Materi Aljabar Linear Lanjut

TRANSFORMASI LINIER DARI R^n KE R^m;

GEOMETRI TRANSFORMASI LINIER DARI R^2 KE R^2

Disusun oleh:

Dwi Lestari, M.Sc

email: dwilestari@uny.ac.id

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2012

TRANSFORMASI LINIER DARI R^n KE R^m;
GEOMETRI TRANSFORMASI LINIER DARI R^2 KE R^2

Transformasi linear dari R^n ke R^m merupakan transformasi matriks.

Jika $T: R^n \to R^m$ adalah sebarang transformasi linear, maka ada matriks A berukuran $m \times n$ sehingga T adalah perkalian oleh A.

Misalkan $e_1, e_2, \dots, e_n$ adalah basis baku untuk R^n, dan misalkan A adalah matriks $m \times n$ yang mempunyai $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ sebagai vektor-vektor kolomnya.

Jika $T: R^2 \to R^2$ diberikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \\ \uparrow \quad\;\; \uparrow & \\ T(e_1)\; T(e_2) & \end{array}$$

Secara lebih umum, jika

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(e_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(e_1) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \;\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \qquad\quad \uparrow \\ T(e_1)\;\; T(e_2) \;\cdots\; T(e_n) \end{array} \tag{1}$$

Matriks ini dinamakan matriks bentuk baku untuk T. Akan ditunjukkan bahwa transformasi linear $T: R^n \to R^m$ adalah perkalian A.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

Maka karena kelinearan T adalah

$$T(x) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \cdots + x_nT(e_n)(2)$$

Sebaliknya,

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \quad \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \cdots + x_nT(e_n) \qquad (3)$$

Dengan membandingkan (2) dan (3) maka akan menghasilkan $T(x) = Ax$ yakni Tadalah perkalian oleh A. Sehingga dapat dirangkum dalam teorema:

Teorema 5. Jika $T: R^n \to R^m$ adalah *transformasi linear* dan jika $e_1, e_2, \dots, e_n$adalah basis baku untuk R^n, maka T adalah perkalian oleh A, di mana A matriks yang menghasilkan vector kolom $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$.

Contoh 1

Carilah matriks baku untuk transformasi $T{:}R^3 \to R^4$ yang didefinisikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\\x_3\\x_1\end{bmatrix}$$

Pemecahan:

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, T\,(e_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan $T(e_1), T\,(e_2)$, dan $T(e_3)$ sebagai vektor-vektor kolom, maka kita peroleh

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Sebagai pemeriksaan, perhatikanlah bahwa:

$$A\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\\x_3\\x_1\end{bmatrix}$$

sesuai dengan rumus yang diberikan untuk *T*.

Disini kita dihadapkan dengan pertanyaan yang menarik untuk diperhatikan. Anggaplah bahwa kita mengawalinya dengan matriks *A* yang berukuran *n x n*dan kita definisikan $T : R^n \rightarrow R^m$ terhadap perkalian oleh *A*. Dengan bergantung pada **teorema 5**, transformasi linear *T* juga merupakan perkalian oleh matriks baku untuk *T*. Jadi, *T* merupakan perkalian baik oleh *A* maupun $[T(e_1)|T\,(e_2)|\ldots|T(e_n)]$. Bagaimana kedua matriks ini saling berhubungan dengan lainnya? Contoh berikut akan menjawab pertanyaan ini.

Contoh 2

Misalkan $T{:}R^n \rightarrow R^m$ adalah perkalian oleh

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

Carilah matriks baku untuk *T*.

Pemecahan:

Vektor-vektor $T(e_1), T\ (e_2), \ \ldots\ T(e_n)$ adalah vektor-vektor kolom yang berturutan dari A. Misalnya,

$$T(e_1) = A(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks baku untuk T adalah

$$[T(e_1)|T\ (e_2)|\ \ldots\ |T(e_n)] = A$$

Sebagai ikhtisar, maka matriks baku untuk transformasi matriks adalah matriks itu sendiri.

