MODUL

MATEMATIKA TEKNIK

Disusun oleh:

Dwi Lestari, M.Sc

email: dwilestari@uny.ac.id

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2011

Linear ODES

(Persamaan Differensial Linear Homogen Orde kedua)

Persamaan Linear Ordo kedua

Suatu persamaan differensial ordo-kedua dikatakan linear jika ia dapat dituliskan ke dalam bentuk

(1) $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

Persamaan ini bersifat linear dalam fungsi y yang tidak diketahui dan turunan-turunannya, sedangkan p dan q maupun r di ruas kanan dapat berupa sembarang fungsi dari x. Jika suku pertama adalah misalnya $f(x)y''$, maka kita harus membagi dengan f(x) untuk memperoleh "bentuk baku" (1), dengan y'' sebagai suku pertama.

Jika r(x) ≡ 0 (artinya r(x) = 0 untuk semua x), maka (1) berubah menjadi

(2) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Dan dikatakan homogen jika r(x) ≠ 0, maka (1) dikatakan tidak homogen.

Misalnya :

$$y'' + 4y = e^{-x} \sin x$$

Adalah suatu persamaan differensial linear tak homogen, sedangkan

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

Adalah suatu persamaan differensial linear homogen.

Fungsi p dan q dalam (1) dan (2) disebut koefisien persamaan tersebut.

Persamaan differensial ordo-kedua yang tidak dapat dituliskan kedalam bentuk (1) dikatakan non linear atau tak linear. Sebagai contok non linear adalah $y''y + y' = 0$ dan $y'' = \sqrt{y'^2 + 1}$

Persamaan differensial linear ordo kedua memainkan peranan pokok dalam banyak masalah rekayasa. Kita akan melihat bahwa sebagian persamaan itu sangat sederhana sebab solusinya berupa fungsi elementer. Sebagian lain jauh lebih rumit sebab solusinya berupa fungsi-fungsi penting yang bukan elementer, misalnya fungsi Bessel dan fungsi hipergeometrik.

Contoh 1 Solusi bagi persamaan differensial linear homogen

Fungsi y = cos x dan y = sin x adalah solusi bagi persamaan differensial linear homogen

$$y'' + y = 0$$

Untuk semua x sebab untuk y = cos x

$$(\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0$$

Dan begitu juga untuk y = sin x. Bahkan kita dapat melangkah lebih jauh. Jika kita mengalikan solusi pertama itu dengan sebuah konstanta, misalnya 3, maka hasilnya y = 3 cos x juga merupakan solusi, sebab

$$(3\cos x)'' + 3\cos x = 3((\cos x)'' + \cos x) = 0$$

Kiranya jelas bahwa alih-alih 3 kita dapat menggunakan sembarang konstanta, misalnya -5 atau 2/9. Kita juga bahkan dapat mengalikan cos x dan sin x masing-masing dapat konstanta yang berbeda, misalnya 2 dan -8, dan kemudian menjumlahkan hasilnya sehingga memperoleh

$$y = 2\cos x - 8\sin x$$

Ternyata fungsi ini juga merupakan solusi bagi persamaan homogen kita untuk semua x, sebab

$(2\cos x - 8\sin x)'' + 2\cos x - 8\sin x = 2[(\cos x)'' + \cos x] - 8[(\sin x)'' + \sin x] = 0$ contoh ini mengilustrasikan kenyataan penting bahwa dalam kasus persamaan linear homogen (2), kita dapat memperoleh solusi baru dari solusi yang sudah ada dengan cara mengalikannya dengan konstanta dan dengan cara penjumlahan. Jelas, bahwa ini merupakan keuntungan praktis dan teoritis yang besar, sebab sifat ini memungkinkan kita untuk membangkitkan solusi yang lebih rumit dari solusi yang sederhana. Cara memperoleh solusi yang demikian ini sering disebut **prinsip superposisi**[1] yang secara lengkapnya dapat dinyatakan sebagai berikut.

Teorema dasar 1 bagi persamaan homogen (2)

Jika suatu solusi bagi persamaan differensial linear homogen (2) pada suatu selang I dikalikan dengan suatu konstanta, maka hasilnya juga masih merupakan solusi bagi (2) pada selang I. Jumlah dua solusi bagi (2) pada I juga merupakan solusi bagi (2) pada selang tersebut. Bukti. Misalkan Ø(x) adalah solusi bagi (2) pada selang I selanjutnya akan dibuktikan bahwa y = cØ(x) juga solusi bagi (2) pada I. Jika kita subsitusikan y = cØ(x) kedalam (2), ruas kiri (2) menjadi

$(cØ)'' + p(cØ)' + qcØ = c[Ø'' + pØ' + qØ]$

Karena Ø memenuhi (2) berarti yang didalam tand akurung siku sama dengan nol, dan terbuktilah pernyataan pertama teorema itu. Bukti untuk pernyataan terakhir jug asangat mudah dan disediakan.

