LINEARISASI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL PADA MODEL EPIDEMI SIR BERDASARKAN KELOMPOK UMUR

Dwi Lestari[1] and Widodo[2]
[1]) Jurusan Pendidikan Matematika UNY
Email: dwilestari@uny.ac.id
[2]) Jurusan Matematika,
Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia

Abstrak

Model Epidemi SIR berdasarkan kelompok umur berbentuk sistem persamaan diferensial parsial dengan variabel umur dan waktu sebagai variabel bebas. Model ini memiliki distribusi umur *steady state* trivial dan non trivial berbentuk fungsi yang bergantung pada variabel umur. Selain itu, model berbentuk sistem nonlinear sehingga diperlukan linearisasi untuk mengetahui perilaku solusi sistem nonlinear melalui sistem linear. Linearisasi dilakukan dengan deret Taylor ataupun perturbasi di sekitar distribusi umur *steady state*.

Kata kunci: linearisasi, sistem persamaan diferensial parsial.

A. Pendahuluan

Masalah yang dijumpai dalam kehidupan sehari-hari dapat dimodelkan dalam bentuk model matematika. Sebagian besar model matematika yang muncul berbentuk non linear. Untuk mendapatkan solusi masalah yang berbentuk sistem non linear tidaklah mudah. Namun demikian, hal ini tidak menjadi masalah karena bentuk model matematika khususnya yang berbentuk sistem persamaan diferensial non linear dapat dilihat perilaku solusinya melalui sistem persamaan diferensial linear dengan syarat bagian real akar karakteristik tidak nol. Linearisasi dilakukan untuk mendapatkan sistem linear dari sistem non linear.

Pada paper ini akan dibahas mengenai model epidemi berbentuk SIR dengan memperhatikan kelompok umur. Umur dapat diartikan sebagai waktu dari masuk ke dalam kelas populasi rentan (*susceptibles*), kelas terjangkit (*infective*), atau kelas bebas penyakit (*recovered*). Contoh yang relevan adalah pada model penyerapan obat dalam darah. Pemodelan epidemi berdasarkan umur berkaitan dengan model populasi berdasarkan distribusi umur. Beberapa penyakit seperti, cacar air (*measles*), influenza tipe A, kolera, gondong (*mumps*), *tubercoluses*, AIDS, dan SARS penting untuk diperhatikan variabel umur individunya dalam pemodelan penyakit. Dalam hal ini model yang akan dibahas adalah model SIR berdasarkan kelompok umur.

Model Epidemi SIR berdasarkan kelompok umur berbentuk sistem persamaan diferensial parsial dengan variabel umur dan waktu sebagai variabel bebas. Model yang berbentuk sistem non linear tidak mudah diselidiki perilaku solusinya. Oleh sebab itu, perilaku solusi sistem diselidiki melalui bentuk sistem linearnya. Untuk mendapatkan sistem linear dari sistem non linear perlu dilakukan linearisasi. Linearisasi yang dilakukan menggunakan Deret Taylor.

B. Linearisasi Persamaan Diferensial Parsial

Untuk mempelajari perilaku sistem dinamik non linear dilakukan melalui linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Diberikan sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

dengan titik ekuilibrium (a,b); $f(a,b) = g(a,b) = 0$. Pendekatan linear fungsi *f*(*x*,*y*) di sekitar (*a*,*b*) diperoleh dengan menderetkan fungsi *f*(*x*,*y*) sebagai berikut

$$f(x,y) \cong f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \Theta_f \,. \tag{2}$$

Sedangkan Deret Taylor fungsi *g*(*x*,*y*) di sekitar (*a*,*b*) adalah

$$g(x,y) \cong g(a,b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b) + \Theta_g \tag{3}$$

dengan Θ_f dan Θ_g suku-suku non linear yang selanjutnya dapat dihilangkan. Dari (1) dan (2) diperoleh pendekatan linear untuk Sistem (1), yakni

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b) \end{aligned} . \tag{4}$$

Persamaan (4) dapat dituliskan sebagai matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x-a) \\ (y-b) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Substitusi $u = x - a$ dan $v = y - b$ diperoleh persamaan yang lebih sederhana, yaitu

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{6}$$

dengan $J=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix}$ dikenal sebagai matriks Jacobian Sistem (1) pada titik (a,b).