Contoh 2 menyarankan sebuah cara baru untuk memikirkan matriks. Matriks sebarang *A* yang berukuran *m x n* dapat anda tinjau sebagai matriks baku untuk transformasi linear yang memetakan basis baku bagi R^n ke dalam vektor-vektor kolom dari *A*. Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

adalah matriks baku untuk transformasi linear dari R^3ke R^2 yang memetakan

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

secara berurutan ke dalam

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Pada bagian selebihnya dari bagian ini kita akan menelaah sifat geometrik mengenai ***transformasi linear bidang***, yakni, transformasi linear dari R^2 ke R^2. Jika $T: R^2 \to R^2$ adalah transformasi seperti itu dan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

adalah matriks baku untuk *T*, maka:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

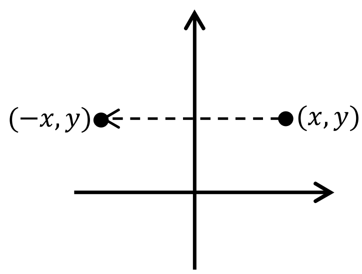
Ada dua tafsiran geometrik dari rumus ini yang sama baiknya. Kita dapat meninjau entri-entri dalam matriks-matriks

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

baik sebagai komponen-komponen vektor maupun sebagai koordinat-koordinat titik. Dengan tafsiran yang pertama, T memetakan panah menjadi panah, dan dengan tafsiran yang kedua, T memetakan titik menjadi titik. Pilihan tersebut hanyalah alternatif bagi anda. Dalam pembahasan berikutnya, kita meninjau transformasi linear bidang sebagai pemetaan titik ke titik.

Contoh 3

Misalkan $T: R^2 \rightarrow R^2$ adalah transformasi linear yang memetakan masing-masing titik ke dalam bayangan simetriknya terhadap sumbu y. Carilah matriks baku untuk T.



Pemecahan:

$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dengan menggunakan $T(e_1)$ dan $T(e_2)$ sebagai vektor-vektor kolom akan kita peroleh matriks baku

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sebagai pemeriksaan, maka

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Sehingga perkalian oleh A akan memetakan titik (x, y) ke dalam bayangan simetriknya $(-x, y)$ terhadap sumbu y.

Terdapat lima jenis transformasi linier bidang yang mempunyai makna khusus: perputaran (rotasi), refleksi, ekspansi, kompresi, dan geseran.

1. **Perputaran (rotasi)**

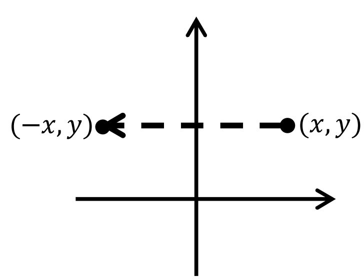
   Jika $T: R^2 \rightarrow R^2$ untuk masing-masing titik dalam bidang terhadap titik asal atau O(0,0) melalui sudut θ, kita dapatkan bahwa matriks baku untuk T adalah

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

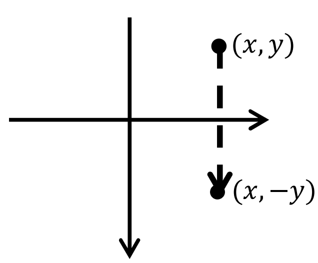
2. **Refleksi**

   Refleksi terhadap sebuah garis *l* melalui titik asal adalah transformasi yang memetakan masing-masing titik pada bidang ke dalam bayangan cerminnya terhadap *l*. Refleksi adalah transformasi linear. Kasus yang paling penting adalah refleksi terhadap sumbu koordinat dan garis $y = x$.

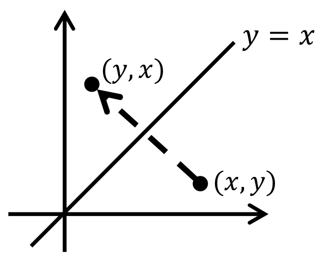
   Refleksi terhadap sumbu y adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



   Refleksi terhadap sumbu x adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



Refleksi terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



3. Ekspansi dan Kompresi

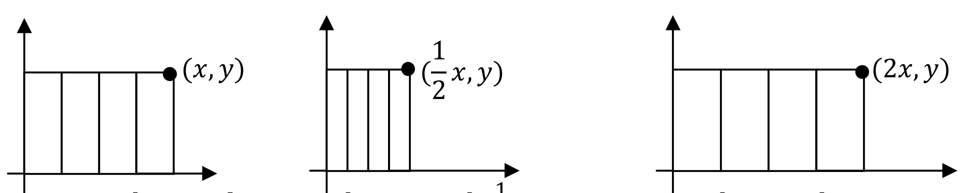
Jika koordinat x dari masing-masing titik pada bidang dikalikan dengan konstanta k yang positif, maka efeknya adalah memperluas atau mengkompresi masing-masing gambar dalam arah x.

