

**WORKSHOP PEMBIMBINGAN OLIMPIADE
MATEMATIKA & SAINS BIDANG
MATEMATIKA SMP**

KOMBINATORIKA & PELUANG

Ilham Rizkianto

FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Ilham_rizkianto@uny.ac.id

Wonosari, 9 Mei 2014

MASALAH KOMBINATORIK

Mengecoh, terlihat sederhana tapi sulit

Bersifat kaya & terbuka

Memerlukan kehati-hatian & analisis

Memastikan semua terhitung & tidak berlebihan

Memerlukan pengalaman daripada teori

TIPS KOMBINATORIK

Buat angka menjadi lebih kecil (coba kasus lebih sederhana dengan alternatif yang lebih sedikit) sehingga kita bisa menghitung apa yang perlu dihitung dan melihat pola serta cara menggeneralisasi.

Buat model dari masalah yang diberikan.

Gunakan pengalaman dari masalah-masalah sebelumnya.

KOMBINATORIK

Aturan Penjumlahan

Aturan Perkalian

Permutasi

Kombinasi

Pigeonhole Principle

Prinsip Inklusi Eksklusi

Pewarnaan

Permainan

1. Pengibaran Bendera

Enam bendera Indonesia dan empat bendera Belanda akan dikibarkan di sepuluh tiang yang berjajar.

- a. Jika setiap bendera Belanda harus dikibarkan di antara dua bendera Indonesia, berapa banyak cara mengibarkan kesepuluh bendera tersebut?
- b. Jika empat bendera Belanda diganti dengan satu bendera Malaysia, satu bendera Singapura, satu bendera Brunei Darussalam, dan satu bendera Filipina, berapa banyak cara mengibarkan sepuluh bendera yang ada dengan syarat setiap bendera asing dikibarkan di antara dua bendera Indonesia?

2. Kucing dalam Kandang

Enam ekor kucing yang terdiri dari sepasang kucing hitam, sepasang kucing putih, dan sepasang kucing belang akan ditempatkan di enam kandang yang diletakkan berjajar, dengan setiap ekor kucing di kandang yang berbeda. Berapa banyak cara untuk menempatkan keenam kucing tersebut:

- a. Jika kedua kucing putih harus ditempatkan bersebelahan dan kedua kucing belang tidak boleh ditempatkan bersebelahan.
- b. Jika kedua kucing hitam harus ditempatkan bersebelahan, kedua kucing belang tidak boleh ditempatkan bersebelahan, dan kedua kucing putih harus ditempatkan bersebelahan.

3. Bilangan Empat Digit

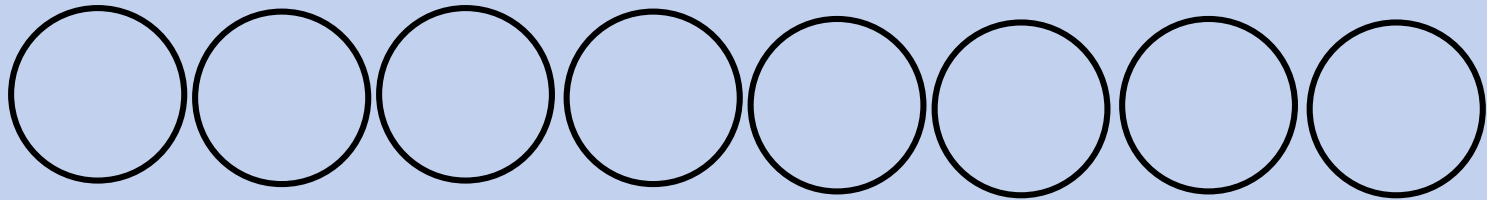
Berapa banyak bilangan empat digit yang terdiri dari angka-angka 0, 2, 3, 5, 7, 8 yang lebih dari 2014 dan kurang dari 7783?

Kaos Kaki dan Sepatu

Salah satu urutan kita saat memakai kaos kaki dan sepatu adalah: kaos kaki kanan, kaos kaki kiri, sepatu kanan, sepatu kiri.

- a. Banyak urutan yang berbeda untuk memakai kaos kaki dan sepatu adalah ...
- b. Jika kita memiliki 3 kaki, banyak urutan yang berbeda adalah ...
- c. Jika kita memiliki 8 kaki, banyak urutan yang berbeda adalah ...

