# SUBGRUP

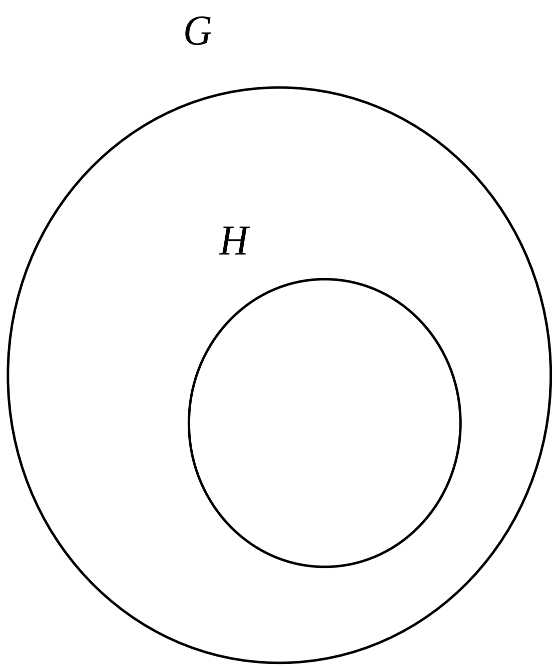

*Dwi Lestari, M.Sc*

*April 2012*

*UNY*

*dwilestari@uny.ac.id*

**Definisi 2.1.1. (Subgrup)** *Diberikan grup* $(G,*)$ *dan himpunan bagian tidak kosong* $H \subseteq G$. *Himpunan H disebut* ***subgrup*** *dari G jika H juga merupakan grup terhadap operasi biner "* $*$ *" yang sama pada grup G, dinotasikan dengan* $H \leq G$.



# Ingat aksioma Grup

1. $\left(\forall a,b\in H\right)a*b\in H$
2. $\left(\forall a,b,c\in H\right)\left(a*b\right)*c=a*\left(b*c\right)$
3. $\left(\exists e\in H\right)\left(\forall a\in H\right)a*e=e*a=a$
4. $\left(\forall a\in H\right)\left(\exists a^{-1}\in H\right)a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

**Contoh 2.1.2.**

1. Grup $(\mathbb{Z},+)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{R},+)$
2. Grup $(\mathbb{Q},+)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{R},+)$
3. Grup $(\mathbb{Z},+)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{Q},+)$

. Setiap grup $G \neq \{e\}$ paling tidak mempunyai dua subgrup, yaitu $H = \{e\}$ dan $H = G$ sendiri. Subgrup $H = \{e\}$ disebut **subgrup trivial**, sedangkan subgrup $H = G$ disebut subgrup tidak sejati. Jika $H$ subgrup dari $G$ dan bukan sama dengan $G$, maka $H$ disebut dengan **subgrup sejati**.

# Ingat aksioma Grup

1. $\left(\forall a,b\in H\right)a*b\in H$
2. $\left(\forall a,b,c\in H\right)\left(a*b\right)*c=a*\left(b*c\right)$
3. $\left(\exists e\in H\right)\left(\forall a\in H\right)a*e=e*a=a$
4. $\left(\forall a\in H\right)\left(\exists a^{-1}\in H\right)a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

# TEOREMA I

**Teorema 2.1.4. (Teorema Subgrup I)** *Diberikan grup* $(G,*)$ *dan* $H$ *suatu himpunan bagian tidak kosong dari* $G$*, maka* $H$ *subgrup dari* $G$ *jika dan hanya jika memenuhi:*

1. $(\forall a,b\in H)\, a*b\in H$
2. $(\exists e\in H)(\forall a\in H)\, a*e=e*a=a$
3. $(\forall a\in H)(\exists a^{-1}\in H)\, a*a^{-1}=a^{-1}*a=e.$

1. $(\forall a,b\in H)\, a*b\in H$
2. $(\forall a,b,c\in H)\,(a*b)*c=a*(b*c)$
3. $(\exists e\in H)(\forall a\in H)\, a*e=e*a=a$
4. $(\forall a\in H)(\exists a^{-1}\in H)\, a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

# Teorema 2

**Teorema 2.1.5. (Teorema Subgrup II)** *Diberikan grup* $(G,*)$ *dan H suatu himpunan bagian tidak kosong dari G, maka H subgrup dari G jika dan hanya jika memenuhi:*

1. $(\forall a,b\in H)\, a*b\in H$
2. $(\forall a\in H)(\exists a^{-1}\in H)\, a*a^{-1}=a^{-1}*a=e.$

# TEOREMA 3

**Teorema 2.1.4. (Teorema Subgrup III)** *Diberikan grup* $(G,*)$ *dan H suatu himpunan bagian tidak kosong dari G, maka H subgrup dari G jika dan hanya jika* $(\forall a,b \in H)\, a*b^{-1} \in H$.

**Contoh 2.1.5.** Diberikan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ grup terhadap operasi penjumlahan matriks. Buktikan bahwa $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

**Jawab:** Jelas bahwa $H \subseteq M_2(\mathbb{R})$ dan $H$ bukan himpunan kosong, sebab $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$.

Diambil sebarang $A, B \in H$, akan dibuktikan bahwa $A + (-B) \in H$. Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, diperoleh bahwa $-B = \begin{pmatrix} -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sehingga

$$A + (-B) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Menggunakan Teorema Subgrup III, terbukti bahwa $H$ subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

**Contoh 2.1.6.** Diberikan grup $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ terhadap operasi penjumlahan modulo 6. Tunjukkan bahwa $S = \{0,1,2,3\}$ bukan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

**Jawab:** Untuk menunjukkan bahwa $S = \{1,2,3\}$ bukan subgrup dari *G*, dapat cukup dengan mencari contoh atau *counter example*, yaitu salah satu aksioma dari definisi subgrup yang tidak dipenuhi. Ada beberapa counter example yang dapat digunakan, yaitu:

1. Tidak memuat elemen identitas, yaitu $0 \notin S$.
2. Tidak bersifat tertutup, yaitu $\exists 2,3 \in S$ sedemikian hingga $2+3=5 \notin S$.
3. Ada elemen dari *S* yang tidak mempunyai invers di *S*, contohnya 2 tidak mempunyai invers di *S*, sebab $\forall a \in S$, $2+a \neq 0$, yaitu $-2=4 \notin S$.

**Contoh 2.1.7.** Diberikan grup $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ terhadap operasi penjumlahan modulo 6. Buktikan bahwa $S = \{0,2,4\}$ subgrup dari $\mathbb{Z}_6$, tetapi $T = \{0,2,3,4\}$ bukan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

| + | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 0 |
| 4 | 4 | 0 | 2 |

| + | 0 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | **<u>5</u>** | 0 |
| 3 | 3 | **<u>5</u>** | 0 | **<u>1</u>** |
| 4 | 4 | 0 | **<u>1</u>** | 2 |

**Latihan 2.1.8.** Diberikan grup permutasi $S_3$.

1. Buktikan bahwa $H = \{(1),(12)\}$ subgrup dari $S_3$.
2. Buktikan bahwa $K = \{(1),(123),(132)\}$ subgrup dari $S_3$.
3. Apakah $T = \{(12),(13)\}$ subgrup dari $S_3$? Jelaskan.
4. Tunjukkan bahwa $T = \{(1),(12),(13)\}$ bukan subgrup dari $S_3$.

**Soal-soal Latihan Subbab 2.1.**