Diberikan $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ variabel bebas dan u merupakan fungsi yang bergantung pada variabel $x_1,x_2,...,x_n$, yakni fungsi $u:\Re^n \to \Re$ dengan $\mathbf{x}\in\Re^n$. Secara umum sistem persamaan diferensial parsial berbentuk

$$\begin{aligned} &F_1(\mathbf{x},u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},u_{x_1x_2},\ldots,u_{x_i\ldots x_n})=0,\\ &F_2(\mathbf{x},u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},u_{x_1x_2},\ldots,u_{x_i\ldots x_n})=0,\\ &\qquad\vdots\\ &F_n(\mathbf{x},u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},u_{x_1x_2},\ldots,u_{x_i\ldots x_n})=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Sistem persamaan diferensial parsial dua variabel orde satu berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial t}=f_1(\mathbf{u})\\ &\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial t}=f_2(\mathbf{u})\\ &\qquad\vdots\\ &\qquad\vdots\\ &\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial t}=f_n(\mathbf{u}). \end{aligned} \tag{8}$$

dengan $\mathbf{u}=(u_1,u_2,...,u_n)$ dan nilai awal $\mathbf{u}_0=(u_{01},u_{02},...,u_{0n})$. Solusi Sistem (8) dengan nilai awal $\mathbf{u}_0=\mathbf{u}(x,t_0)$ dinyatakan sebagai $\mathbf{u}(x,t)=\mathbf{u}(\mathbf{u}_0,x,t)$.

Vektor $\mathbf{u}^*(x)$ disebut distribusi umur *steady state* Sistem (8), jika $\mathbf{u}^*(x)$ memenuhi Sistem berikut.(Brauer, 2008)

$$\begin{aligned} &\frac{du_1^*(x)}{dx}=f_1[\mathbf{u}^*(x)]\\ &\frac{du_2^*(x)}{dx}=f_2[\mathbf{u}^*(x)]\\ &\qquad\vdots \end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{du_n^*(x)}{dx} = f_n[\mathbf{u}^*(x)]$$

Andaikan Sistem (9) dengan nilai awal yang diberikan misal $\mathbf{u}^*(0) = \mathbf{u}^*_0$, memiliki solusi $\mathbf{u}^*(x)$, kestabilan distribusi umur *steady state* tersebut dapat diselidiki dengan melakukan linearisasi Sistem (8).

Selanjutnya, linearisasi sistem persamaan diferensial parsial di sekitar kondisi *steady state* $\mathbf{u}^*(x) = [u_1^*(x), u_2^*(x)]$ sebagai berikut. Diperhatikan dua persamaan awal pada Sistem (8), yakni

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} = f_1(u_1, u_2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = f_2(u_1, u_2). \tag{10}$$

Diberikan transformasi

$\mathbf{v}(x,t) = [v_1(x,t), v_2(x,t)] = [u_1(x,t) - u_1^*(x), u_2(x,t) - u_2^*(x)]$. Dengan mengambil deret Taylor f_1 dan f_2 Sistem (10), diperoleh

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \cong f_1(\mathbf{u}^*) + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\mathbf{u}^*)[u_1 - u_1^*] + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\mathbf{u}^*)[u_2 - u_2^*] + \Theta_1,$$

$$\cong \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\mathbf{u}^*)v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\mathbf{u}^*)v_2,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial t} \cong f_2(\mathbf{u}^*) + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\mathbf{u}^*)[u_1 - u_1^*] + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\mathbf{u}^*)[u_2 - u_2^*] + \Theta_2$$

$$\cong \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\mathbf{u}^*)v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\mathbf{u}^*)v_2,$$

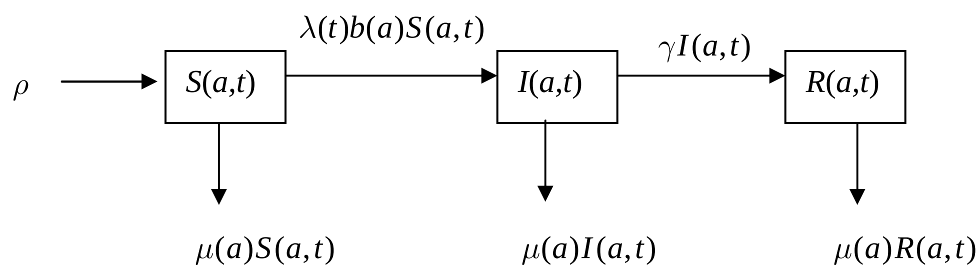
dengan Θ_1, Θ_2 suku suku non linear sehingga dapat diabaikan. Hasil linearisasi Sistem (10), yakni

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\mathbf{u}^*)v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\mathbf{u}^*)v_2$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\mathbf{u}^*)v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\mathbf{u}^*)v_2. \tag{11}$$

C. Model Epidemi SIR Berdasarkan Kelompok Umur

Pembentukan model epidemi SIR didasari oleh adanya penyakit menular yang memiliki masa inkubasi singkat. Misalnya, populasi yang diberikan dibagi ke dalam tiga kelas, yakni kelas populasi rentan (*susceptibles*), kelas populasi terinfeksi (*infectious*), dan kelas populasi bebas penyakit (*recovered*). Perhatikan diagram alir perubahan keadaan suatu populasi akibat adanya penyebaran penyakit.



Gambar 3.1 Bagan Alir Model Epidemi SIR

Kelas populasi yang dibagi menjadi tiga dinotasikan sebagai $S(a,t)$, $I(a,t)$, dan $R(a,t)$ yang merupakan fungsi densitas peluang yang berkaitan dengan kelompok umur. Misalnya, ρ, banyaknya kelahiran, $b(a)$ dan γ parameter yang menggambarkan laju kontak dan laju kesembuhan. Selain itu, β merupakan faktor skala transmisi dan $\mu(a)$ laju kematian yang tidak dipengaruhi oleh penyakit. Pada model ini, laju kontak antara individu rentan berumur a dan satu individu terinfeksi berumur a' sebanding dengan $b(a)b(a')$. Oleh karena itu, didefinisikan laju serangan infeksi pada saat t yakni $\lambda(t)$.

Dalam hal ini, perubahan populasi pada tiap kelas masing-masing bergantung pada variabel waktu t dan umur a. Oleh karena itu, diperoleh sistem integro-diferensial yang berupa sistem persamaan diferensial parsial orde satu. Berdasarkan Asumsi (3.1.1), perubahan populasi menurut Gambar 3.1 dirumuskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial S(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial S(a,t)}{\partial a}=-\lambda(t)b(a)S(a,t)-\mu(a)S(a,t)\,, \qquad (12.a)$$

$$\frac{\partial I(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial I(a,t)}{\partial a}=\lambda(t)b(a)S(a,t)-\left[\gamma+\mu(a)\right]I(a,t)\,, \qquad (12.b)$$

$$\frac{\partial R(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial R(a,t)}{\partial a}=\gamma I(a,t)-\mu(a)R(a,t)\,, \qquad (12.c)$$

$$\lambda(t)=\beta\int_0^\infty b(a')I(a',t)da'\,, \qquad (12.d)$$

$$S(a,0)=S_0(a)\,,\ I(a,0)=I_0(a)\,,\ R(a,0)=R_0(a)\,, \qquad (12.e)$$

$$S(0,t)=\rho=\frac{1}{\int_0^\infty e^{-M(a')}da'}\quad,\ M(a)=\int_0^a\mu(\alpha)d\alpha\,,$$

$$I(0,t)=0,\ R(0,t)=0\,. \qquad (12.f)$$

Persamaan (12.a) – (12.c) menyatakan perubahan populasi rentan, populasi terinfeksi, dan populasi sembuh terhadap umur *a* dan waktu tertentu *t*. Misal, $\frac{\partial S(a,t)}{\partial a}$ menyatakan perubahan populasi rentan yang bertambah umurnya menjadi lebih tua, sedangkan $\frac{\partial S(a,t)}{\partial t}$ menyatakan perubahan populasi rentan terhadap waktu *t*. Oleh karena itu, bisa dianggap bahwa $\frac{\partial S(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial S(a,t)}{\partial a}$ menyatakan laju perubahan populasi rentan terhadap waktu *t*. Persamaan (12.d) merupakan laju serangan infeksi. Persamaan (12) dipandang sebagai masalah nilai awal dan syarat batas, yakni Persamaan (12.e) sebagai syarat awal dan Persamaan (12.f) sebagai syarat batas.

D. Linearisasi Persamaan Diferensial Parsial pada Model Epidemi SIR Berdasarkan Kelompok Umur

Beberapa teknik yang dapat digunakan untuk menganalisa distribusi umur *steady state* yakni dengan linearisasi menggunakan deret Taylor, didefinisikan lebih dahulu

$$S(a,t)=S^*(a)+\xi(a,t)\,, \qquad (13)$$

$$I(a,t)=I^*(a)+\eta(a,t)\,, \qquad (14)$$

$$\lambda(t)=\lambda^*+\theta(t)\,, \qquad (15)$$

dengan $\xi(a,t),\eta(a,t),\theta(t)$ regangan atau *displacement*.

Selanjutnya, Persamaan (13) – (15) disubstitusikan ke Persamaan (12.a) dan (12.b) , diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial \xi(a,t)}{\partial t}&=-\left[\lambda^*+\theta(t)\right]b(a)\left[S^*(a)+\xi(a,t)\right]-\mu(a)\left[S^*(a)+\xi(a,t)\right]\\&=-\lambda^*b(a)S^*(a)-\lambda^*b(a)\xi(a,t)-\theta(t)b(a)S^*(a)\\&\quad-\theta(t)b(a)\xi(a,t)-\mu(a)S^*(a)-\mu(a)\xi(a,t)\\&=-\lambda^*b(a)S^*(a)-\mu(a)S^*(a)-\lambda^*b(a)\xi(a,t)\\&\quad-\theta(t)b(a)S^*(a)-\theta(t)b(a)\xi(a,t)-\mu(a)\xi(a,t)\,.\end{aligned}$$

Karena $-\lambda^*b(a)S^*(a)-\mu(a)S^*(a)=0$ dan $-\theta(t)b(a)\xi(a,t)$ suku non linear, maka diperoleh

$$\frac{\partial \xi(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial \xi(a,t)}{\partial t}=-\lambda^*b(a)\xi(a,t)-\theta(t)b(a)S^*(a)-\mu(a)\xi(a,t)\,.$$

Selanjutnya linearisasi persamaan (12.b),yakni

$$\frac{\partial\eta(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial\eta(a,t)}{\partial t}=\left[\lambda^*+\theta(t)\right]b(a)\left[S^*(a)+\xi(a,t)\right]-\left[\gamma+\mu(a)\right]\left[I^*(a)+\eta(a,t)\right]$$

$$=\lambda^*b(a)S^*(a)+\lambda^*b(a)\xi(a,t)+\theta(t)b(a)S^*(a)$$

$$+\theta(t)b(a)\xi(a,t)-\gamma I^*-\gamma\eta(a,t)-\mu(a)I^*(a)-\mu(a)\eta(a,t)$$

$$=\lambda^*b(a)S^*(a)-\gamma I^*-\mu(a)I^*(a)+\lambda^*b(a)\xi(a,t)+\theta(t)b(a)S^*(a)$$

$$+\theta(t)b(a)\xi(a,t)-\gamma\eta(a,t)-\mu(a)\eta(a,t)\,.$$

Karena $\lambda^*b(a)S^*(a)-\gamma I^*-\mu(a)I^*(a)=0$ dan $\theta(t)b(a)\xi(a,t)$ suku non linear, diperoleh

$$\frac{\partial\eta(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial\eta(a,t)}{\partial t}=\lambda^*b(a)\xi(a,t)+\theta(t)b(a)S^*(a)-\left[\gamma+\mu(a)\right]\eta(a,t)\,.$$

Dari linearisasi Persamaan (12.a) dan (12.b), diperoleh

$$\frac{\partial\xi(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial\xi(a,t)}{\partial t}=-\lambda^*b(a)\xi(a,t)-\theta(t)b(a)S^*(a)-\mu(a)\xi(a,t)\,, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\eta(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial\eta(a,t)}{\partial t}=\lambda^*b(a)\xi(a,t)+\theta(t)b(a)S^*(a)-\left[\gamma+\mu(a)\right]\eta(a,t)\,, \tag{17}$$

dengan

$$\theta(t)=\beta\int_0^\infty b(a)\eta(a,t)da\,, \tag{18}$$

$$\xi(0,t)=\eta(0,t)=0\,, \tag{19}$$

$$\xi(a,0)=S_0(a)-S^*(a)\,,\ \eta(a,0)=I_0(a)-I^*(a)\,. \tag{20}$$

Diasumsikan Persamaan (16) – (18) mempunyai solusi yang bentuknya

$$\xi(a,t)=\hat{\xi}(a)e^{pt}\,, \tag{21}$$

$$\eta(a,t)=\hat{\eta}(a)e^{pt}\,, \tag{22}$$

$$\theta(t)=\hat{\theta}\,e^{pt}\,,\qquad \hat{\theta}\ =\text{konstanta} \tag{23}$$

sehingga dipenuhi persamaan berikut.

$$e^{pt}\frac{\partial\hat{\xi}(a)}{\partial a}+pe^{pt}\frac{\partial\hat{\xi}(a)}{\partial t}=-\lambda^*b(a)\hat{\xi}(a)e^{pt}-\hat{\theta}\,e^{pt}b(a)S^*(a)-\mu(a)\hat{\xi}(a)e^{pt}\,,$$

$$\frac{\partial\hat{\xi}(a)}{\partial a}+p\frac{\partial\hat{\xi}(a)}{\partial t}=-\lambda^*b(a)\hat{\xi}(a)-\hat{\theta}\,b(a)S^*(a)-\mu(a)\hat{\xi}(a)\ \ . \tag{24}$$

dan

$$e^{pt}\frac{\partial \hat{\eta}(a,t)}{\partial a}+pe^{pt}\frac{\partial \hat{\eta}(a,t)}{\partial t}=\lambda^{*}b(a)\hat{\xi}(a,t)e^{pt}+\hat{\theta}(t)e^{pt}b(a)S^{*}(a)-[\gamma+\mu(a)]\hat{\eta}(a,t)e^{pt}$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}(a,t)}{\partial a}+p\frac{\partial \hat{\eta}(a,t)}{\partial t}=\lambda^{*}b(a)\hat{\xi}(a,t)+\hat{\theta}(t)b(a)S^{*}(a)-[\gamma+\mu(a)]\hat{\eta}(a,t)\,. \tag{25}$$

Persamaan (24) dan (25) merupakan masalah nilai eigen *p*. Selanjutnya akan dicari penyelesaiannya pada kondisi *steady state*, yakni

$$\frac{d\,\hat{\xi}(a)}{da}=-\lambda^{*}b(a)\hat{\xi}(a)-\hat{\theta}\,b(a)S^{*}(a)-\mu(a)\,\hat{\xi}(a)\,,$$

$$\frac{d\,\hat{\xi}(a)}{da}+\left[\lambda^{*}b(a)+\mu(a)\right]\hat{\xi}(a)=-\hat{\theta}\,b(a)S^{*}(a)\,, \tag{26}$$

dan

$$\frac{d\,\hat{\eta}(a)}{da}=\lambda^{*}b(a)\hat{\xi}(a)+\hat{\theta}\,b(a)S^{*}(a)-[\gamma+\mu(a)]\hat{\eta}(a)\,,$$

$$\frac{d\,\hat{\eta}(a)}{da}+[\gamma+\mu(a)]\hat{\eta}(a)=\lambda^{*}b(a)\hat{\xi}(a)+\hat{\theta}\,b(a)S^{*}(a)\,. \tag{27}$$

Persamaan (26) dan (27) dengan Syarat batas (19) memiliki penyelesaian

$$\hat{\xi}(a)=-e^{-\int_0^a\left[\lambda^{*}b(\sigma)+\mu(\sigma)\right]d\sigma}\left[\int_0^a\hat{\theta}\,b(\alpha)S^{*}(\alpha)e^{\int_\alpha^a\left[\lambda^{*}b(\sigma)+\mu(\sigma)\right]d\sigma}d\alpha\right]$$

$$=-\rho\,\hat{\theta}\,e^{-\left[\lambda^{*}B(a)+M(a)\right]}\left[\int_0^a b(\alpha)e^{-p(a-\alpha)}d\alpha\right],$$

dan

$$\hat{\eta}(a)=e^{-\int_0^a[\gamma+\mu(\sigma)]d\sigma}\left[\int_0^a\left[\lambda^{*}b(a)\,\hat{\xi}(a)+\hat{\theta}\,b(\alpha)S^{*}(\alpha)\right]e^{\int_\alpha^a[\gamma+\mu(\sigma)]d\sigma}d\alpha\right]$$

$$=e^{-\int_0^a[\gamma+\mu(\sigma)]d\sigma}\left[\int_0^a\left[-\lambda^{*}b(a)\rho\hat{\theta}e^{-\left[\lambda^{*}B(a)+M(a)\right]}\int_0^{a'}b(a')e^{-p(a-a')}da'+\hat{\theta}\,b(\alpha)\rho e^{-\left[\lambda^{*}B(a)+M(a)\right]}\right]e^{\int_\alpha^a[\gamma+\mu(\sigma)]d\sigma}d\alpha\right]$$

$$=\rho\,\hat{\theta}\,e^{-M(a)}\int_0^a b(a')e^{-\left[(p+\gamma)(a-a')+\lambda^{*}B(a')\right]}\left[1-\lambda^{*}\int_0^{a'}b(\alpha)e^{-p(a'-\alpha)}d\alpha\right]da'\,, \tag{28}$$

dengan

$$B(a)=\int_0^a b(\alpha)d\alpha\ ,\ M(a)=\int_0^a \mu(\alpha)d\alpha\ \text{, dan}$$

$$\hat{\theta}=\beta\int_0^\infty b(a)\hat{\eta}(a)da\,. \tag{29}$$

Persamaan (28) disubstitusikan ke Persamaan (29), diperoleh

$$\hat{\theta}=\beta\int_0^\infty b(a)\rho\hat{\theta}\,e^{-M(a)}\left\{\int_0^a b(a')e^{-\left[\gamma(a-a')+\lambda^*B(a')\right]}\left[e^{-p(a-a')}-\lambda^*\int_0^{a'} b(\alpha)e^{-p(a-\alpha)}d\alpha\right]da'\right\}da$$

$$\hat{\theta}-\beta\int_0^\infty b(a)\rho\hat{\theta}\,e^{-M(a)}\left\{\int_0^a b(a')e^{-\left[\gamma(a-a')+\lambda^*B(a')\right]}\left[e^{-p(a-a')}-\lambda^*\int_0^{a'} b(\alpha)e^{-p(a-\alpha)}d\alpha\right]da'\right\}da=0\,,$$

$$\hat{\theta}\left\{1-\beta\int_0^\infty b(a)\rho e^{-M(a)}\left\{\int_0^a b(a')e^{-\left[\gamma(a-a')+\lambda^*B(a')\right]}\left[e^{-p(a-a')}-\lambda^*\int_0^{a'} b(\alpha)e^{-p(a-\alpha)}d\alpha\right]da'\right\}da\right\}=0\,. \tag{30}$$

Persamaan (30) mempunyai akar $\hat{\theta}=0$ atau $\hat{\theta}\neq 0$ jika dipenuhi persamaan karakteristik Lotka untuk *p*, yakni

$$1=\beta\int_0^\infty b(a)\rho e^{-M(a)}\left\{\int_0^a b(a')e^{-\left[\gamma(a-a')+\lambda^*B(a')\right]}\left[e^{-p(a-a')}-\lambda^*\int_0^{a'} b(\alpha)e^{-p(a-\alpha)}d\alpha\right]da'\right\}da \tag{31}$$

Menurut Teorema dalam ([4] dan [5]), jika semua akar Persamaan (31) memiliki bagian real negatif, maka semua solusi Persamaan (21)-(23) menuju nol untuk $t\to\infty$. Dengan menggunakan kriteria ambang batas yang diberikan pada Persamaan (12), untuk $\lambda^*>0$ tidak ada nilai *p* non negatif yang memenuhi Persamaan (31). Untuk mempelajari sifat dari akar–akar Persamaan (31) sangat sulit. Namun demikian, untuk kasus khusus dapat ditentukan secara numerik bahwa hal ini berkorespondensi dengan distribusi umur *steady state* non trivial yang stabil asimtotik lokal.

Untuk distribusi umur *steady state* trivial yakni $\lambda^*=0$, persamaan (31) menjadi

$$1=\beta\int_0^\infty b(a)\rho e^{-M(a)}\left[\int_0^a b(a')e^{-\gamma(a-a')-p(a-a')}da'\right]da\,. \tag{32}$$

Jika Persamaan (12) tidak dipenuhi, maka karakter monoton dari integran pada Persamaan (32) berakibat mempunyai akar real tunggal $p_0\leq 0$ dan $p_0=0$ hanya pada kriteria ambang batas.

Teorema 1

(i) *Jika* $\lambda^* = 0$ *dan* $R_0 \leq 1$ *maka distribusi umur steady state trivial Sistem* (12) *stabil asimtotik lokal.*

(ii) *Jika* $\lambda^* = 0$ *dan* $R_0 > 1$*, maka tidak stabil.*

Bukti: Lihat [3]

E. Penutup

Pada sistem persamaan diferensial nonlinear dapat diselidiki perilaku solusinya melalui sistem linear dengan linearisasi. Proses linearisasi dapat dilakukan dengan Deret Taylor dari fungsi non linear. Model epidemi SIR berdasarkan kelompok umur berbentuk sistem persamaan diferensial parsial non linear. Linearisasi dilakukan untuk mendapatkan sistem linear sehingga dapat diselidiki perilaku solusi sistem non linear melalui sistem linear dengan syarat titik ekuilibrium berupa titik ekuilibrium hiperbolik.

F. Daftar Pustaka

[1] Brauer F., dkk, 2008, *Mathematical Epidemiology*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.

[2] Chavez, dkk, 1989, *Epidemiological Models with Age Structure, Proportionate Mixing, and Cross- immunity*, Journal of Mathematical Biology 27: 233-258.

[3] D Lestari. 2010. Model Epidemi SIR Berdasarkan Kelompok Umur. *Thesis*. UGM, Yogyakarta.

[4] Olsder, G.J., 1994, *Mathematical Systems Theory*, Delftse Uitgevers Maatschappij, b.v.

[5] Wiggins, 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.

[6] Zauderer, E. 1989. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, JohnWiley and Sons, Inc, New York.