5. Lingkaran Warna



Jika setiap lingkaran akan diwarnai dengan tepat satu warna merah atau biru, berapakah banyak cara mewarnai dengan ketentuan:

- Ada lima lingkaran yang berwarna merah.
- Ada empat lingkaran merah berurutan atau empat lingkaran biru berurutan.
- Ada lima lingkaran biru berurutan.

4. Kartu Remi

Satu set kartu remi/*bridge* terdiri dari 52 lembar. Diambil 5 lembar kartu secara acak. Tentukan banyak kemungkinan terambil 3 kartu berwarna merah dan 2 kartu berwarna hitam, yang di antaranya:

- a. Terdapat tepat satu kartu *As*.
- b. Terdapat tepat dua kartu *King*.
- c. Terdapat tepat tiga kartu *Queen*.
- d. Terdapat empat kartu *Jack*.
- e. Tidak terdapat kartu 10.

8. Bola Lima Warna

Dalam sebuah kotak terdapat 100 bola dengan lima macam warna yakni: biru, merah, kuning, putih, dan hijau. Terdapat 20 bola untuk masing-masing warna. Bola diambil satu demi satu dari dalam kotak tersebut secara acak tanpa pengembalian. Berapa banyak pengambilan yang harus dilakukan untuk memastikan terambilnya:

- a. 10 bola dengan warna sama.
- b. 5 bola dengan warna berbeda.
- c. 8 bola berwarna hijau.
- d. 10 pasang bola (1 pasang = 2 bola warna sama).

6. Pengetosan Koin

Sekeping koin ditos 6 kali. Berapakah peluang:

- a. Angka muncul 3 kali berturut-turut atau gambar muncul 3 kali berturut-turut.
- b. Setidaknya angka muncul satu kali.
- c. Setiap gambar yang muncul selalu sesudah dan sebelum munculnya angka.
- d. Gambar ke-4 muncul pada tos ke-6.

7. Pelemparan Dadu

Tiga buah dadu dilempar secara bersamaan.
Berapakah banyaknya kemungkinan:

- a. Jumlah ketiga mata dadu yang muncul adalah bilangan ganjil.
- b. Hasil kali ketiga mata dadu yang muncul terbagi habis oleh 2.
- c. Hasil kali ketiga mata dadu yang muncul terbagi habis oleh 3.

9. Toko Segar Manis

Toko Segar Manis menjual minuman botol dengan empat pilihan rasa: apel, jeruk, melon, dan sirsak. Berapa banyak cara memilih:

- a. Dua lusin minuman.
- b. Satu lusin minuman dengan minimal satu rasa apel dan dua rasa jeruk.
- c. Dua lusin minuman dengan minimal tiga rasa sirsak dan empat rasa melon serta maksimal dua rasa apel.

10. Kompetisi Sepak Bola

Data akhir suatu kompetisi yang diikuti oleh tiga tim sepak bola, masing-masing tim saling berhadapan dituliskan pada tabel berikut:

Tim	Menang	Kalah	Seri	Gol	
				Memasukkan	Kemasukkan
PSS	1	0	1	6	4
Persiba	0	0	2	5	5
PSIM	0	1	1	5	7

- Berapakah skor pertandingan antara PSS dan PSIM?
- Tim manakah yang mencetak gol lebih banyak ke gawang Persiba?

11. Kartu Bilangan Prima

Tiga belas bilangan prima pertama dituliskan berturut-turut pada tiga belas kartu. Jika semua kartu tersebut diletakkan dalam sebuah kotak dan kemudian diambil secara acak dua buah kartu berturut-turut tanpa pengembalian, maka:

- a. Peluang terambil dua kartu dengan jumlah dua bilangan tertulis bukan merupakan bilangan prima adalah...
- b. Peluang terambil dua kartu dengan jumlah dua bilangan tertulis merupakan bilangan prima adalah..

12. Bilangan Rasional Positif

Diketahui A adalah himpunan semua bilangan rasional positif kurang dari 1 yang dinyatakan dalam pecahan biasa dalam bentuk paling sederhana dan hasil kali pembilang dan penyebutnya $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

- a. Banyaknya anggota himpunan A untuk $n = 20$ adalah ...
- b. Banyaknya himpunan bagian dari A untuk $n = 25$ adalah ...