Suatu ekspresi yang berbentuk

(3) $Y = c_1y_1 + c_2y_2$ (c_1, c_2 sembarang konstanta)

Disebut kombinasi linear y_1 dan y_2. Dengan menggabungkan kedua pernyataan dalam teorema 1, kita menyimpulkan bahwa kombinasi linear dua solusi bagi (2) pada I juga merupakan solusi bagi (2) pada I.

Contoh 2 Sebuah persamaan differensial linear tak homogen

Subsitusi menunjukkan bahwa kedua fungsi y = 1+cos x dan y = 1 + sin x adalah solusi bagi persamaan differensial linear tak homogen

$$y'' + y = 1$$

Namun kedua fungsi berikut bukan solusi bagi persamaan differensial ini :

$$2(1+\cos x) \quad \text{dan} \quad (1+\cos x)+(1+\sin x)$$

Contoh 3 Sebuah persamaan differensial nonlinear

Subsitusi menunjukkan bahwa kedua fungsi $y = x_2$ dan y = 1 adalah solusi bagi persamaan differensial nonlinear

$$y''y - xy' = 0$$

Namun kedua fungsi berikut bukan solusi bagi persamaan differensial ini :

$-x^2$ dan $x^2 + 1$

Persamaan Bernoulli

(Persamaan Diferensial)

$y' + p(x)y = g(y)y^a$ **(a sembarang bilangan nyata)**

disebut persamaan Bernoulli. Untuk a = 0 dan a = 1, persamaan itu linear; sedangkan untuk a lainnya tidak linear.

Prinsip Bernoulli

Adalah sebuah istilah di dalam mekanika fluida yang menyatakan bahwa pada suatu aliran fluida, peningkatan pada kecepatan fluida akan menimbulkan penurunan tekanan pada aliran tersebut. Prinsip ini sebenarnya merupakan penyederhanaan dari Persamaan Bernoulli yang menyatakan bahwa jumlah energi pada suatu titik di dalam suatu aliran tertutup sama besarnya dengan jumlah energi di titik lain pada jalur aliran yang sama. Prinsip ini diambil dari nama ilmuwan Belanda/Swiss yang bernama Daniel Bernoulli.

Hukum Bernoulli

Dalam bentuknya yang sudah disederhanakan, secara umum terdapat dua bentuk persamaan Bernoulli; yang pertama berlaku untuk aliran tak-termampatkan (incompressible flow), dan yang lain adalah untuk fluida termampatkan (compressible flow).

Aliran Tak-termampatkan

Aliran tak-termampatkan adalah aliran fluida yang dicirikan dengan tidak berubahnya besaran kerapatan massa (densitas) dari fluida di sepanjang aliran tersebut. Contoh fluida tak-termampatkan adalah: air, berbagai jenis minyak, emulsi, dll. Bentuk Persamaan Bernoulli untuk aliran tak-termampatkan adalah sebagai berikut:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konstan}$$

di mana:

v = kecepatan fluida

g = percepatan gravitasi bumi

h = ketinggian relatif terhadap suatu referensi

p = tekanan fluida

ρ = densitas fluida

Persamaan di atas berlaku untuk aliran tak-termampatkan dengan asumsi-asumsi sebagai berikut:

- Aliran bersifat tunak (*steady state*)
- Tidak terdapat gesekan (*inviscid*)

Dalam bentuk lain, Persamaan Bernoulli dapat dituliskan sebagai berikut:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^{\ 2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^{\ 2}$$

Aliran Termampatkan

Aliran termampatkan adalah aliran fluida yang dicirikan dengan berubahnya besaran kerapatan massa (densitas) dari fluida di sepanjang aliran tersebut. Contoh fluida termampatkan adalah: udara, gas alam, dll. Persamaan Bernoulli untuk aliran termampatkan adalah sebagai berikut:

$$\frac{v^2}{2} + \phi + \omega = \text{konstan}$$

di mana:

ϕ = energi potensial gravitasi per satuan massa, jika gravitasi konstan maka $\phi = gh$

ω = entalpi fluida per satuan massa

Catatan: $\omega = \in + \frac{p}{\rho}$, di mana $\in$ adalah energi termodinamika per satuan massa, juga disebut sebagai energi internal spesifik.

Modeling : Free Ocsillations

(Mass Spring System)

A. Pembentukan Model

Misalkan diambil sebuah pegas yang bersifat melawan tekanan maupun regangan. Pegas tersebut digantungkan secara vertikal. Di ujung bawahnya digantungkan sebuah benda dengan massa *m*. Diasumsikan massa benda lebih besar daripada massa pegas, sehingga massa pegas dapat diabaikan. Jika benda ditarik sampai jarak tertentu dan kemudian dilepaskan, maka benda tersebut akan mengalami suatu gerakan tetapi ujung atas pegas selalu tetap. Diasumsikan benda tersebut bergerak vertikal sempurna.