Jika :

a. 0 <*k*< 1, maka hasilnya adalah kompresi,

b. *k* > 1, maka hasilnya adalah ekspansi.

Transformasi yang demikian dinamakan ekspansi (atau kompresi) dalam arah x dengan faktor *k*. Demikian juga jika koordinat y dari masing-masing titik dikalikan dengan konstanta *k* positif, maka didapatkan sebuah ekspansi (atau kompresi) dalam arah y dengan fakor *k*. Ekspansi dan kompresi sepanjang sumbu-sumbu koordinat adalah transformasi linear.



Gambar awal kompresi k=$\frac{1}{2}$ ekspansi k=2

Jika T:R^2→R^2 adalah ekspansi atau kompresi dalam arah x dengan faktor*k*, maka

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix} T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Sehingga matriks baku untuk *T* adalah

$$\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Demikian juga matriks baku untuk ekspansi atau kompresi untuk arah *y* adalah

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}$$

4. **Geseran**

Sebuah geseran dalam arah *x* dengan faktor *k* adalah transformasi yang menggerakkan masing-masing titik ***(x, y)*** sejajar dengan sumbu *x* sebanyak *ky* menuju kedudukan yang baru ***(x + ky, y).***

Di bawah transformasi seperti itu, titik-titik pada sumbu ***x*** tidak digerakkan karena ***y = 0***. Akan tetapi, sewaktu kita makin menjauh dari sumbu ***x***, besar ***y*** bertambah, sehingga titik-titik yang lebih jauh dari sumbu ***x*** bergerak sejarak yang lebih besar dari titik-titik yang lebih dekat ke sumbu ***x*** tersebut.

Pergeseran.
Matriks baku

$$A = \begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$$

yang membawa vektor $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ke $\begin{bmatrix}x+ky\\y\end{bmatrix}$

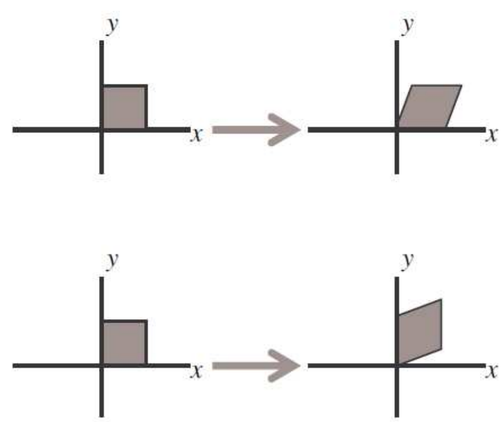
disebut pergeseran dalam arah *x*.

Sejalan dengan itu,

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}$$

membawa vektor $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ke $\begin{bmatrix}x\\y+kx\end{bmatrix}$ dan

disebut pergeseran dalam arah *y*.



Gambar 6.4: Pergeseran dalam arah *x* dan arah *y*

Sebuah **geseran dalam arah *y* dengan faktor *k*** adalah transformasi yang menggerakkan masing-masing titik ***(x, y)*** sejajar dengan sumbu ***y*** sebanyak ***kx*** menuju kedudukan yang baru ***(x, y + kx).***

Di bawah transformasi seperti ini, maka titik-titik pada sumbu ***y*** tetap diam dan titik-titik yang lebih jauh dari sumbu ***y*** bergerak sejarak yang lebih besar dari titik-titik yang lebih dekat ke sumbu ***y*** tersebut.

Dapat kita perlihatkan bahwa geseran adalah transformasi linear. Jika $T: R^2 \rightarrow R^2$adalah searah dengan faktor ***k*** yang mengarah ***x***, maka

T(e$_1$) = T $\left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ **T(e$_2$) =** $\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Sehingga matriks baku untuk T adalah

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Demikian juga, matriks baku untuk geseran dalam arah ***y*** dengan faktor ***k*** adalah:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{k} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Pernyataan.

