

ISBN No : 979-96880-3-5

Prosiding Seminar Nasional
HASIL PENELITIAN MIPA DAN PENDIDIKAN MIPA

28 Juni 2003, Hotel Sahid Raya, Yogyakarta

Bidang :

Fisika dan Pendidikan Fisika

Tema :

**Peluang dan Tantangan dalam Peningkatan Kualitas Penelitian MIPA
dan Pendidikan MIPA di Era Globalisasi**

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

PENGGUNAAN METODE RELAKSASI UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL ELIPTIK DIMENSI DUA

Oleh:

Sukardiyono dan Supardi

Jurusan Pendidikan Fisika FMIPA UNY

ABSTRAK

Telah dilakukan penelitian tentang penggunaan metode relaksasi dalam penyelesaian masalah differensial parsial dimensi dua. Metode relaksasi merupakan metode numerik yang sangat efektif diterapkan dalam ruang dimensi dua atau tiga. Laju konvergensi dari metode ini dikendalikan oleh parameter kontrol omega. Parameter kontrol Omega dibagi menjadi dua jenis, yaitu under relaxion dan over relaxion. Over relaxion terbukti sangat efektif dibandingkan dengan under relaxion di dalam menyelesaikan masalah potensial dalam ruang dimensi dua. Metode yang digunakan dalam metode relaksasi ini adalah merelaksasi setiap φ baru yang sebelumnya telah di 'improve'. Syarat Dirichlet digunakan untuk memberikan nilai terkaan awal metode ini. Selanjutnya dilakukan sapuan ke seluruh bagian φ untuk memperoleh φ pada tetanga-tetangganya. Dengan sapuan berulang-ulang dan merelaksasikan φ tersebut maka akan diperoleh nilai φ diseluruh sistem. Bentuk diskritisasi untuk metode relaksasi adalah

$$\varphi_{j,l}^* = (1-w)\varphi_{j,l} + \frac{1}{4}w(\varphi_{j+1,l} + \varphi_{j-1,l} + \varphi_{j,l+1} + \varphi_{j,l-1} - h^2 S_{j,l})$$

Prinsip variasi yang sesuai dengan persamaan Poisson memberikan harga energi di seluruh sistem. Diskritisasi terhadap Energi total sistem tersebut mengabla bentuk

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N [(\varphi_{j,l} - \varphi_{j-1,l})^2 + (\varphi_{j,l} - \varphi_{j,l-1})^2] - h^2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} S_{j,l} \varphi_{j,l}$$

Penyelesaian terhadap diskritisasi bentuk energi total telah dilakukan dengan menggunakan metode relaksasi tersebut. Sebuah contoh untuk rapat muatan sumber telah diambil. Hasilnya menunjukkan bahwa metode relaksasi sangat efektif, jika bekerja pada daerah over relaxion yaitu daerah $1 < \Omega < 2$. Keefektifan metode ini ditunjukkan dengan laju konvergensi yang cepat.

Kata kunci : Metode relaksasi, parameter kontrol, diskritisasi, syarat Diriclet, over relaxion.

A. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial parsial memegang peranan penting di dalam penggambaran keadaan fisis suatu besaran yang gayut terhadap ruang semata maupun gayut terhadap ruang dan waktu, sebagai contoh difusi, gelombang elektromagnetik, hidrodinamik dan mekanika kuantum (persamaan Schroedinger). Secara analitik persamaan-persamaan ini sulit untuk dipecahkan, sehingga diperlukan metode numerik untuk menangani dan memberikan hasil secara kuantitatif. Dengan perlakuan secara numerik ini, variabel-variabel tak bebas (misalnya suhu dan potensial) dapat ditunjukkan oleh nilai-nilai pada titik-titik diskrit (kisi) dari variabel bebasnya. Dengan diskritisasi yang tepat, maka persamaan diferensial parsial dapat direduksi dari persamaan difersensi yang besar.

Sebagian persamaan diferensial parsial penting dalam fisika melibatkan persamaan diferensial orde dua. Persamaan diferensial ini dapat diklasifikasikan menjadi tiga yaitu persamaan diferensial parsial parabolik, persamaan diferensial parsial hiperbolik dan persamaan diferensial parsial eliptik. Persamaan diferensial parsial parabolik melibatkan derivatif orde satu untuk besaran yang satu dan derivatif orde dua untuk besaran yang lain. Sebagai contoh persamaan difusi dan persamaan Schroedinger gayut waktu. Mereka memiliki derivatif orde satu untuk besaran waktu dan derivatif orde dua dalam koordinat ruang. Persamaan diferensial parsial hiperbolik melibatkan derivatif orde dua dengan tanda bertawanan apabila semua suku ditempatkan di atas ruas, misalnya persamaan gelombang yang menggambarkan vibrasi dari suatu regangan tali. Sedangkan persamaan diferensial parsial eliptik melibatkan derivatif orde dua dengan tanda sama jika semua suku ditempatkan di satu ruas, misalnya persamaan Laplace atau persamaan Poisson.