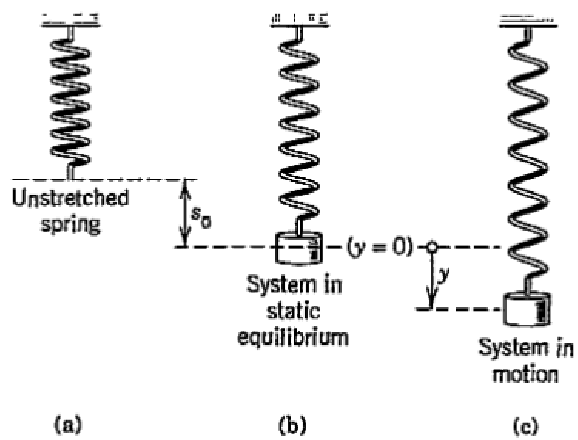


Fig. 32. Mechanical mass–spring system

Akan ditentukan gerakan sistem mekanisnya. Untuk tujuan tersebut, maka perlu memperhatikan gaya-gaya yang bekerja pada benda tersebut ketika bergerak. Hal ini dapat dianalisis menggunakan persamaan diferensial, dan dengan memecahkan persamaan tersebut, akan diperoleh pergeseran *(displacement)* benda tersebut sebagai fungsi waktu. Misal, gaya yang bekerja ke bawah bernilai positif, sedangkan gaya yang bekerja ke atas bernilai negatif. Gaya yang bekerja pada benda tersebut adalah gaya tarik gravitasi, sehingga

$$F_1 = mg \text{.....(1)}$$

Di mana m adalah massa benda dan g (= 980 cm/det^2) adalah percepatan gravitasi. Pada percobaan menunjukkan bahwa dalam batas-batas tertentu, besarnya F_2 sebanding dengan perubahan panjang pegas. Arah gaya F_2 ke atas jika pegas tersebut ditarik ke bawah dan arah gaya ke bawah jika pegas ditekan ke atas. Sehingga,

$$F_2 = -ks \text{ ………(Hukum Hooke) (2)}$$

Di mana s menyatakan pergeseran benda tersebut dan k menyatakan modulo pegas. Tanda minus menyatakan F_2negatif (gaya bekerja ke bawah) untuk s positif (pegas ditarik) dan positif (ke bawah) untuk s negatif (ditekan).

Jika s = 1, maka $F_2 = -k$. Semakin kuat pegas, maka nilai k semakin besar. Ketika benda itu diam, gaya gravitasi dan gaya pegas berada dalam kesetimbangan, sehingga resultannya nol. Maka,

$$F_1 + F_2 = mg - ks_0 = 0 \text{……(3)}$$

Di mana s_0 adalah perpanjangan pegas pada posisi kesetimbangan statik. Pergeseran benda dari posisi kesetimbangan statik (y = 0) dilambangkan dengan $y = y(t)$, dengan arah ke positif (gaya ke bawah). Pergeseran ini, menurut hukum Hooke, menimbulkan suatu gaya tambahan sebesar $-ky$ pada benda tersebut. Dengan demikian, resultan gaya-gaya yang bekerja pada benda tersebut pada posisi $y(t)$ adalah

$$F_1 + F_2 - ky = -ky \text{….(4)}$$

B. Sistem Tak Teredam: Persamaan dan Solusinya

Jika peredaman sistem begitu kecil sehingga dapat diabaikan, maka *persamaan (4)* merupakan resultante semua gaya yang bekerja pada benda itu. Persamaan diferensialnya sekarang dapat diperoleh berdasarkan **hukum kedua Newton**.

$$Massa \times Percepatan = Gaya$$

Yang dimaksud dengan **gaya** ialah semua yang bekerja pada benda tersebut. Di dalam kasus ini, percepatannya adalah $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ sedangkan resultante gaya itu diberikan oleh *persamaan (4)*. Jadi,

$$my'' = -ky$$

Ini berarti gerak sistem ini mengikuti persamaan diferensial linear dengan koefisien konstanta:

$$my'' + ky = 0 \quad .... \textit{persamaan (5)}$$

Diperoleh solusi umum:

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \quad .... \textit{persamaan (6)}$$

Dengan $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Gerak yang mengikuti persamaan ini disebut **osilasi selaras** (*harmonic oscillation*). *Gambar 35* menggambarkan bentuk tipikal *persamaan (6)* untuk pergeseran awal positif tertentu $y(0)$ dan beberapa kecepatan awal $y'(0)$ yang berbeda yang masing-masing menentukan satu nilai B pada *persamaan (6)*. Sehingga dalam *persamaan (6)*, $A = y(0)$ dan $y^{'}(0) = \omega_0 B_6$.