Perkalian dengan matriks identitas 2×2 memetakan masing-masing titik ke dalam dirinya sendiri. Ini dinamakan transformasi identitas. Jika diperlukan, maka transformasi ini dapat ditinjau sebagai perputaran melalui 0° atau sebagai geseran sepanjang salah satu sumbu dengan k = 0, atau sebagai kompresi atau ekspansi sepanjang salah satu sumbu dengan faktor k = 1.

Jika dilakukan banyak sekali transformasi matriks dari R^n ke R^n secara berurutan, maka hasil yang sama dapat dicapai dengan transformasi matriks tunggal. Contoh berikut akan melukiskan hal ini.

Contoh 4

Misalkan bahwa bidang tersebut diputar melalui sudut θ dan kemudian dipengaruhi oleh geseran yang faktornya *k* dalam arah *x*. Carilah transformasi matriks tunggal yang menghasilkan efek yang sama seperti kedua transformasi yang berurutan tersebut.

Pemecahan:

Dibawah perputaran titik *(x,y)* ditransformasikan ke dalam titik *(x□,y□)* dengan koordinat yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ....(5.10)}$$

Dibawah geseran, titik (x□,y□) ditransformasikan ke dalam titik (x□,y□) ditransformasikan ke dalam titik (x□,y□) dengan koordinat yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ ....(5.11)}$$

Dengan menyulihkan (5.10) ke dalam (5.11) maka akan menghasilkan

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta + \mathrm{k}\ \sin\theta & -\sin\theta + \mathrm{k}\ \cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Jadi, putaran yang diikuti oleh geseran dapat dilakukan oleh transformasi matriks dengan matriks

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + \mathrm{k}\ \sin\theta & -\sin\theta + \mathrm{k}\ \cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ ....(*)}$$

Umumnya, jika transformasi-transformasi matriks

$$T_1(x) = A_1x, \quad T_2(x) = A_2x, \ldots, T_k(x) = A_kx$$

Dari R^n ke R^n dilakukan berurutan (mula-mula T_1, lalu T_2, dan seterusnya), maka hasil yang sama dicapai dengan sebuah transformasi matriks tunggal T(x) = Ax, dimana

$$A = A_k \cdot\cdot\cdot A_2A_1 \text{ ....(5.12)}$$

Perhatikan bahwa urutan yang transformasinya telah dilakukan dapat diperoleh dengan membaca urutan dari kanan ke kiri dalam (5.12).

Contoh 5

a) Carilah transformasi matriks dari R^2 ke R^2 yang mula-mula menggeser dengan faktor sebesar 2 dalam arah x dan kemudian merefleksikannya terhadap y = x.

b) Carilah transformasi matriks dari R^2 ke R^2 yang mula-mula merefleksikannya terhadap y = x dan kemudian menggeser dengan sebuah faktor sebesar 2 dalam arah x.

Pemecahan:

a) Matriks baku untuk geseran adalah

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan untuk refleksi adalah

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

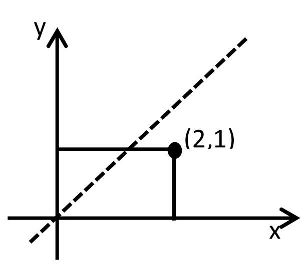
Jadi, matriks baku untuk geseran yang diikuti oleh refleksi adalah

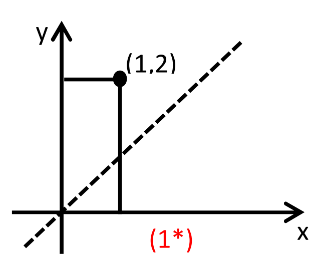
$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