Peneitian mengusulkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial eliptik dua dimensi . Persamaan Laplace merupakan kasus khusus dari persamaan Poisson tanpa sumber. Bentuk khusus dari masalah eigen nilai dan nilai batas persamaan eliptik untuk medan dalam ruang dimensi dua (x,y) adalah

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \varphi(x,y) = S(x,y) \dots\dots\dots(1)$$

Dalam elektrostatika medan adalah potensial dan $S(x,y)$ berhubungan dengan rapat muatan, sedangkan dalam masalah difusi panas pada keadaan mantap sebagai suhu, sementara $S(x,y)$ adalah laju timbul atau musnahnya panas. Apabila $S(x,y)=0$, maka persamaan (1) menjadi persamaan Poisson tanpa sumber atau lebih dikenal dengan persamaan Laplace

$$\nabla^2 \varphi(x,y) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

Untuk menyelesaikannya diperlukan syarat batas tertentu sehingga akhirnya dapat ditemukan dimana-mana.

Dalam kasus ruang dimensi satu, metode klasik seperti metode Jacobi atau metode Gauss-Seidel dapat dengan mudah menemukan bentuk potensial. Akan tetapi kedua metode ini kurang handal untuk menyelesaikan potensial dalam ruang dimensi dua atau dimensi tiga. Sebenarnya kedua metode tersebut bisa digunakan untuk menyelesaikan, tetapi akan sangat lambat mencapai konvergensi ke suatu nilai yang diharapkan.

Pada makalah ini akan dipresentasikan : **Penggunaan Metode Relaksasi Untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Eliptik Dimensi Dua.**

B. TINJAUAN PUSTAKA

Metode relaksasi sebagai alternatif penyelesaian handal dalam ruang dimensi dua atau dimensi tiga merupakan metode yang melibatkan pembagian matriks atas blok-blok matriks. Metode ini muncul akibat beda hingga dan melakukan iterasi sampai memperoleh penyelesaian yang tepat.

Ada cara lain untuk memikirkan metode relaksasi secara agak fisis. Untuk menyelesaikan persamaan eliptik seperti pernyataan (1) dapat dituliskan kembali sebagai

$$L\varphi = \rho \dots\dots\dots(3)$$

dengan L merupakan operator eliptik dan $\rho = S(x,y)$ adalah bentuk sumber. Jika ditinjau persamaan difusi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = L\varphi - \rho \dots\dots\dots(4)$$

Distribusi awal ρ berelaksasi menuju suatu penyelesaian setimbang ketika $t \rightarrow \infty$. Kesetimbangan ini menyebabkan derivativ terhadap waktu musnah. Oleh karena itu penyelesaian ini merupakan penyelesaian bentuk (3).

Ide ini bisa dipakai untuk masalah yang kita hadapi. Untuk masalah dimensi dua pernyataan (4) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \rho \dots\dots\dots(5)$$

Pernyataan (5) dapat didekati dengan persamaan beda hingga

$$\varphi_{j,l}^{n+1} = \varphi_{j,l}^n + \frac{\Delta t}{\Delta^2} (\varphi_{j+1,l}^n + \varphi_{j-1,l}^n + \varphi_{j,l+1}^n + \varphi_{j,l-1}^n - 4\varphi_{j,l}^n) - \rho_{j,l} \Delta t \dots\dots\dots(6)$$

Untuk persamaan beda hingga dimensi satu nisbah $\Delta t / \Delta^2 \leq \frac{1}{2}$, sedangkan untuk dimensi dua

menjadi $\Delta t / \Delta^2 \leq \frac{1}{4}$. Jika dicoba untuk step waktu terbesar yang mungkin dan dengan mengatur

$\Delta t = \Delta^2 / 4$, maka pernyataan (6) menjadi

$$\varphi_{j,l}^{n+1} = \frac{1}{4}(\varphi_{j+1,l}^n + \varphi_{j-1,l}^n + \varphi_{j,l+1}^n + \varphi_{j,l-1}^n - 4\varphi_{j,l}^n) - \frac{\Delta^2}{4} \rho_{j,l} \dots\dots\dots(7)$$

Jadi algoritma tersebut menggunakan rerata pada empat titik terdekat tetangganya. Prosedur ini berulang hingga sampai pada titik konvergen. Metode seperti terlihat pada pernyataan (7) merupakan salah satu metode klasik yaitu metode Jacobi. Metode ini tidak praktis, karena konvergensinya sangat lambat. Akan tetapi metode ini merupakan dasar pemahaman terhadap metode yang lain.

