1. KONVERGENSI DERET

Suatu barisan $\{zn\}$ disebut konvergen jika terdapat bilangan Z yang setiap lingkungannya memuat semua. Jika bilangan Z itu ada maka dapat ditulis:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = Z$$

sehingga dapat dikatakan bahwa barisan itu konvergen ke limit Z, atau Z adalah limit dari {zn}. Apabila suatu barisan tidak konvergen maka dinamakan divergen.

Barisan {zn} konvergen jika dan hanya jika terdapat bilangan Z dengan sifat berikut: bila diberikan sembarang $N(Z,\varepsilon)$terdapat bilangan bulat M (yang biasanya bergantung pada besarnya ε) sedemikian sehingga untuk setiap n > M, zn berada di dalam $N(Z,\varepsilon)m$

Deret $\sum z_n$ dikatakan konvergen bila dan hanya bila barisan $\{S_n\}$ yang dibentuk oleh jumlah bagiannya konvergen.

jika : $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ maka deret konvergen ke S yang kemudian dinamakan jumlah (sum) deret tersebut. Jika deret tidak konvergen (jika dan hanya jika barisan jumlah bagiannya divergen) maka ia dikatakan divergen.

contoh:

perhatikan barisan $\left\{\frac{3i}{2^n}\right\} = \left\{\frac{3i}{2}, \frac{3i}{4}, \frac{3i}{8}, \dots\right\}$.

Dari suku-sukunya dibangkitkan barisan lain $\{S_n\}$ yang suku-sukunya didiferensialkan sebagai

$$S_i = \frac{3i}{2}, \quad S_2 = 3i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right), \quad S_3 = 3i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right), \dots \dots$$

Jelas bahwa S_n merupakan jumlah bagian deret.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3i}{2^n} = 3i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right)$$

Deret ini konvergen, sebab bagian dalam kurung pada ruas kanan merupakan deret ukur (geometric) yang suku pertamanya $a = \frac{1}{2}$ dan perbandingannya $r = \frac{1}{2}$. Sehingga didapatkan bahwa deret diatas konvergen ke 3i.

Jika setiap suku deret yang diberikan ditulis dalam bentuk $z_n = x_n + iy_n$, maka kita dapat menulis jumlah bagian S_n dengan:

$$S_n = R(S_n) + I(S_n)i$$

dimana $R(S_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ dan $I(S_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k$

suatu deret sebagai limit barisan jumlah bagiannya dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} [R(S_n) + I(S_n)i]$$

Teorema

Andaikan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *adalah deret dengan jumlah bagian*

$$S_n = R(S_n) + I(S_n)i$$

maka deret itu konvergen jika dan hanya jika barisan $\{R(S_n)\}$ *dan* $\{I(S_n)\}$ *keduanya konvergen.*

teorema

jika suatu deret $\sum z_n$ *konvergen maka untuk* $n \to \infty$, $\lim \quad z_n = 0$.

kontrapositifnya:

andaikan untuk deret $\sum z_n$ *yang diberikan untuk* $n \to \infty$, $\lim \quad z_n \neq 0$ *maka deret itu konvergen.*

Suatu deret dikatakan konvergen mutlak jika dan hanya jika $\sum |z_n|$ konvergen.

Teorema

jika suatu deret konvergen mutlak maka ia konvergen, artinya jika $\sum|z_n|$ *konvergen maka* $\sum z_n$ *konvergen.*

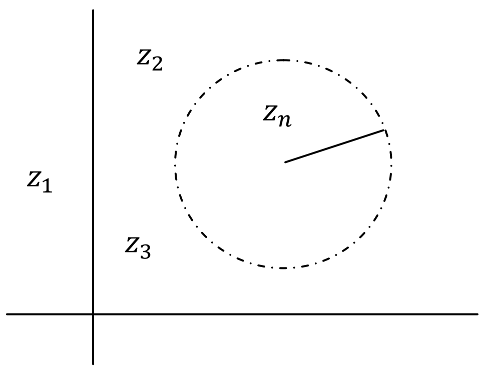
KONVERGEN BARISAN

Sebuah barisan tak terhingga $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ dari bilangan kompleks mempunyai limit z jika setiap bilangan positif ε, terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga $|z_n - z| < \varepsilon$ bilamana $n > n_0$.

Deret $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ paling banyak mempunyai 1 limit. Jika limitnya ada maka sebuah barisan dikatakan konvergen ke z, atau dapat dituliskan sebagai

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Jika sebuah barisan tidak mempunyai limit maka barisan tersebut dikatakan divergen.



Teorema

diasumsikan bahwa $z_n = x_n + iy_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ *dan* $z = x + iy$ *maka*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *dan* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

bukti:

Untuk membuktikan teorema tersebut, pertama-tama kita asumsikan dengan pedoman kondisi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ untuk mendapatkan $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

Berdasarkan kondisi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, untuk setiap bilangan positif ε maka terdapat bilangan bulat n_1 dan n_2 sehingga memenuhi

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad n > n_1$$

dan

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad n > n_2$$

oleh karena itu, jika n_0 lebih besar dari 2 bilangan bulat n_1 dan n_2

$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ dimana $n > n_0$

maka selama

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)|$$

$$\leq |x_n - x| + |y_n - y|,$$

$\leftrightarrow \quad |z_n - z| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad + \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad = \quad \varepsilon$. Jadi terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

Sebaliknya, dapat pula dibuktikan mulai dari kondisi $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Untuk setiap bilangan positif ε maka terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga

$$|z_n - z| \quad < \quad \varepsilon$$

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| \quad < \quad \varepsilon \qquad n > n_0$$

sedangkan

$$|x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|$$

$$|x_n - x| \quad < \quad \varepsilon$$

dan

$$|y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|$$

$$|y_n - y| \quad < \quad \varepsilon$$

Jadi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ untuk $n > n_0$.

sehingga terbukti bahwa

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n$$

Secara umum jika diketahui sebuah deret tak hingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

dari bilangan kompleks, akan konvergen ke jumlahan S jika barisan

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

dari jumlahan parsial konvergen ke S, sehingga dapat dituliskan

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

Selama sebuah barisan mempunyai paling banyak 1 limit, maka sebuah deret juga mempunyai paling banyak 1 jumlahan.

Teorema

Dimisalkan bahwa $z_n = x_n + iy_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ *dan* $S = X + IY$ *maka*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$

persamaan tersebut dapat pula dituliskan dalam bentuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

contoh soal:

barisan $z_n = \frac{1}{n^3} + i \qquad (n = 1, 2, \ldots)$ konvergen ke i

bukti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3} + i\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} + i\lim_{n\to\infty} 1 = 0 + i.1 = i$$

Sumber Pustaka:

Brown, J. W., and R. C. Churchill. *"Complex Variables and Applications,"* 7th ed. 2003. New York: McGraw-HillCompanies, Inc.

Paliouras, J. D. "*Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*". 1975. Jakarta: Erlangga