forall (x_1, y_1)$ berlaku $(x_1, y_1) + \overline{0} = (x_1, y_1)$

$$(x_1, y_1) + \overline{0} = (x_1, y_1)$$

$$\overline{0} = (x_1, y_1) - (x_1, y_1) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1) = (0, 0)$$

Jadi, terdapat $\overline{0} = (0, 0)$ sehingga $(x_1, y_1) + \overline{0} = (x_1, y_1)$.

5. $\forall (x_1, y_1), \exists p \in \mathbb{R}^2$ berlaku $(x_1, y_1) + p = \overline{0}$

ADA ELEMEN INVERS

$$(x_1, y_1) + p = \overline{0}$$

$$(x_1, y_1) + (p, q) = (0, 0)$$

$$p = (0, 0) - (x_1, y_1)$$

$$p = (0 - x_1, 0 - y_1) = (-x_1, -y_1)$$

Jadi, $\forall (x_1, y_1), \exists (-x_1, -y_1)$ berlaku $(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = \overline{0}$

SIFAT 1 – 5 merupakan sifat **GRUP KOMUTATIF** terhadap penjumlah

SIFAT TERTUTUP
Terhadap perkalian
skalar

6. Ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ berlaku

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) \in \mathbb{R}^2$$

7. $(\alpha+\beta)(x_1, y_1) = \left[(\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)y_1\right]$

$$\begin{aligned} &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1) \\ &= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1) \\ &= \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Sifat 7 dan 8
SIFAT DISTRIBUTIF

8. $\alpha\left[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right] = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$\begin{aligned} &= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) \\ &= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) \\ &= \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) \end{aligned}$$

SIFAT ASOSIATIF

9. $\alpha\left[\beta(x_1, y_1)\right] = \alpha(\beta x_1, \beta y_1)$

$$\begin{aligned} &= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta y_1) \\ &= \alpha\beta(x_1, y_1) \end{aligned}$$

10. $1 \cdot (x_1, y_1) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot y_1) = (x_1, y_1)$

SIFAT 6 – 10 merupakan sifat dengan operasi perkalian skalar.

KES: $\mathbb{R}^2$ merupakan **RUANG VEKTOR**.

TUGAS: Selidikilah apakah himpunan berikut membentuk ruang vektor bentuk operasi jumlah dan perkalian yang didefinisikan.

1. Himpunan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ dengan definisi:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

2. Himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan definisi:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y')$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

3. Diberikan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$. Buktikan bahwa $M_2(\mathbb{R})$ merupakan ruang vektor !
4. Buktikan $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

5. Buktikan $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$.
6. Latihan 4.2 halaman 141

TEOREMA:

Jika V ruang vektor atas $\mathbb{R}$:

a. $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
b. $0 \cdot v = \bar{0}, \forall v \in V$
c. $-1 \cdot v = -v, \forall v \in V$
d. $\alpha \cdot v = \bar{0}$, maka $\alpha = 0$ atau $v = 0$

Bukti:

(i) Bukti yang d sebagai latihan

(ii) Ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $v \in$ V, perhatikan

$$\begin{aligned} 1 \cdot v &= v \\ &= (0 + 1) \cdot v \\ &= (0 \cdot v) + (1 \cdot v) \\ &= (0 \cdot v) + v \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} v + (-v) &= \big((0 \cdot v) + v\big) + (-v) \\ \bar{0} &= (0 \cdot v) + (v + (-v)) \\ &= (0 \cdot v) + \bar{0} \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $0 \cdot v = \bar{0}$.

(iii) Sekarang perhatikan

$$\begin{aligned} v + (-1 \cdot v) &= (1 \cdot v) \oplus (-1 \cdot v) \\ &= (1 + (-1)) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \\ &= \bar{0} \\ &= v + (-v) \end{aligned}$$

dengan menggunakan sifat kanselasi dari kiri, maka diperoleh bahwa $(-1 \cdot v) = -v$.

(iv)
$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= \alpha \cdot (v + (-v)) \\ &= \alpha \cdot \big((1 \cdot v) + (-1 \cdot v)\big) \\ &= \alpha \cdot ((1 + (-1)) \cdot v) \\ &= (\alpha . (1 + (-1)) \cdot v \\ &= (\alpha . 0) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

= 0.

SUB RUANG VEKTOR

Definisi:

V ruang vektor, $W \subset V$

W dikatakan sub ruang vektor dari V jika W terhadap operasi yang sama pada V, W membentuk ruang vektor.

Contoh : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$

A sub ruang vektor dari $\mathbb{R}^2$ atau $A \subset \mathbb{R}^2$.

TEOREMA:

V ruang vektor dan $W \subseteq V$, berlaku W subruang vektor dari V jika dan hanya jika:

i) $\forall u, v \in W$ berlaku $u + v \in W$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W$ berlaku $\alpha u \in W$

KUIS:

1. Diberikan

   $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$

   Tentukan apakah B ruang vektor atau bukan?

2. V: himpunan semua fungsi kontinu bernilai real dengan operasi berikut

   f(x) + g(x) = (f+g) (x)

   dan

   $\alpha \cdot f(x) = (\alpha f)(x)$