Dengan menerapkan rumus kosinus, dapat diverifikasi bahwa *persamaan (6)* dapat dituliskan sebagai:

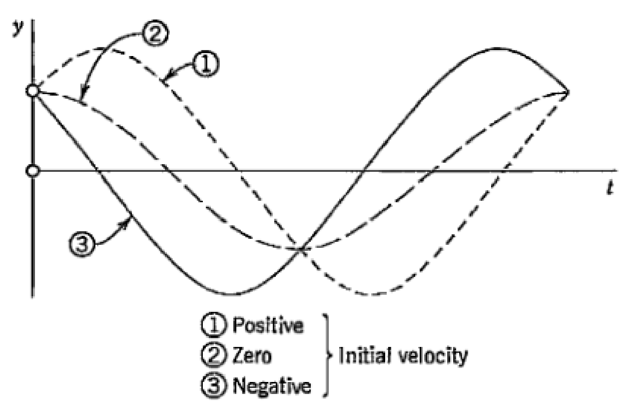


Fig. 33. Harmonic oscillations

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t - \delta)$$

Dengan $\quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$ dan $\tan\delta = \frac{B}{A}$

Karena periode fungsi trigonometrik pada *persamaan (6)* adalah $\frac{2\pi}{\omega_0}$, benda itu mengalami $\frac{\omega_0}{2\pi}$ disebut **frekuensi** osilasi itu dan diukur dalam siklus per detik yang disebut Hertz (Hz).

C. Sistem Teredam: Persamaan dan Solusinya

Jika massa dihubungkan dengan suatu peredam maka harus diperhitungkan pengaruh redaman tersebut. Gaya peredam ini mempunyai arah yang berlawanan dengan gerak saat itu dan diasumsikan bahwa besarnya sebanding dengan kecepatan benda tersebut ($y' = \frac{dy}{dt}$). Hampiran ini biasanya sudah baik, setidaknya untuk lecepatan rendah. Jadi, gaya peredam itu berbentuk:

$$F_3 = -cy'$$

Akan ditunjukkan bahwa *konstanta peredam* c adalah positif. Jika y' positif, benda itu bergerak ke bawah (dalam arah $-y$ positif), sehingga $-cy'$ merupakan suatu gaya ke atas, karena menurut kesepakatan $-cy' < 0$ sehingga $c > 0$. Jika y' negatif, benda bergerak ke atas, sehingga $-cy'$ merupakan suatu gaya ke bawah, jadi $-cy' > 0$, yang berimplikasi $c > 0$.

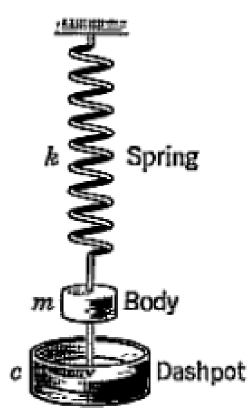


Fig. 35. Damped system

Resultante gaya-gaya yang nekerja pada benda tersebut sekarang adalah:

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - cy'$$

Jadi, berdasarkan **hukum dua Newton**,

$$my'' = -ky - cy'$$

dan dapat dilihat bahwa gerak sistem mekanis teredam ditentukan oleh persamaan diferensial linear yang memiliki koefisien konstan.

$$my'' + cy' + ky = 0 \qquad \text{........... } \textit{persamaan (7)}$$

Persamaan cirinya adalah:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Dengan akar-akarnya:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

Jika

$$\alpha = \frac{c}{2m} \quad \text{dan} \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk} \qquad \text{..........} \textit{persamaan (8)}$$

Maka

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

Bentuk solusi dari *persamaan (7)* akan bergantung pada peredamnya. Terdapat 3 kemungkinan kasus, yaitu:

Kasus I: peredaman lebih

$c^2 > 4mk$ (dua akar nyata λ_1, λ_2 yang berbeda)

Kasus II: peredaman kurang

$c^2 < 4mk$ (dua akar konjugat kompleks)

Kasuss III: peredaman kritis

$c^2 = 4mk$ (dua akar kembar)

D. Kasus I: Peredam Lebih

Bila konstanta peredaman c begitu besarnya sehingga $c^2 > 4mk$, maka λ_1 dan λ_2 merupakan akar nyata yang berbeda. Dengan denikian, solusi umum bagi *persamaan (7)* adalah:

$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t} \qquad \text{......... } \textit{persamaan (9)}$$

