

KONVERGEN SERAGAM DERET

Suatu deret pangkat yang mempunyai lingkaran konvergensi C :

1. Konvergen seragam pada dan di dalam sembarang lingkaran dalam $DI(C)$.
2. Konvergen ke suatu fungsi yang kontinu pada setiap z di $DI(C)$.
3. Dapat diintegrasikan suku demi suku sepanjang lintasan sembarang dalam $DI(C)$.
4. Konvergen ke suatu fungsi yang analitik pada setiap z di $DI(C)$ dan pada didiferensialkan suku demi suku pada z tersebut.

Deret pangkat $\sum a_n z^n$ dinamakan konvergen seragam pada suatu himpunan E jika dan hanya jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat M sedemikian sehingga

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| < \varepsilon$$

untuk semua $n < M$ dan setiap z di E .

Teorema

Andaikan bahwa deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mempunyai jari-jari konvergensi $\rho > 0$, maka deret konvergen seragam pada dan di sembarang lingkaran $C: |z| = r < \rho$

Teorema

Andaikan bahwa deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mempunyai suatu lingkaran konvergensi C dengan jari-jari $\rho > 0$, maka deret konvergen ke suatu fungsi $f(z)$, yang kontinu pada setiap z dalam $DI(C)$.

Teorema

Andaikan bahwa deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mempunyai lingkaran konvergensi C dengan jari-jari $\rho > 0$, maka deret itu dapat diintegrasikan suku demi suku sepanjang sembarang lintasan K yang terletak di $DI(C)$, ialah:

$$\int_K \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_K a_n z^n dz$$

Teorema

Andaikan bahwa deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mempunyai lingkaran konvergensi C dengan jari-jari $\rho > 0$, maka

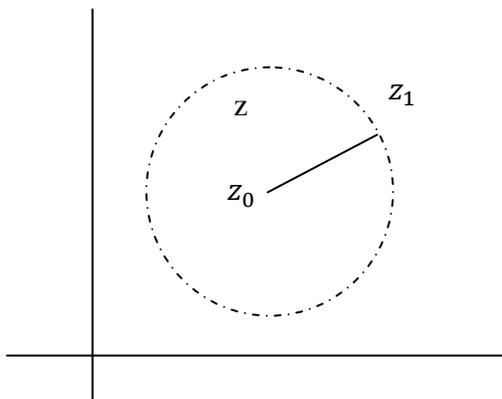
1. deret konvergen ke suatu fungsi $f(z)$ yang analitik di seluruh $DI(C)$.
2. Turunan $f(z)$ diberikan oleh $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} (a_n z^n)$. Jadi deret dapat didiferensialkan suku demi suku di dalam lingkaran konvergensinya.
3. Turunan deret di bagian 2 konvergen seragam ke $f'(z)$ di setiap titik pada dan di dalam sembarang lingkaran T yang konsentris dengan C dan jari-jarinya $r < \rho$.

Teorema

Apabila sebuah deret pangkat

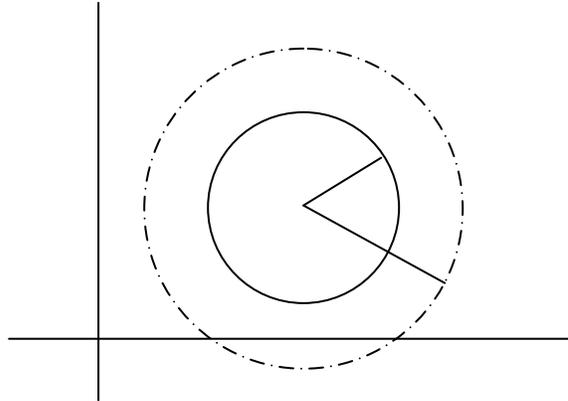
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konvergen ketika $z = z_1$ ($z_1 \neq z_0$) maka ini akan konvergen mutlak pada setiap titik z di persekitaran terbuka $|z - z_0| < R_1$ dimana $R_1 = |z_1 - z_0|$ seperti pada gambar



Teorema

jika z_1 adalah sebuah titik didalam lingkaran yang konvergen $|z - z_0| = R$ dari sebuah deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n$ maka sebuah deret akan konvergen seragam dalam lingkaran / persekitaran tertutup $|z - z_0| \leq R_1$ dimana $R_1 = |z_1 - z_0|$ seperti pada gambar.



Sumber Pustaka:

Brown, J. W., and R. C. Churchill. “*Complex Variables and Applications*,” 7th ed. 2003.
New York: McGraw-HillCompanies, Inc.

Paliouras, J. D. “*Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*”. 1975. Jakarta: Erlangga