INTEGRAL DERET

Suatu deret pangkat dapat diintegralkan suku demi suku sepanjang suatu lintasan K yang terletak seluruhnya di dalam lingkaran konvergensinya

$$\int_K \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right] dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_K a_n (z-z_0)^n dz$$

Deret pangkat

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

merepresentasikan fungsi kontinu pada setiap titik interior pada lingkaran ini konvergen. Pada bagian ini, kita akan membuktikan bahwa $S(z)$ sebenarnya analitik pada lingkaran tersebut.

Teorema

diketahui C merupakan garis interior pada lingkaran yang konvergen pada deret pangkat $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, *dan diketahui* $g(z)$ *sebagai fungsi lain yang kontinu di C. Deret tersebut dibentuk dari perkalian dari setiap suku dari deret pangkat dengan* $g(z)$ *dapat diintegralkan suku demi suku atas C sebagai berikut*

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n dz$$

Untuk membuktikan teorema ini, kita perhatikan bahwa selama kedua $g(z)$ dan jumlah $S(z)$ dari deret pangkat kontinu di C, integral atas C

$$g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z)(z-z_0)^n + g(z)\rho_N(z)$$

dimana adanya $\rho_N(z)$ yang merupakan tanda dari sebuah deret yang diketahui setelah n suku. Suku-suku pada jumlahan berhingga disini juga kontinu pada garis C sehingga integral atas C nya ada. Akibatnya integral dari nilai $g(z)\rho_N(z)$ juga harus ada. Dapat dituliskan

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n dz + \int_C g(z)\rho_N(z)dz$$

Ambil M yang merupakan nilai maksimum dari $|g(z)|$ di C dan diketahui L sebagai panjang C. Untuk mengetahui dari konvergen seragam dari deret pangkat yang diketahui, kita tahu bahwa untuk setiap bilangan positif ε terdapat bilangan bulat positif N_ε dimana untuk semua titik z pada C

$$|\rho_N(z)| < \varepsilon \qquad (N > N_\varepsilon)$$

Selama N_ε saling bebas dengan z maka dapat kita temukan

$$\left|\int_C g(z)\,\rho_N(z)dz\right| < M\varepsilon L \qquad (N > N_\varepsilon)$$

maka $\lim_{N\to\infty} \int_C g(z)\,\rho_N(z)dz = 0$

Oleh sebab itu,

$$\int_C g(z)S(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n dz$$

Jadi Teorema terbukti.

Sumber Pustaka:

Brown, J. W., and R. C. Churchill. *"Complex Variables and Applications,"* 7th ed. 2003. New York: McGraw-HillCompanies, Inc.

Paliouras, J. D. "*Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*". 1975. Jakarta: Erlangga