13. Pembagian Telur

Tentukan banyaknya cara membagikan 15 butir telur kepada empat orang sehingga:

- a. Setiap orang setidaknya mendapatkan satu butir telur.
- b. Setiap orang setidaknya mendapatkan dua butir telur.
- c. Setiap orang setidaknya mendapatkan tiga butir telur.

14. Tabel Permainan

Sebuah tabel permainan berukuran **4 x 4**. Setiap sel akan diwarnai tepat 1 warna, **hitam** atau **putih**. Ada berapa banyak cara untuk menyusun tabel permainan yang dimaksud jika setiap baris dan kolomnya harus memiliki 2 sel hitam dan 2 sel putih?

15. Bola dalam Kantong

Dalam sebuah kantong terdapat 5 bola berwarna putih, 2 bola berwarna hijau, dan 3 bola berwarna merah. Akan diambil 3 bola secara satu persatu dengan pengembalian artinya bola yang sudah diambil dikembalikan ke dalam kantong tersebut.

- a. Peluang tidak ada bola berwarna hijau yang terambil adalah...
- b. Peluang setidaknya terambil 1 bola berwarna merah adalah...
- c. Peluang ada 2 bola putih yang terambil adalah...

16. Dadu Bilangan

Dua dadu bersisi enam diberi nomor baru pada setiap sisinya. Dadu pertama diberi nomor 1, 1, 2, 3, 3, 3 dan dadu kedua diberi nomor -1, -1, -2, -2, -2, -3. Jika kedua dadu dilempar bersamaan, maka peluang terjadinya:

- Jumlah bilangan pada kedua sisi atas dadu bernilai positif adalah...
- Jumlah bilangan pada kedua sisi atas dadu bernilai negatif adalah...
- Jumlah bilangan pada kedua sisi atas dadu sama dengan 0 adalah...

17. Gedung Pertemuan

Suatu gedung pertemuan memiliki kapasitas 1000 orang. Berapa banyak orang minimal yang harus berada di gedung tersebut sehingga dapat dipastikan setidaknya ada 2 orang yang:

- a. Memiliki nama dengan huruf depan yang sama dan bulan lahir yang sama.
- b. Memiliki hari dan bulan lahir yang sama.
- c. Memiliki nama dengan huruf akhir yang sama dan tanggal lahir yang sama.

18. Nilai x

Diketahui $f(x) = x^2 - 1$. Jika nilai x diambil secara acak dari satu anggota himpunan $B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$.

- a. Peluang terbagi habis oleh tiga adalah...
- b. Peluang tidak terbagi habis oleh dua adalah...

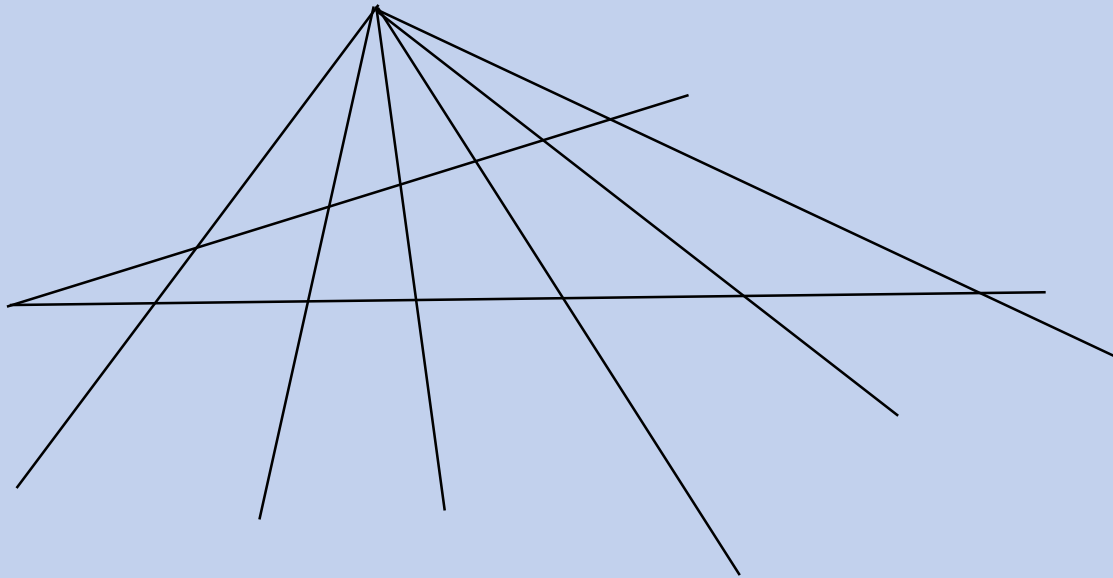
19. Pemanggilan Tiga Siswa

Suatu kelas terdiri dari 40 orang siswa dengan nomor absen 1 – 40. Pak Budi memanggil secara acak tiga orang siswa ke depan kelas.

- a. Berapa banyak kemungkinan rata-rata nomor absen ketiga siswa yang dipanggil ke depan kelas adalah bilangan bulat?
- b. Berapa peluang jumlah nomor absen ketiga siswa yang dipanggil ke depan kelas terbagi habis oleh tiga?
- c. Berapa peluang jumlah nomor absen ketiga siswa yang dipanggil ke depan kelas terbagi habis oleh tiga jika diketahui siswa dengan nomor absen 20 dan 14 tidak hadir?

20. Segitiga

Banyak segitiga di gambar berikut adalah ...



21. *World Cup* 2014

World Cup 2014 akan dimulai pada 13 Juni 2014 dan diikuti oleh 32 negara. Seluruh negara peserta akan dibagi ke dalam 8 grup, A – H. Dalam setiap grup akan terdapat 4 negara yang akan saling bertanding sebanyak 1 kali. Peringkat pertama dan kedua setiap grup akan lolos ke babak perdelapan final yang menggunakan sistem gugur. Mulai babak ini, setiap negara yang kalah akan langsung tersingkir, sementara yang menang akan melaju ke babak berikutnya. Begitu seterusnya sampai babak final dan didapatkan juara *World Cup* 2014. Jika dua negara yang kalah pada babak semi final diberi kesempatan untuk bertanding kembali memperebutkan juara ketiga, berapa banyak pertandingan yang terjadi di *World Cup* 2014?

22. Diagonal Dalam

Berapa banyak diagonal dalam,

- a. Segi lima beraturan
- b. Segi tujuh beraturan
- c. Segi sembilan beraturan
- d. Segi- n beraturan

23. Titik Sudut dari Segi-n Beraturan

Diambil secara acak dua titik sudut dari segi-n beraturan,

- a. Untuk $n = 10$, berapakah peluang ruas garis yang dibentuk kedua titik sudut yang diambil adalah diagonal segi sepuluh tersebut?
- b. Untuk $n = 12$, berapakah peluang ruas garis yang dibentuk kedua titik sudut yang diambil bukan merupakan diagonal segi dua belas tersebut?

24. Segitiga Siku-siku

Diketahui segitiga siku-siku ABC dengan $AB = 6$ cm dan $AC = 8$ cm. Jika diambil satu titik P secara acak dalam segitiga tersebut,

- a. Berapa peluang jarak titik P ke sisi AB kurang dari 4 cm?
- b. Berapa peluang jarak titik P ke sisi AC lebih dari 4,5 cm?

25. Persegi ABCD

Diketahui persegi ABCD dengan panjang sisi 14 cm. Jika diambil satu titik Q secara acak dalam persegi tersebut,

- a. Berapa peluang jarak titik Q ke titik B lebih dari 14 cm?
- b. Berapa peluang jarak titik Q ke titik A kurang dari 7 cm?

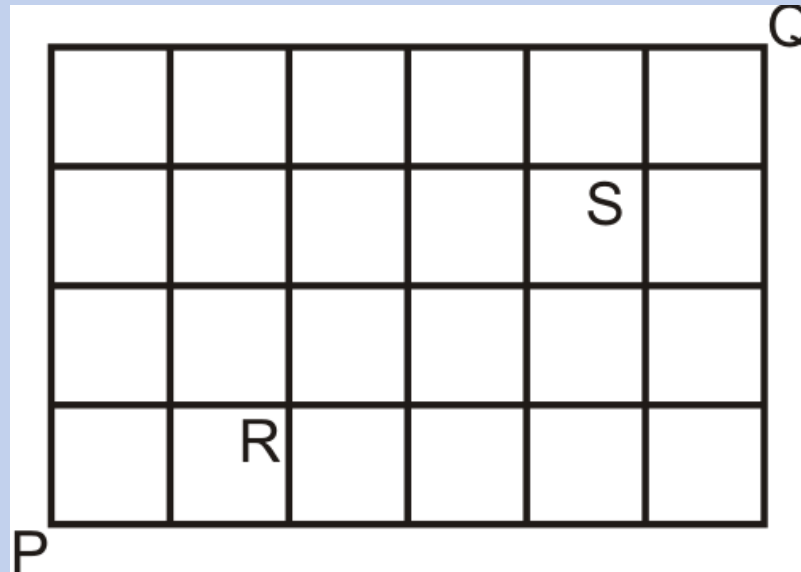
26. Nilai t

Diketahui $f(t) = t^2 - 7t + 10$. Jika nilai t diambil secara acak dari satu anggota himpunan $B = \{x \mid 0 < x < 10, x \text{ bilangan riil}\}$

- Peluang $f(t) < 0$ adalah...
- Peluang $f(t) \geq 0$ adalah...

27. Jalur PQ

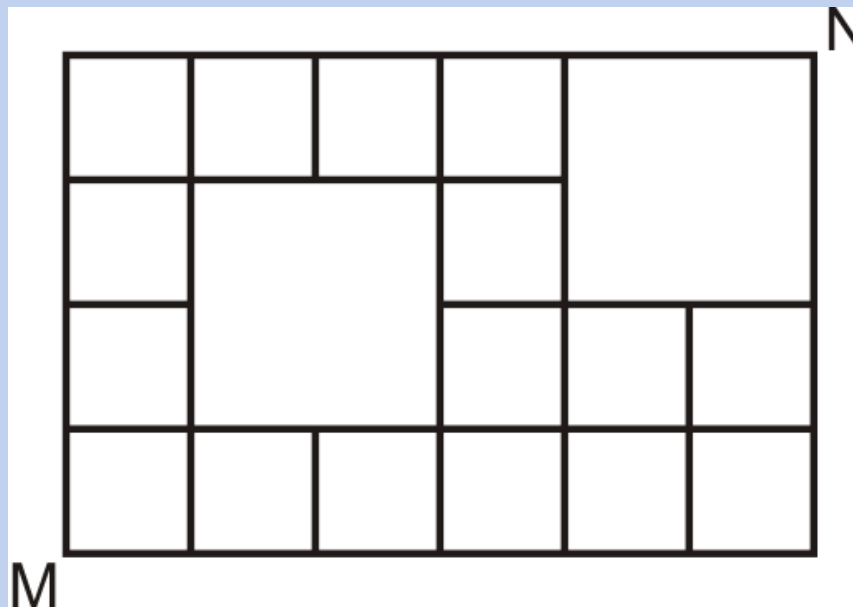
Perhatikan gambar berikut



- Tentukan banyaknya rute terpendek dari P ke Q
- Tentukan banyaknya rute terpendek dari P ke Q yang melalui R dan S
- Tentukan banyaknya rute terpendek dari P ke Q yang melalui R atau S

28. Jalur MN

Perhatikan gambar berikut,



Tentukan banyaknya rute terpendek dari M ke N

29. Bilangan Asli

Banyak bilangan asli kurang dari 20.140 yang jumlah digit pertama dan terakhirnya sama dengan 13 adalah...

30. Bilangan Bulat Positif

Berapa banyak bilangan bulat positif kurang dari 2014 yang merupakan kelipatan 3 atau 4 tapi bukan kelipatan 5?

31. Biskuit dalam Kaleng

Adik mampu makan satu atau dua biskuit sekaligus.

- a. Jika di dalam kaleng terdapat 8 biskuit, berapa banyak cara adik untuk menghabiskan 8 biskuit tersebut?
- b. Jika di dalam kaleng terdapat 10 biskuit, berapa banyak cara adik untuk menghabiskan 10 biskuit tersebut?

32. 20 Bola

- Sebuah kantong berisi 20 bola yang dinomori 1 – 20. Diambil dua bola secara acak berturut-turut dengan pengembalian. Jika m adalah nomor pada bola pertama dan n adalah nomor pada bola kedua, peluang $\frac{6}{m} + \frac{2}{n} = 1$ adalah...

33. Permainan Komputer

Dalam sebuah permainan komputer, kamu akan mendapatkan 4 poin untuk setiap koin perak yang kamu dapatkan dan 7 poin untuk setiap koin emas. Koin perak dan emas dapat kamu kumpulkan sebanyak-banyaknya tanpa batas. Tentunya mustahil bagimu untuk mendapatkan total poin 5 atau 6.

- a. Jika kamu mendata total poin yang dimiliki oleh 1.000 pemain, total poin terbesar yang tidak mungkin kamu dapatkan sebagai modulus adalah...
- b. Jika koin perak bernilai 5 poin dan koin emas bernilai 7 poin, total poin terbesar yang tidak mungkin kamu dapatkan sebagai modulus adalah...

34. Pindah Duduk

Andi, Budi, Cici, dan Dina akan duduk di empat kursi yang telah dinomori 1- 4. Andi duduk di kursi nomor 1, Budi di kursi nomor 2, Cici di kursi nomor 3, dan Dina di kursi nomor 4. Jika mereka akan melakukan pindah duduk dengan aturan: orang di kursi 1 pindah ke kursi 4, orang di kursi 2 pindah ke kursi 1, orang di kursi 3 pindah ke kursi 2, dan orang di kursi 4 pindah ke kursi 3, di kursi nomor berapa Dina akan duduk setelah 2014 kali perpindahan?

35. Konstanta

Konstanta dari $\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^8$ adalah...

36. Peluang Lulus OSN

Peluang Egi lulus seleksi OSN tingkat provinsi adalah 0,8 sementara Fitri 0,4.

- a. Berapa peluang setidaknya salah satu dari mereka lulus?
- b. Berapa peluang keduanya tidak lulus?
- c. Jika diketahui Fitri lulus, berapa peluang Egi lulus?

37. Tiga Kartu

Kiki memiliki tiga kartu. Kedua sisi kartu pertama bergambar Anoa. Kedua sisi kartu kedua bergambar Kasuari. Salah satu sisi kartu ketiga bergambar Anoa dan sisi yang lain bergambar Kasuari. Jika satu kartu tidak sengaja terjatuh dengan sisi bergambar Anoa menghadap ke atas, berapa peluang sisi yang menghadap ke bawah bergambar Kasuari?

38. Persegi Satuan

Sebuah persegi dibagi menjadi 16 persegi satuan yang sama besar. Jika setiap persegi satuan akan diisi oleh satu bilangan: 1 atau -1, berapa banyak cara mengisi persegi tersebut sehingga hasil kali setiap baris dan kolomnya sama dengan 1?

39. Kompetisi Bilyar

Pada suatu kompetisi bilyar, lima pemain dengan peringkat teratas akan melaju ke babak final. Peringkat 5 akan melawan peringkat 4. Pemain yang kalah di pertandingan ini akan mendapat hadiah ke-5 sementara pemain yang menang akan melawan peringkat 3. Pemain yang kalah di pertandingan ini akan mendapat hadiah ke-4 sementara pemain yang menang akan melawan peringkat 2. Pemain yang kalah di pertandingan ini akan mendapat hadiah ke-3 sementara pemain yang menang akan melawan peringkat 1. Pemain yang kalah di pertandingan ini akan mendapat hadiah ke-2 sementara pemain yang menang akan mendapat hadiah utama. Berapa banyak cara kelima pemain tersebut menerima hadiah?

40. Turnamen Catur

Dalam sebuah turnamen catur, setiap peserta bertanding tepat satu kali melawan pemain lainnya. Peserta yang menang akan memperoleh 1 poin, peserta yang kalah akan memperoleh 0 poin, dan peserta yang berakhir dengan skor seri akan memperoleh $\frac{1}{2}$ poin masing-masingnya. Setelah seluruh pertandingan berakhir, didapatkan informasi bahwa setengah dari keseluruhan poin yang dimiliki setiap pemain diperoleh dari hasil pertandingan melawan 10 pemain dengan poin yang lebih kecil. Khusus untuk setiap peserta yang berada pada posisi 10 terbawah memperoleh setengah dari poin mereka melawan 9 pemain lainnya. Berapa banyak peserta yang mengikuti turnamen ini?

SEMOGA SUKSES

TERIMA KASIH