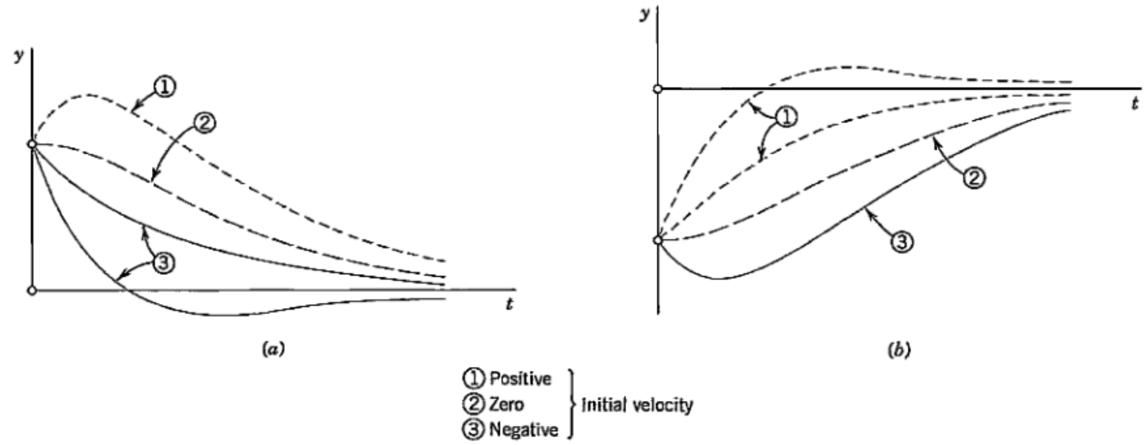


Fig. 36. Typical motions (7) in the overdamped case
(a) Positive initial displacement
(b) Negative initial displacement

Dalam kasus ini benda tidak terisolasi. Untuk $t > 0$, kedua eksponen pada *persamaan (9)* bernilai negatif sebab $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dan $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2$. Dengan demikian, kedua suku pada *persamaan (9)* mendekati nol jika *t* menuju tak hingga. Secara praktis, setelah waktu yang cukup lama massa itu akan berhenti pada posisi kesetimbangan statik ($y = 0$). Hal ini terjadi dikarenakan oleh peredam yang menyerap ebergi dari sistem tersebut.dan tidak ada gaya luar yang membuat sistem itu bergerak. *Gambar 37* memperlihatkan *persamaan (9)* untuk berbagai kondisi awal yang tipikal.

E. Kasus II: Peredam Kritis

Kasus II terjadi jika persamaan karakteristiknya mempunyai akar kembar, yaitu jika $c^2 = 4mk$, maka $\beta = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$. Sehingga sesuai dengan solusi umum $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$…..Persamaan (12).

Solusinya dapat melalui titik equilibrium positif dengan *y* = 0 paling banyak satu kali karena $c_1 + c_2 t$ mempunyai sebanyak-banyaknya satu nilai nol positif. Jika c_1 dan c_2 keduanya positif atau keduanya negatif, maka tidak **mempunyai nilai nol positif, sehingga *y* tidak melewati nol (lihat gambar 37).**

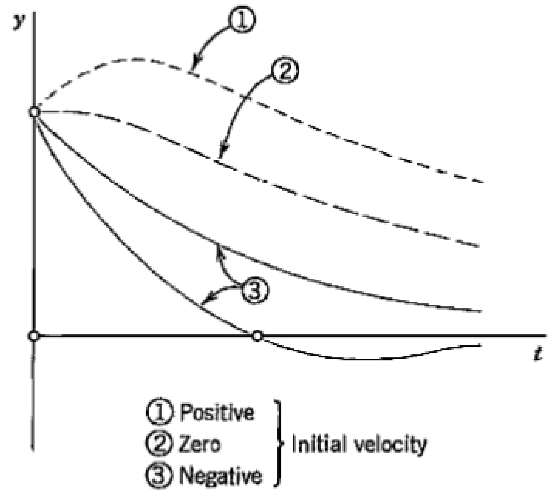


Fig. 37. Critical damping [see (8)]

F. Kasus III : Peredaman Kurang

Jika konstanta peredaman c begitu kecil sehingga $c^2 < 4mk$, maka β pada persamaan (8) merupakan bilangan khayal murni, misalnya

$\beta = i\omega^*$…..Persamaan (10) dengan $\omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\ (> 0)$

Akar-akar persamaan cirinya merupakan konjugat kompleks,

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega^*, \qquad \lambda_2 = -\alpha - i\omega^*$$

dengan $\alpha = c/(2m)$, seperti yang diberikan pada persamaan (8) dan solusi umumnya adalah

$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \delta)$….Persamaan (11)

di mana $C^2 = A^2 + B^2$ dan $\tan\delta = \frac{B}{A}$, seperti dalam persamaan (6^*).