Metode handal yang dapat mengatasi masalah konvergensi dalam ruang dimensi dua atau dimensi tiga adalah metode relaksasi. Algoritma untuk metode ini dapat dituliskan sebagai

$$\varphi_{j,l}^{baru} = (1-w)\varphi_{j,l}^{lama} + w\varphi_{j,l}^* \dots\dots\dots(8)$$

dengan

$$\varphi_{j,l}^* = \frac{1}{4}(\varphi_{j+1,l} + \varphi_{j-1,l} + \varphi_{j,l+1} + \varphi_{j,l-1} - 4\varphi_{j,l}) - \Delta^2 \rho_{j,l} \dots\dots\dots(9)$$

dengan w adalah parameter relaksasi. Persamaan (8) akan mencapai konvergensi dengan cepat hanya pada $1 < w < 2$, disebut dengan *overrelaxation*. Jika $0 < w < 1$ maka dikatakan *underrelaxation*. Metode dengan batasan-batasan matematis tertentu yang secara umum dipenuhi oleh munculnya matriks dari beda hingga, maka hanya *overrelaxation* ini saja yang memberikan hasil dengan konvergensi yang lebih cepat dibandingkan dengan metode klasik.

C. METODE KOMPUTASI

Masalah nilai batas terhadap masalah fisis untuk ruang dimensi dua seperti telah dibicarakan di muka secara sederhana dapat ditulis kembali

$$-\nabla^2 \varphi(x, y) = S(x, y) \dots\dots\dots(10)$$

dengan syarat batas $\varphi(0)$ dan $\varphi(1)$ telah ditentukan. Syarat tersebut lebih dikenal dengan syarat Dirichlet. Prinsip variasi yang sesuai dengan pernyataan (10) adalah

$$E = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - S\varphi \right] \dots\dots\dots(11)$$

Bentuk E memiliki beberapa interpretasi fisis. Sebagai contoh, di dalam elektrostatika $-\nabla \varphi$ adalah medan listrik dan S adalah rapat muatan sumber. Jadi E merupakan energi total sistem. Dengan

mengambil bentuk $\frac{\partial E}{\partial \varphi_{ij}} = 0$, maka diperoleh persamaan beda hingga

$$-\left[\frac{\varphi_{j+1,l} + \varphi_{j-1,l} - 2\varphi_{j,l}}{h^2} + \frac{\varphi_{j,l+1} + \varphi_{j,l-1} - 2\varphi_{j,l}}{h^2} \right] = S_{j,l}$$

atau

$$\varphi_{j,l} = \frac{1}{4}(\varphi_{j+1,l} + \varphi_{j-1,l} + \varphi_{j,l+1} + \varphi_{j,l-1} - h^2 S_{j,l}) \dots\dots\dots(12)$$

Persamaan beda ini relatif kasar, karena untuk mencapai hasil konvergensi ke suatu nilai. Metode diskritisasi yang lebih halus dapat dilakukan misalnya dengan metode Numerov.

Meskipun persamaan (12) kurang bermanfaat, karena tidak diketahui nilai φ di ruas kanan, akan tetapi dapat ditafsirkan dengan cara memberi 'improve' terhadap nilai φ_{jl} berdasarkan nilai φ tetangganya. Oleh karena itu, strateginya adalah memberi nilai terkaan terhadap penyelesaian awal dan kemudian menyapu secara sistimatis ke seluruh mesh yang ada dengan mengganti secara berturut-turut φ_{jl} . Dengan menyapu secara berulang-ulang, maka terkaan awal terhadap φ dapat direlaksasi ke arah penyelesaian yang tepat. Setiap kali relaksasi, φ_{jl} lama akan diganti dengan φ_{jl} hasil 'improve'. Secara umum dapat dituliskan

$$\varphi_{j,l} \rightarrow \varphi_{j,l}^* = (1-w)\varphi_{j,l} + \frac{1}{4}w(\varphi_{j+1,l} + \varphi_{j-1,l} + \varphi_{j,l+1} + \varphi_{j,l-1} - h^2 S_{j,l}) \dots\dots\dots(13)$$

Bentuk energinya menjadi

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N [(\varphi_{j,l}^* - \varphi_{j-1,l}^*)^2 + (\varphi_{j,l}^* - \varphi_{j,l-1}^*)^2] - h^2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} S_{j,l} \varphi_{j,l}^* \dots\dots\dots(14)$$

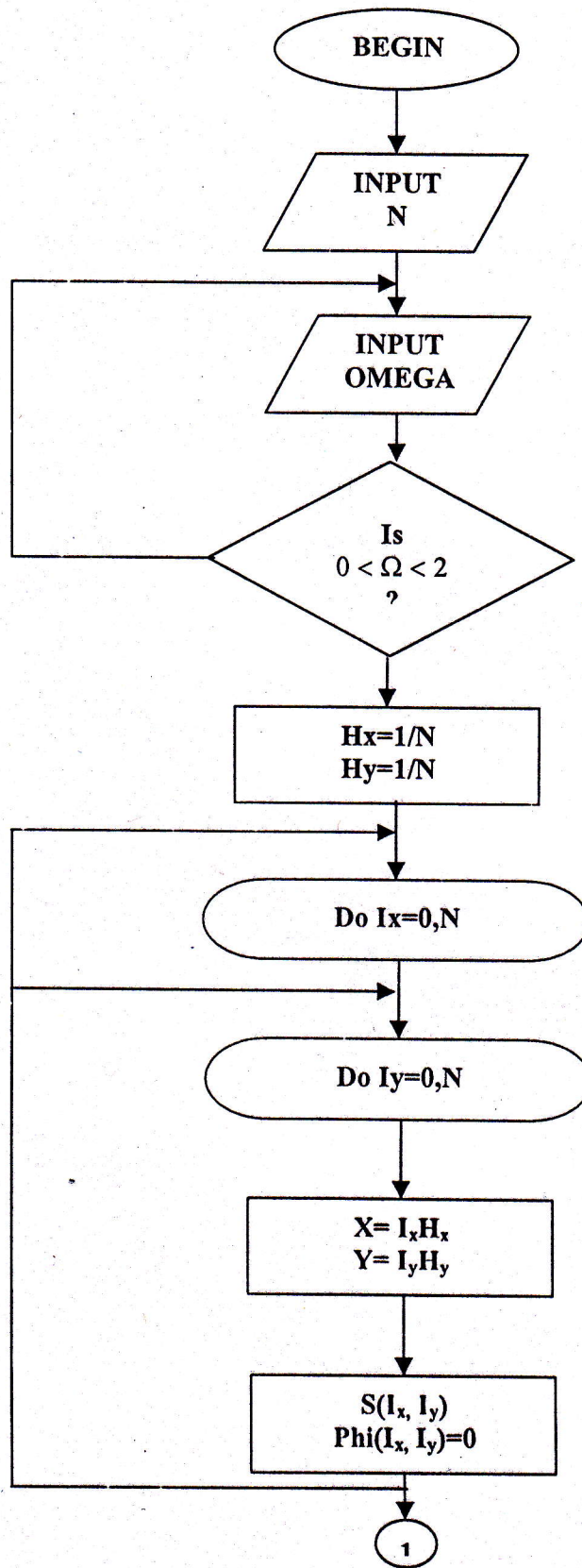
D. PEMBAHASAN HASIL DAN ANALISA DATA

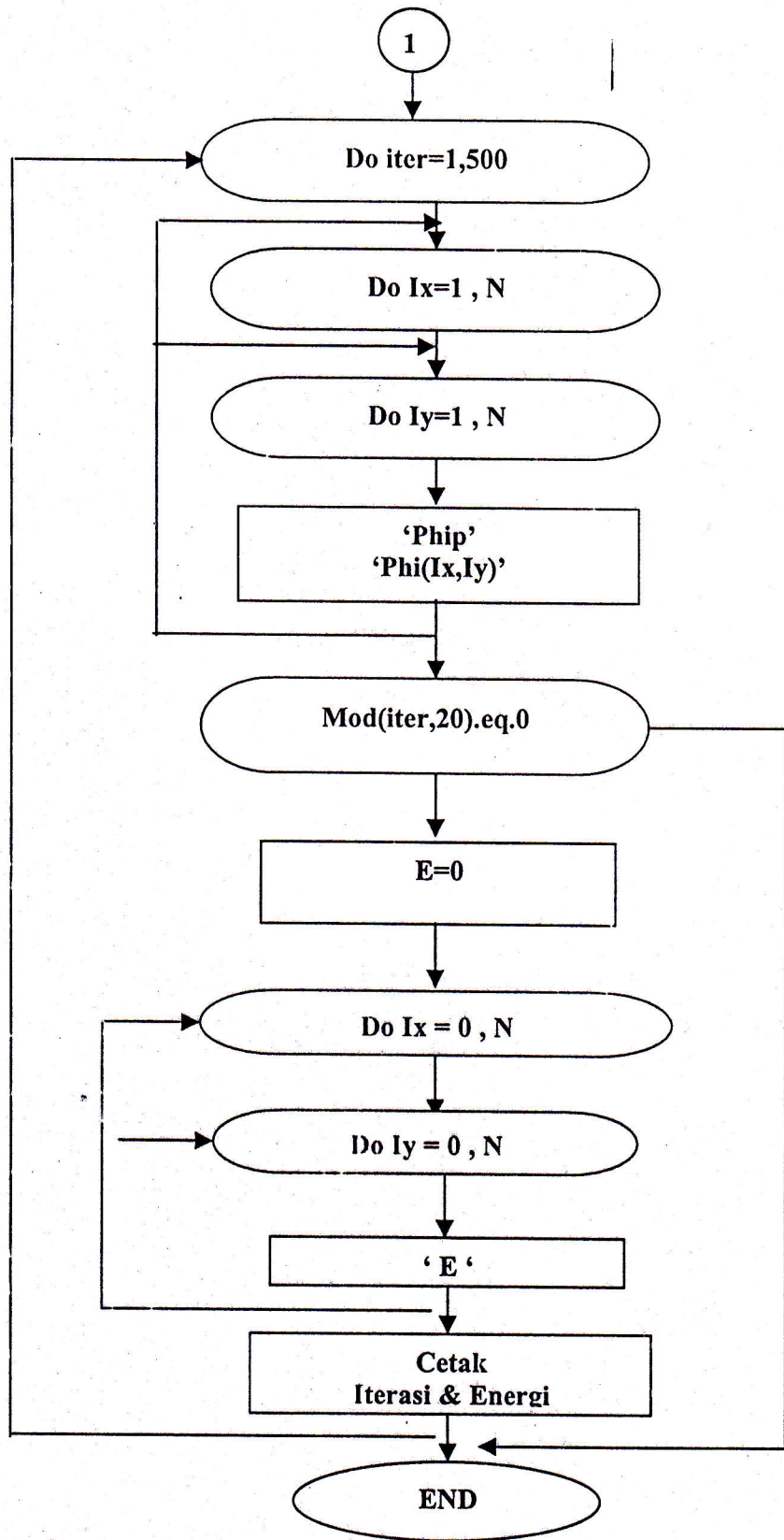
Algoritma Program

Program komputer diawali dengan menentukan array dua dimensi sesuai dengan keinginan. Dalam penelitian ini telah diambil nilai yang tidak terlalu buruk yaitu $N_x = 20$ dan $M_x = 20$. N_x adalah jumlah langkah ke arah sumbu x dan M_y adalah langkah ke arah sumbu y. Selanjutnya lebar langkah ke arah sumbu x dan ke arah sumbu y masing-masing dapat ditentukan dengan $h_x = 1/N_x$ dan $h_y = 1/M_y$

Pemilihan langkah yang terlalu lebar menyebabkan mesh yang dibentuk terlalu luas, sehingga diperlukan waktu yang relatif lama untuk merelaksasikan nilai-nilai φ_{jl} yang telah di'improve'. Hal ini jelas karena cacah iterasi yang diperlukan terlalu banyak. Sebaliknya, pemilihan langkah yang terlalu sempit menyebabkan mesh yang dibentuk juga terlalu sempit pula, sehingga diperoleh akurasi perhitungan yang lebih meyakinkan, akan tetapi diperlukan memori yang cukup besar untuk menanganinya.

Setelah penentuan langkah, masukan selanjutnya adalah omega (Ω). Omega merupakan parameter yang mengontrol laju konvergensi ke suatu nilai energi yang diharapkan. Nilai omega dipisahkan menjadi dua macam. Jenis pertama adalah omega yang memiliki harga diantara 0 dan 1 ($0 < \Omega < 1$). Jenis ini disebut dengan *omega under relaxion*. Sedangkan omega yang berada diantara harga 1 dan 2 ($1 < \Omega < 2$) disebut dengan *omega over relaxion*. