MODEL PELATIHAN ULANG (*RETRAINING*) PEKERJA PADA SUATU PERUSAHAAN BERDASARKAN PENILAIAN REKAN KERJA

Dwi Lestari
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Yogyakarta
E-mail: dwilestari@uny.ac.id

ABSTRAK

Pada paper ini akan dibahas mengenai model pelatihan ulang untuk pekerja di suatu perusahaan. Untuk meningkatkan kualitas pekerja biasanya diadakan pelatihan (*training*) untuk pekerja terutama pekerja baru atau pekerja yunior. Namun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya pelatihan ulang untuk para pekerja yang semangatnya menurun. Kondisi tersebut menjadi salah satu dasar dalam merumuskan model pelatihan ulang untuk pekerja di suatu perusahaan.

Model matematika untuk pelatihan ulang yang dibahas merupakan model pelatihan ulang untuk pekerja berdasarkan penilaian rekan kerjanya. Model ini berbentuk sistem persamaan diferensial. Pada model ini terdapat dua titik ekuilibrium yakni titik ekuilibrium trivial dan titik ekuilibrium non trivial. Kestabilan lokal titik ekuilibrium trivial dipenuhi saat kondisi nilai bilangan reproduksi dasarnya kurang dari satu. Ini berarti untuk waktu yang lama pekerja baik tidak perlu menjadi pekerja master sehingga tidak dilakukan pelatihan ulang. Simulasi numerik diberikan dengan mengambil nilai parameter tertentu yang menggambarkan perubahan besarnya populasi masing-masing kelas terhadap suatu waktu.

Kata Kunci: model pelatihan, sistem persamaan diferensial, kestabilan lokal

ABSTRACT

In this paper, its discussed about the model re-training for workers in a company. To improve the quality of workers is usually held training (training) for workers, especially new workers or junior employees. However it is also the possibility of retraining for workers who decline spirit. The condition was one of the bases in formulating a model of retraining for workers in a company.

Mathematical models for retraining discussed is a model re-training for workers based on an assessment of his colleagues. This model is shaped system of differential equations. In this model there are two equilibrium points namely the trivial equilibrium point and non-trivial equilibrium point. Local stability of the trivial equilibrium point of time fulfilled the conditions of the reproductive number is essentially less than one. This means that for a long time a good worker does not need to be a master so that workers do not re-training. Numerical simulation is given by taking the value of certain parameters that describe the changes in population size of each class of a time.

Keywords: training models, differential equations system, local stability

Pendahuluan

Suatu perusahaan memiliki aturan-aturan atau sistem yang berlaku di dalamnya. Sistem tersebut dibuat dan diberlakukan untuk seluruh komponen dalam perusahaan. Adapun komponen suatu perusahaan meliputi: pimpinan perusahaan, karyawan/pekerja dan penanam modal. Pada paper ini akan dibahas mengenai interaksi antara pekerja senior dengan pekerja yunior. Untuk meningkatkan kualitas pekerja biasanya diadakan pelatihan (*training*) untuk pekerja terutama pekerja baru atau pekerja yunior. Namun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya pelatihan ulang untuk para pekerja yang semangatnya menurun. Kondisi tersebut menjadi salah satu dasar dalam merumuskan model pelatihan ulang untuk pekerja di suatu perusahaan.

Model matematika untuk pelatihan ulang yang dibahas merupakan model pelatihan ulang untuk pekerja berdasarkan penilaian rekan kerjanya. Populasi pada model yang dibahas dibagi dalam lima kelas yakni, pekerja enggan/semangat kerja kurang, pekerja bagus/baik, pekerja master, pekerja kurang baik/pekerja yang dapat diganti, dan pekerja tidak aktif. Pada model ini akan diselidiki kondisi setimbangnya dimana kontak terjadi antara pekerja bagus/baik dengan pekerja master. Ada laju pekerja yang keluar di setiap kelas. Selanjutnya simulasi diberikan untuk memberikan gambaran perubahan banyaknya pekerja di masing-masing kelas dari waktu ke waktu. Beberapa asumsi berikut yang diperlukan untuk membentuk model pelatihan ulang pekerja.

Asumsi:

1. banyaknya pekerja pada saat t konstan
2. laju keluar pekerja di tiap kelas
3. peluang masuk menjadi pekerja dikelompokkan menjadi dua kelas: pekerja bagus dan pekerja enggan/semangat kerja kurang.
4. populasi pekerja yang dibahas disini merupakan populasi tertutup, artinya populasi pekerja pada usia produktif untuk bekerja.

Notasi:

$R(t)$: reluctant workers (pekerja enggan/semangat kerja kurang)

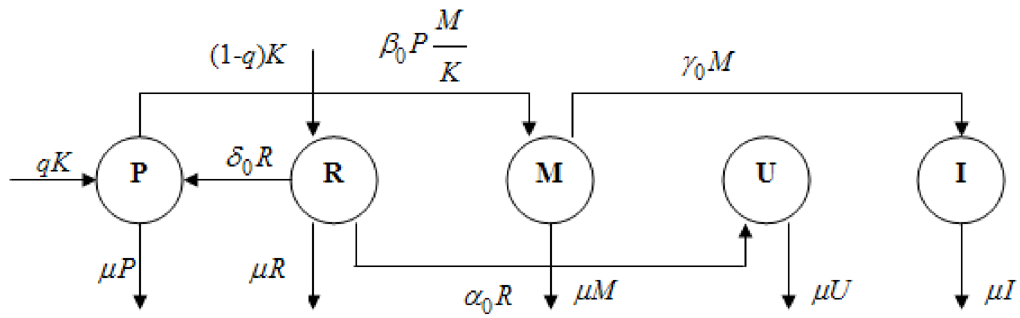
$P(t)$: positive workers (pekerja bagus/baik)

$M(t)$: master workers (pekerja master)

$U(t)$: unchangeable workers (pekerja kurang baik/ yang dapat diganti)

$I(t)$: inactive workers (pekerja tidak aktif)

Diasumsikan banyaknya pekerja $N(t) = R(t)+P(t)+M(t)+U(t)+I(t) = K$, konstan untuk setiap waktu t.



Gambar 1. Diagram Alir Model

Parameter yang digunakan dalam model ini adalah sebagai berikut,

Parameter:

- q: probabilitas menjadi pekerja yang baik
- μ : laju keluar pekerja tiap kelas
- β_0 : laju kontak pekerja baik menjadi pekerja master
- δ_0 : laju pekerja enggan menjadi pekerja baik
- α_0 : laju pekerja enggan menjadi pekerja yang dapat diganti

Nilai $0 \le q \le 1, \mu_0$, β_0, δ_0, dan α_0 konstan.

Model:

$$\frac{dP}{dt} = qK - \beta_0 P \frac{M}{K} + \delta_0 R - \mu P \qquad (1.a)$$

$$\frac{dR}{dt} = (1-q)K - (\delta_0 + \mu)R - \alpha_0 R \qquad (1.b)$$

$$\frac{dM}{dt} = \beta_0 P \frac{M}{K} - (\gamma_0 + \mu)M \qquad (1.c)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\mu U + \alpha_0 R \qquad (1.d)$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma_0 M - \mu I. \qquad (1.e)$$

Selanjutnya, model pada sistem (1) disederhanakan menjadi:

$$\frac{dP}{d\tau} = qc - \beta P \frac{M}{K} + \delta R - P \qquad (2.a)$$

$$\frac{dR}{d\tau} = (1-q)c - (\alpha + \delta + 1)R \qquad (2.b)$$

$$\frac{dM}{d\tau} = \beta P \frac{M}{K} - (\gamma + 1)M \qquad (2.c)$$

$$\frac{dU}{d\tau} = -U + \alpha R \qquad (2.d)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = \gamma M - I, \qquad (2.e)$$

dengan

$$c=\frac{K}{\mu},\quad \delta=\frac{\delta_0}{\mu},\quad \alpha=\frac{\alpha_0}{\mu},$$

$$\beta=\frac{\beta_0}{\mu},\quad \gamma=\frac{\gamma_0}{\mu},\quad \tau=\mu t$$

Sistem (2) dapat direduksi berdasarkan

$N(t) = R(t)+P(t)+M(t)+U(t)+I(t)$,

yakni substitusi $P = N - R - M - U - I$, menjadi

$$\frac{dR}{d\tau}=(1-q)c-(\alpha+\delta+1)R \qquad (3.a)$$

$$\frac{dM}{d\tau}=\beta(N-R-M-U-I)\frac{M}{K}-(\gamma+1)M \qquad (3.b)$$

$$\frac{dU}{d\tau}=-U+\alpha R \qquad (3.c)$$

$$\frac{dI}{d\tau}=\gamma M-I \qquad (3.d)$$

$$\frac{dN}{d\tau}=c-N. \qquad (3.e)$$

Didefinisikan

$$T=\left\{(R,M,U,I,N)\in\Re_+^6 : 0\le R+M+U+I\le N\le\frac{K}{\mu}\right\}$$

himpunan tertutup dimana sistem (3) terdefinisi. Selanjutnya akan dibahas mengenai eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium.

Titik ekuilibrium trivial dan non trivial

Titik ekuilibrium model ini ada dua yakni titik ekuilibrium trivial dan non trivial. Titik ekuilibrium trivial artinya tidak ada pekerja master sehingga tidak ada pelatihan ulang. Titik ekuilibrium non trivial artinya ada pekerja master sehingga ada pelatihan ulang.

Teorema 1:

Jika $R_0<1$ *dan* $q=1$, *maka terdapat titik ekuilibrium trivial* $E_0=(R,M,U,I,N)=\left(0,0,0,0,\frac{K}{\mu}\right)$. *Jika* $R_0>1$, *maka terdapat titik ekuilibrium non trivial* $E_1=\left(R^*,M^*,U^*,I^*,N^*\right)$.

Bukti:

Titik ekuilibrium trivial diperoleh dengan membuat ruas kanan (3.a,c,d,e) sama dengan nol dan diasumsikan $q = 1$, diperoleh

$$N=c,\quad I=\gamma M,$$

$$R=\frac{(1-q)c}{\alpha+\delta+1},\quad U=\frac{\alpha(1-q)c}{\alpha+\delta+1}\cdot \qquad (4)$$

Disubtitusikan Persamaan (4) ke Persamaan (3b), diperoleh

$$\beta(N-R-M-U-I)\frac{M}{K}-(\gamma+1)M=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(c-\frac{(1-q)c}{\alpha+\delta+1}-M-\frac{\alpha(1-q)c}{\alpha+\delta+1}-\gamma M\right)\frac{M}{K}$$

$$-(\gamma+1)M=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+\gamma}{K}\right)\beta M^2+\left(\frac{\beta}{K}\left(\frac{(1-q)(1+\alpha)c}{\alpha+\delta+1}-c\right)+\gamma+1\right)M=0$$

$\Leftrightarrow M=0$ atau

$$M=-\frac{K(1-q)(1+\alpha)}{\mu(\gamma+1)(\alpha+\delta+1)}+\frac{K}{\mu(\gamma+1)}-\frac{K}{\beta}.$$

Nilai

$$M=-\frac{K(1-q)(1+\alpha)}{\mu(\gamma+1)(\alpha+\delta+1)}+\frac{K}{\mu(\gamma+1)}-\frac{K}{\beta}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{\mu}\cdot\frac{(\alpha+\delta+1)-(1-q)(1+\alpha)}{(\gamma+1)(\alpha+\delta+1)}>1.$$

Selanjutnya didefinisikan bilangan reproduksi dasar R_0, yakni

$$R_0=\frac{\beta}{\mu}\cdot\frac{(\alpha+\delta+1)-(1-q)(1+\alpha)}{(\gamma+1)(\alpha+\delta+1)}$$

sehingga

$$M=\begin{cases}0 & ,R_0\le 1\\ -\frac{K(1-q)(1+\alpha)}{\mu(\gamma+1)(\alpha+\delta+1)}+\frac{K}{\mu(\gamma+1)}-\frac{K}{\beta} & ,R_0>1\end{cases}$$

.

Jika diambil $M=0$ dan q = 1, diperoleh $R=U=I=0,\quad N=c=\frac{K}{\mu}$. Jadi titik ekuilibrium trivialnya adalah $E_0=\left(0,0,0,0,\frac{K}{\mu}\right)$.

Jika $M>0$ yakni

$$M^*=-\frac{K(1-q)(1+\alpha)}{\mu(\gamma+1)(\alpha+\delta+1)}+\frac{K}{\mu(\gamma+1)}-\frac{K}{\beta},$$

diperoleh

$$N^*=\frac{K}{\mu},$$

$$I^*=\gamma M^*$$

$$=-\gamma\frac{K(1-q)(1+\alpha)}{\mu(\gamma+1)(\alpha+\delta+1)}+\gamma\frac{K}{\mu(\gamma+1)}-\gamma\frac{K}{\beta},$$

$$R^*=\frac{K(1-q)}{\mu(\alpha+\delta+1)},\quad U^*=\frac{\alpha(1-q)K}{\mu(\alpha+\delta+1)}.$$

Jadi, titik ekuilibrium non trivialnya adalah $E_1=\left(R^*,M^*,U^*,I^*,N^*\right)$.

Kestabilan Titik Ekuilibrium Trivial

Kestabilan untuk titik ekuilibrium trivial diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2:

Jika R_0<1 dan q=1, maka titik ekuilibrium trivial $E_0=\left(0,0,0,0,\frac{K}{\mu}\right)$ *stabil asimtotik lokal. Jika R_0 > 1, maka titik ekuilibrium* *non trivial* $E_1 = \left(R^*, M^*, U^*, I^*, N^*\right)$ *stabil asimtotik lokal*.

Bukti:

Matrik Jacobian dari sistem (3) adalah

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\delta+1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta M}{K} & -\frac{2\beta M}{K} + \frac{\beta}{K}(N-R-U-I)-(\gamma+1) & -\frac{\beta M}{K} & -\frac{\beta M}{K} & -\frac{\beta M}{K} \\ \alpha & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga matrik Jacobian disekitar titik ekuilibrium $E_0 = \left(0,0,0,0,\frac{K}{\mu}\right)$, sebagai berikut

$$J\left(E_0\right) = \begin{bmatrix} -(\alpha+\delta+1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\beta}{\mu}-(\gamma+1) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Persamaan karakteristik dari Persamaan (5) diperoleh dari $\left|\lambda I - J\left(E_0\right)\right| = 0$, yakni

$$\left(\lambda + (\alpha+\delta+1)\right)\left(\lambda - \left(\frac{\beta}{\mu} - (\gamma+1)\right)\right)(\lambda+1)^3 = 0$$

dengan akar-akarnya adalah

$$\lambda_1 = -(\alpha+\delta+1) < 0,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1 < 0,$$

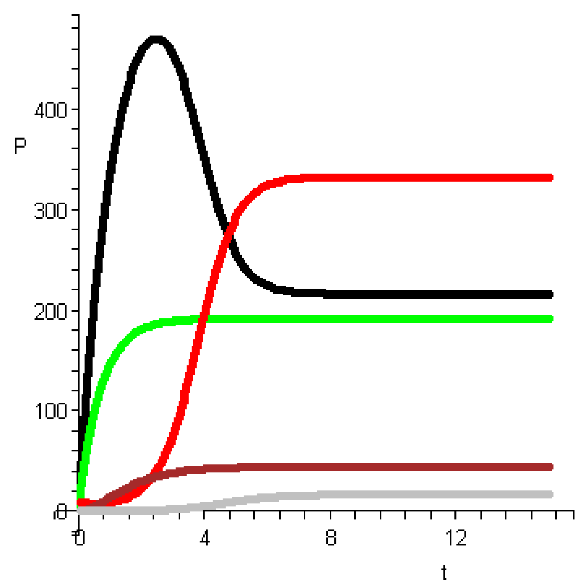
$$\lambda_5 = \frac{\beta}{\mu} - (\gamma+1) < 0 \Leftrightarrow \beta < \mu(\gamma+1).$$

Menurut teori kestabilan, karena akar karakteristik yang diperoleh bernilai negatif, maka titik ekuilibrium $E_0 = \left(0,0,0,0,\frac{K}{\mu}\right)$ stabil asimtotik lokal.

Hal ini berarti, dalam waktu yang lama pekerja baik tidak perlu menjadi pekerja master sehingga tidak dilakukan pelatihan ulang. Untuk melihat perubahan banyaknya populasi pekerja akan diberikan simulasi berikut.

Simulasi Numerik

Perubahan dari jumlah populasi dalam model yang dibahas dapat dilihat dari simulasi numerik yang diberikan berikut ini.



Gambar 2. Banyaknya Populasi untuk Waktu t

Simulasi diperoleh dengan mengambil nilai-nilai tertentu untuk parameter yang diperlukan, yakni

```
K:=100;mu:=0.125;q:=0.65;beta:=0.486;delta:=0.231;c:=K/mu;alpha:=0.231;gama:=0.05;hours:=15;initP:=0;initR:=0;initM:=10;initU:=0;initQ:=0;
```

Keterangan:

Hitam : pekerja baik P(t)

Hijau : pekerja kurang baik R(t)

Merah : pekerja master atau senior M(t)

Coklat : pekerja yang dapat diganti U(t)

Abu-abu : pekerja tidak aktif I(t)

Berdasarkan Gambar 2 dapat dilihat bahwa untuk waktu t (dalam bulan) yang semakin bertambah, banyaknya pekerja baik akan menuju puncak maksimum kemudian berkurang dan akhirnya dalam keadaan konstan untuk nilai tertentu. Selanjutnya, banyaknya pekerja yang kurang baik akan naik mendekati nilai maksimum dengan batas 200 pekerja, sedangkan banyaknya pekerja master akan meningkat yang semula 10 pekerja menjadi sekitar 350 pekerja. Banyaknya pekerja yang dapat diganti dan pekerja tidak aktif hanya meningkat sedikit karena dipengaruhi besar kecilnya nilai alpha dan gama.

Dari simulasi ini didapatkan bilangan reproduksi dasar 2,61, artinya terjadi peningkatan banyaknya pekerja master dari hasil pelatihan ulang yang diadakan berdasarkan penilaian oleh rekan kerjanya.

Kesimpulan

Paper ini membahas tentang model pelatihan ulang untuk pekerja baru berdasarkan penilaian rekan kerjanya. Suatu perusahaan yang ingin meningkatkan kinerja sumber daya manusianya perlu mengadakan pelatihan (*training*) untuk pekerjanya.

Model yang dikaji disini berupa model untuk pelatihan ulang pekerja berdasarkan penilaian oleh rekan kerjanya. Dari model yang dibahas diperoleh titik ekuilibrium trivial untuk bilangan reproduksi dasar kurang dari atau sama dengan satu dan titik ekuilibrium non trivial untuk bilangan reproduksi dasar lebih dari satu. Titik ekuilibrium trivial stabil asimtotik lokal untuk bilangan reproduksi dasar kurang dari satu yang berarti untuk waktu yang lama pekerja baik tidak perlu menjadi pekerja master sehingga tidak dilakukan pelatihan ulang.

Simulasi numerik dengan mengambil nilai parameter tertentu menghasilkan nilai untuk bilangan reproduksi dasar yakni 2,61. ini berarti terjadi peningkatan banyaknya pekerja master sebagai akibat diadakannya pelatihan ulang berdasarkan penilaian rekan kerjanya. Selanjutnya dapat dilakukan penelitian mengenai kestabilan titik ekuilibrium non trivial serta kestabilan global titik ekuilibrium trivial.

Daftar Pustaka

Barnes Belinda and Glenn R Fulford,, 2002, *Mathematical Modelling with Case Studies*. Taylor & Francis, London and New York.

Brauer F. and Castillo Chaves, C., 2001, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.

Olsder, G.J., 1994, *Mathematical Systems Theory*, Delftse Uitgevers Maatschappij, b.v.

Ross, Shepley L., 1984, *Differential equations*. 3^{rd}ed, JohnWiley and Sons, Inc, Singapore.