Solusi tersebut menggambarkan osilasi teredam. Kurva solusinya terletak diantara kurva $y = Ce^{-\alpha t}$ dan kurva $y = -Ce^{-\alpha t}$, dalam gambar 38. Menyinggung kedua kurva tersebut bila $\omega^* t - \delta$ merupakan kelipatan π karena $\cos(\omega^* t - \delta)$ terletak antara -1 dan 1.

Frekuensinya adalah $\frac{\omega^*}{2\pi}$ Hz. Dari persamaan (10) dapat dilihat bahwa semakin kecil c (> 0), semakin besar ω^* dan semakin cepat osilasinya. Sementara c mendekati nol, ω^* semakin mendekati $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pada osilasi selaras (persamaan (6)), dan frekuensi $\frac{\omega_0}{2\pi}$ adalah frekuensi asli pada sistem.

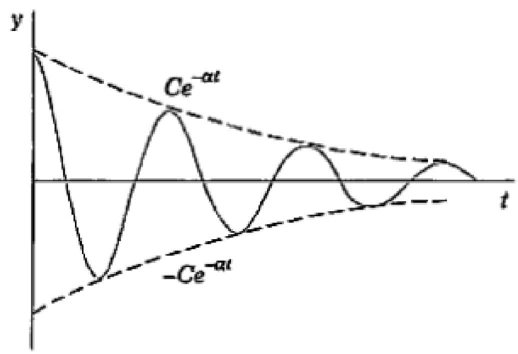


Fig. 38. Damped oscillation in Case Iii [see (10)]

G. Contoh 2:

Bagimanakah gerak dalam contoh 1akan berubah bila sistem tersebut mengalami peredaman yang diberikan oleh :

1. c = 200,0 kg/det
2. c = 100,0 kg/det
3. c = 179,8 kg/det

Penyelesaian :

1. $m = 9{,}082\ kg$ dan $k = 890$ newton/meter

   Model dari masalah ini adalah $9{,}082y'' + 200y' + 890y = 0$

   $$y(0) = 0{,}15\ , y'(0) = 0$$

   Persamaan karakteristiknya : $9{,}082\lambda'' + 200\lambda' + 890\lambda = 0$

   Akar-akarnya : $\lambda_1 = -6{,}190$ dan $\lambda_1 = -15{,}83$

   Maka persamaan umumnya : $y = c_1e^{-6{,}190t} + c_2e^{-15{,}83t}$

   Sehingga : $y' = -6{,}190c_1e^{-6{,}190t} + -15{,}83c_2e^{-15{,}83t}$

   Dari persamaan (9) dan kondisi awal, diperoleh $c_1 + c_2 = 0{,}15$ dan $-6{,}190c_1 - 15{,}83c_2 = 0$

Sehingga diperoleh : $c_1 = 0{,}24$ dan $c_2 = -0{,}09$

Maka solusinya : $y = 0{,}24e^{-6{,}190t} - 0{,}09e^{-15{,}83t}$

Solusinya mendekati nol jika $t \to \infty$. Proses pendekatannya sangat cepat, hanya dalam beberapa detik sudah menjadi nol, artinya bola berhenti.

2. Model dari masalah ini adalah $9{,}082y'' + 100y' + 890y = 0$

   Persamaan karakteristiknya : $9{,}082\lambda'' + 100\lambda' + 890\lambda = 0$

   Akar-akarnya : $\lambda = -5{,}506 \pm 8{,}227i$

   Maka persamaan umumnya : $y = e^{-5{,}506t}(A \cos 8{,}227t + B \sin 8{,}227t)$

   Sehingga :

   $y' = e^{-5{,}506t}(-5{,}506A \cos 8{,}227t - 5{,}506B \sin 8{,}227t - 8{,}227A \sin 8{,}227t + 8{,}227Bcos\ 8{,}227t)$

   Dari persamaan (11) dan kondisi awal diperoleh $A = 0{,}15$ dan $B = 0{,}1004$

   Maka solusinya : $y = e^{-5{,}506t}(0{,}15 \cos 8{,}227t + 0{,}1004 \sin 8{,}227t)$

   Osilasi teredam ini lebih lambat daripada osilasi selaras pada contoh yaitu sekitar 17%

3. Model dari masalah ini adalah $9{,}082y'' + 179{,}8y' + 890y = 0$

   Persamaan karakteristiknya : $9{,}082\lambda'' + 179{,}8\lambda' + 890\lambda = 0$

   Akar-akarnya kembar yaitu $\lambda = -9{,}899$

   Maka persamaan umumnya : $y = (c_1 + c_2t)e^{-9{,}899t}$

   Sehingga : $y' = (c_2 - 9{,}899c_1 - 9{,}899c_2t)e^{-9{,}899t}$

   Dari persamaan (12) dan kondisi awal, diperoleh $c_1 = 0{,}15$ dan $c_2 = 1{,}485$

   Maka solusinya : $y = (0{,}15 + 1{,}485t)e^{-9{,}899t}$

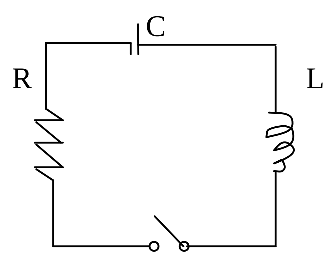
   Nilai y turun dengan cepat menuju nol secara monoton.

Pembentukan Model Rangkaian Listrik

Pada bab ini dikhususkan untuk menelaah sistem mekanis yang mempunyai kegunaan praktis yang besar. Pentingnya sistem mekanis ini nantinya dapat digunakan untuk membangun suatu model listrik. Kita akan memperoleh kaitan di antara sistem mekanis dan listrik yang tidak saja bersifat kualitatif, tetapi juga kuantitatif di dalam pengertian bahwa untuk suatu sistem mekanis yang diberikan kita dapat membangun suatu rangkaian listrik yang arusnya akan memberikan nilai eksak dari pergeseran di dalam sistem mekanis itu bila kita memperkenalkan faktor skala yang cocok. Kegunaan praktis dari analogi di antara sistem mekanis dan listrik seperti itu hampir jelas. Analogi itu mungkin dapat digunakan untuk membangun suatu "model listrik" dari sistem mekanis yang diberikan. Di dalam banyak kasus, hal inii merupakan penyederhanaan yang esensial, sebab rangkaian listrik mudah dirakit, dan arus juga tegangannya mudah diukur, sedangkan konstruksi suatu model mekanis mungkin rumit dan mahal, dan pengukuran pergeseran akan memakan banyak waktu yang kurang teliti.

Membentuk Model

Rangkaian listrik yang paling sederhana adalah rangkaian seri yang sumber tenaga listrik (gaya elektromotoris)nya adalah sebuah generator atau sebuah batere, dan sebuah resistor yang mengggunakan energi misalnya lampu. (Lihat gambar di bawah ini)



Jika saklar ditutup, arus I akan melalui resistor, dan akan menyebabkan perbedaan tegangan yaitu potensial listrik pada kedua ujung resistor berbeda. Perbedaan potensial ini dapat diukur dengan voltmeter. Percobaan menunjukkan bahwa hukum berikut berlaku.

1. Perbedaan tegangan E_R yang melalui resistor sebanding dengan arus I saat itu, yaitu

$$E_R = RI$$

dimana konstanta perbandingan R dinamakan resistansi dari resistor. Arus I diukur dalam satuan ampere, resistansi R dalam ohm, dan tegangan E_R dalam volt

Dua elemen penting lainnya dalam rangkaian yang lebih rumit adalah induktor dan kapasitor. Induktor melawan perubahan arus, mempunyai efek inersia dalam listrik, seperti masa dalam mekanika. Suatu percobaan menghasilkan hukum berikut.

2. Perbedaan tegangan E_L yang melalui induktor sebanding dengan laju perubahan arus I terhadap waktu, yaitu

$$E_L = L\frac{dI}{dt}$$

dimana

konstanta perbandingan L : induktansi dari induktor (henry)

t : waktu (detik).

Kapasitor adalah elemen yang menyimpan energi. Suatu percobaan menghasilkan hukum berikut.

3. Perbedaan tegangan E_L yang melalui kapasitor sebanding muatan listrik Q yang tersimpan dalam kapasitor saat itu, yaitu

$$E_C = \frac{1}{C} Q$$

dimana

C : kapasitansi (farad)

Q : muatan (coulomb)

Karena $I\,(t) = \frac{dQ}{dt}$, hal ini dapat dituliskan $E_C = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt$. Jumlah ketiga tegangan ini sama dengan gaya gerak listrik $E(t)$. Untuk sinusidal $E(t) = E_0 \sin\omega\, t$ (E_0 konstan), hukum ini akan menghasilkan

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = E(t) = E_0 \sin\omega\, t \qquad (1')$$

Untuk mengeluarkan bentuk integral dalam persamaan (1'), kita diferensiasi terhadap t menghasilkan

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = E_0\omega \cos\omega\, t \qquad (1)$$

Sistem Listrik	Sistem Mekanis
Induktansi L	Massa m
Tahanan R	Konstanta redaman c
Kebalikan $1/C$ dari kapasitansi	Modulus pegas k
Turunan $E_0\omega\cos\omega\, t$ dari gaya gerak listrik	Gaya dorong $F_0\omega\cos\omega\, t$
Arus $I(t)$	Pergeseran $y(t)$

Ulasan

Dengan melihat kembali bahwa $I = Q'$, maka kita peroleh $I' = Q''$ dan $Q = \int I\, dt$. Sehingga dari persamaan (1') kita peroleh muatan Q pada kapasitor sebagai persamaan diferensial

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C} Q = E_0 \sin\omega\, t \qquad (1'')$$

Pada sebagian besar masalah praktis, arus $I(t)$ adalah lebih penting dibandingkan dengan $Q(t)$, dan berdasarkan alasan ini kita akan lebih memperhatikan persamaan (1) daripada persamaan (1").

Pembahasan Penyelesaian Persamaan (1)

Untuk memperoleh suatu penyelesaian khusus dari (1) kita dapat bekerja dengan mensubstitusi $I_p(t) = a\,cos\,\omega\,t + b\sin\omega\,t$

ke dalam (1) kita peroleh $a = \frac{-E_0 S}{R^2+S^2}$ $b = \frac{-E_0 R}{R^2+S^2}$

dimana S dinamakan reaktansi, dan rumusnya $S = \omega L$ - $\frac{1}{\omega C}$

Kita dapat menuliskan I_p dalam bentuk $I_p(t) = I_0 \sin\,(\omega t - \theta)$ (2)

dimana $I_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+S^2}}$ dan $tan\theta = -\frac{a}{b} = \frac{S}{R}$

Kuantitas $\sqrt{R^2 + S^2}$ dinamakan impedansi.

Suatu penyelesaian umum dari persamaan homogen yang berkaitan dengan (1) adalah $I_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, dimana λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar dari persamaan karakteristik berikut $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$. Rumus untuk $\lambda_1 = -\alpha + \beta$ dan $\lambda_2 = -\alpha - \beta$ dengan

$\alpha = \frac{R}{2L}$, $\beta = \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$

CONTOH 1. Rangkaian$-RLC$

Carilah arus $I(t)$ dalam suatu rangkaian$-RLC$ dengan $R = 100$ ohm, $L = 0{,}1$ henry, $C = 10^{-3}$farad, yang dihubungkan dengan suatu sumber tegangan $E(t) = 155 sin 377t$ (sehingga 60 $Hz = 60$ gelombang/detik), dengan menganggap muatan dan arus sama dengan nol bila $t = 0$.

Penyelesaian.

Persamaan (1) adalah

$$0.1I'' + 100I' + 1000I = 155.377cos377t.$$

Kita hitung reaktansi $S = 37{,}7 - \frac{1}{0{,}377} = 35$ dan arus tunak

$$I_p(t) = acos377t + bsin377t$$

dimana $a = \frac{-155.35}{100^2+35^2} = -0{,}483$ $b = \frac{-155.100}{100^2+35^2} = 1{,}381$

Kemudian kita selesaikan persamaan karakteristiknya

$$0.1\lambda^2 + 100\lambda + 1000 = 0$$

Akar –akarnya adalah $\lambda_1 = -10$ dan $\lambda_2 = -990$, sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$I(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-990t} - 0{,}483cos377t + 1{,}381sin377t \quad (3)$$

Kita tentukan c_1 dan c_2 dari syarat awal $Q(0) = 0$ dan $I(0) = 0$. Pada substitusi $I(0) = 0$ menghasilkan $I(0) = c_1 + c_2 - 0{,}483 = 0$ (4)

Pada persamaan (1') jika diolah secara aljabar menghasilkan

$I'(t) = \frac{1}{L}\left[E(t) - RI(t) - \frac{1}{C}Q(t)\right]$.

Oleh karena $E(0) = 0,\ I(0) = 0$ dan $Q(0) = 0$, mengakibatkan $I(0) = 0$. Dengan mendiferensialkan persamaan (3) kita peroleh

$$I'(0) = -10c_1 - 990c_2 + 1{,}381.377 = 0 \quad (5)$$

Dari (4) dan (5) diperoleh $c_1 = -0{,}043$ dan $c_2 = 0{,}526$. Jadi dari persamaan (3) kita peroleh penyelesaian $I(t) = -0{,}043e^{-10t} + 0{,}526e^{-990t} - 0{,}483cos377t + 1{,}381sin377t.$ Dua suku yang pertama akan menghilang secara cepat, dan setelah jangka waktu yang sangat pendek, secara praktis arus akan mengalami osilasi harmonik dengan frekuensi $60Hz = 60$ gelombang/detik, yang merupakan frekuensi dari tegangan yang dimasukkan. Perhatikan bahwa menurut (2) kita dapat menuliskan arus tunak di dalam bentuk

$$I_p(t) = 1{,}463\sin\,(377t - 19{,}314)$$

DAFTAR PUSTAKA

Kreyszig, E (1993). *Matematika Teknik Lanjutan Jilid 1*. Jakarta: Penerbit Erlangga