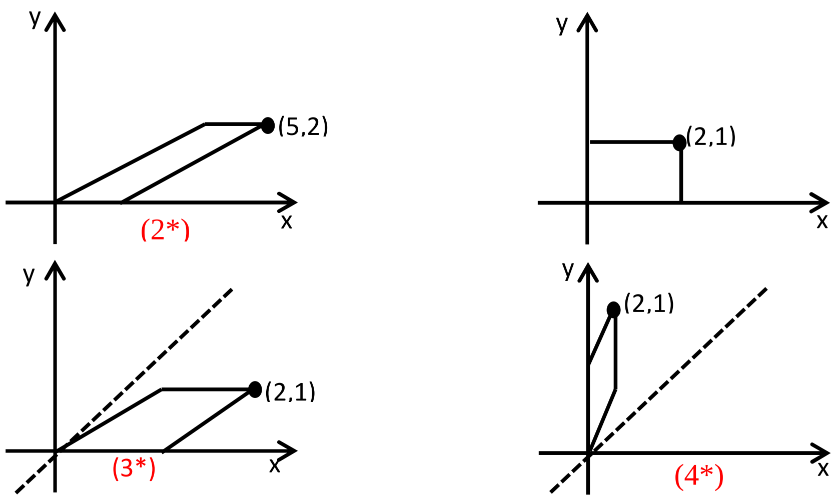
b) Refleksi yang diikuti oleh geseran dinyatakan oleh

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ....(*)}$$

Pada contoh terakhir, perhatikan bahwa $A_1A_2 \neq A_2A_1$, sehingga efek penggeseran dan kemudian merefleksikannya, berbeda dari efek refleksi yang diikuti oleh penggeseran. Ini dilukiskan secara geometris dalam Gambar di bawah ini, dimana kita memperlihatkan efek transformasi pada sebuah segiempat siku-siku.







Keterangan Gambar

(1*) Refleksi terhadap y = x

(2*) Geseran di dalam arah x dengan k = 2

(3*) Geseran di dalam arah x dengan k = 2

(4*) Refleksi terhadap y = x

Contoh 6

Perhatikanlah bahwa jika $T : R^2 \to R^2$ adalah perkalian oleh sebuah *matriks elementer*, maka transformasi tersebut adalah salah satu dari antara yang berikut:

(a) Geseran sepanjang sumbu koordinat.

(b) Refleksi terhadap $y = x$.

(c) Kompresi sepanjang sumbu koordinat.

(d) Ekspansi sepanjang sumbu koordinat.

(e) Refleksi terhadap sumbu koordinat.

(f) Kompresi atau ekspansi sepanjang sumbu koordinat yang diikuti oleh refleksi terhadap sumbu koordinat.

Pemecahan:

Karena matriks elementer 2×2 dihasilkan dengan melakukan operasi baris elementer tunggal terhadap matriks identitas 2×2, maka matriks elementer tersebut harus mempunyai salah satu dari bentuk berikut (buktikan):

Diketahui mariks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ yaitu matriks yang menyatakan geseran sepanjang sumbu koordinat. Kemudian $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ yaitu matriks yang menyatakan refleksi terhadap $y = x$.

Jika $k > 0$, maka matriks $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ menyatakan kompresi atau ekspansi sepanjang sumbu koordinat yang bergantung pada $0 \leq k \leq 1$ atau $k < 0$.

Jika $k < 0$, dan jika kita nyatakan k dalam bentuk $k = -k_1$, dimana $k_1 > 0$, maka kedua matriks tersebut dapat ditulis sebagai berikut;

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

Jika $k > 0$, maka hasil kali dalam matriks $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ menyatakan kompresi atau ekspansi sepanjang sumbu x yang diikuti oleh refleksi terhadap sumbu y, dan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}$ menyatakan komperensi atau ekspansi sepanjang sumbu y yang diikuti oleh refleksi terhadap sumbu x.

Jika di dalam kasus $k = -1$, maka matriks $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}$ adalah refleksi berurutan terhadap sumbu y dan sumbu x.

Misalkan jika $T : R^2 \rightarrow R^2$ adalah perkalian oleh sebuah matriks A ***yang dapat dibalik*** dan misalkan bahwa T memetakan titik (x, y) ke titik $(x^{'}, y^{'})$, maka

$$\begin{bmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{bmatrix}$$

Dari persamaan-persamaan tersebut bahwa jika perkalian A memetakan (x, y) ke $(x^{'}, y^{'})$, maka perkalian A^{-1} memetakan $(x^{'}, y^{'})$ kembali ke kedudukannya yang semula (x, y). Oleh karena itu, maka perkalian oleh A dan perkalian oleh A^{-1} dikatakan sebagai **transformasi-transformasi invers**.

Contoh 7

Jika $T : R^2 \rightarrow R^2$ mengkompresi bidang dengan sebuah faktor sebesar $\frac{1}{2}$ dalam arah y, maka jelaslah secara intuitif bahwa kita harus memperluas bidang tersebut dengan sebuah faktor sebesar 2 dalam arah y untuk memindahkan masing-masing titik kembali ke kedudukannya yang semula. Sesungguhnya demikianlah kasusnya, karena

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ menyatakan kompresi yang faktornya $\frac{1}{2}$ dalam arah y, dan

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ adalah ekspansi yang faktornya 2 dalam arah y.

Contoh 8

Perkalian oleh

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

memutar titik dalam bidang melalui sudut θ. Untuk mengembalikan sebuah titik kembali ke kedudukan semula, maka titik tersebut harus diputar melalui sudut $-\theta$. ini dapatdicapai dengan mengalikannya dengan matriks perputaran

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan identitas, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ dan $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, kita dapat menuliskan kembali sebagai

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Anda dapat membuktikan ini adalah invers dari A.

Kita menyimpulkan bagan ini dengan dua teorema yang menyediakan beberapa masukan ke dalam sifat-sifat geometrik dari transformasi linear bidang.

Teorema6.

JikaT : $\boldsymbol{R^2 R^2 adalahperkalianolehmatriksAyangdapatdibalik, maka}$

$\boldsymbol{efekgeometrikdariT}$ ***sama dengan urutan yang sesuai dari geseran, kompresi, ekspansi,***

Bukti. Karena A dapat dibalik , maka A dapat diredusi pada identitas dengan urutan berhingga dari operasi baris elemter. Sebuah operasi baris elementer dapat dilakukan dengan mengalikan matriks elementer dari kiri, sehingga terdapat matriks-matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, \boldsymbol{E_k}$ sehingga

$$\boldsymbol{E_k \ldots E_2 E_1 A = I}$$

Dengan memecahkannya untuk A akan menghasilkan

$$\boldsymbol{A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} I}$$

Atau secara ekivalen

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1^{-1}\boldsymbol{E}_2^{-1}\ldots\boldsymbol{E}_k^{-1} \qquad \textbf{(5.15)}$$

Pernyataan ini menyatakan *A* sebagai hasil kali matriks-matriks elementer (karena invers dari matriks elementer adalah juga matriks elementer menurut Teorema 11 dari bagian 1.6). hasilnya sekarang diperoleh dari Contoh 6.

Contoh 9

Nyatakanlah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

sebagai hasil kali matriks elementer, dan kemudian jelaskanlh efek geometri dari perkuliahan oleh *A* dalam gesekan, kompresi, ekspansi, dan refleksi.

Pemecahan.

A dapat direduksi pada *I* sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris pertama ke baris kedua	**Kalikan baris kedua dengan $-\frac{1}{2}$.**	**tambahkan-2 kali baris kedua ke baris pertama**

Ketiga operasi baris yang berurutan tersebut dapat dilakukan dengan mengalikan dari sebelah kiri secara berurutan oleh

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan membalik matriks-matriks ini dan dengan menggunakan (5.15) maka akan menghasilkan

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1^{-1}\boldsymbol{E}_2^{-1}\boldsymbol{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan membacanya dari kanan ke kiri dan dengan memperhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka jelaslah bahwa efek *A* akan ekivalen dengan:

1) Geseran oleh faktor sebesar 2 dalam arah *x*,
2) Kemudian mengekspansiannya dengn faktor sebesar 2 dalam arah *y*,
3) Kemudian merefleksikannya terhadap sumbu *x*,
4) Kemudian menggesernya dengan sebuah faktor sebesar 3 dalam arah *y*.

Teorema 7

Jika T: $R^2 \rightarrow R^2$ adalah perkalian oleh matriks yang dapat dibalik, maka:

(a) Bayangan sebuah garis lurus adalah garis lurus

(b) Bayangan sebuah garis lurus melalui titik asal adalah sebuah garis lurus melalui titik asal.

(c) Bayangan garis lurus yang sejajar adalah gari-garis lurus yang sjajar.

(d) Bayangan sebuah segmen garis yang menghubungkn titik P dan Q adalah segmen garis yang menghubungkan bayangan P dan bayangan Q.

(e) Bayangan tiga titik akan terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika titik-tiik tersebut terletak pada garis itu sendiri.

PERNYATAAN.

Jelaslah dari bagian (c), (d), dan (e) bahwa perkalian dengan matriks A yang berukuran 2 × 2 dan yang dapat dibalik memetakan segitiga ke dalam segitiga dan juga memetakan jajaran genjang ke dalam jajaran genjang itu sendiri.

Contoh 10

Gambarlah bayangan sebuah bujur sangkar dengan titik-titik sudut P_1 (0,0), P_2 (1,0), P_3 (0,1) dan P_4 (1,1) di bawah perkalian oleh

$$\square = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pemecahan*:*

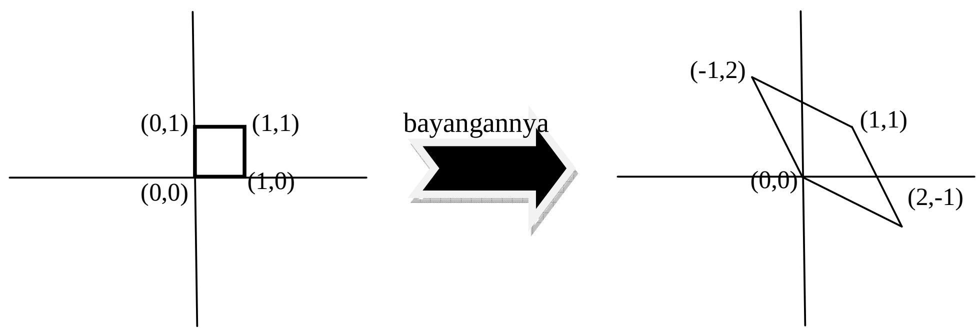
Karena

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka bayangan tersebut adalah sebuah jajaran genjang dengan titik-titik sudut (0,0), (-1,2), (2,-1) dan (1,1)

Adapun gambarnya:



Contoh 11

Menurut teorema 7, matriks yang dapat dibalik

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Memetakan garis y = 2x+1 ke dalam garis lain. Carilah persamaannya.

Pemecahan:

Misalkan (x,y) adalah sebuah titik pada garis y = 2x+1 dan misalkan (x’, y’) adalah bayangannya di bawah perkalian ole A. Maka

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

sehingga

$$x = x' - y'$$

$$y = -2x' + 3y'$$

Dengan mensubstitusikan ke dalam y = 2x + 1 maka akan menghasilkan

$$-2x' + 3y' = 2(x'-y') + 1$$

atau secara ekuivalen

$$y' = \frac{4}{5}x' + \frac{1}{5}$$

Jadi (x’,y’) yang memenuhi

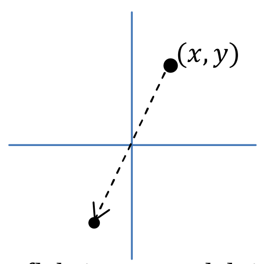
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$$

yang merupakan persamaan yang kita inginkan.

Pembahasan Himpunan Latihan 5.3 (Halaman 255)

1. Pembahasan soal no. 3

   Akan ditentukan matriks baku untuk transformasi linear bidang $T: R^2 \to R^2$ yang memetakan titik (x, y) ke dalam (b) refleksi melalui titik asal.

   Refleksi yang melalui titik asal sama dengan transformasi linear rotasi dengan θ sebesar 180^o dengan pusat $O(0,0)$.

   Matriks baku untuk T adalah

   $$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   Sehingga diperoleh,

   $$\begin{bmatrix} \cos 180^o & -\sin 180^o \\ \sin 180^o & \cos 180^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Pembahasan soal no. 18

   Akan ditentukan bayangan dari gari $y = -4x + 3$ s dengan perkalian oleh $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

   Misal (x, y) adalah titik pada garis $y = -4x + 3$ dan (x', y') bayangan di bawah perkalian oleh A.

   Maka,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x' + 3y' \\ -3x' + 4y' \end{bmatrix}$$

$$-3x' + 4y' = -4(-2x' + 3y') + 3$$

$$16y - 11x - 3 = 0$$

Bayangan dari garis $y = -4x + 3$ dengan perkalian oleh $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ adalah $16y - 11x - 3 = 0$.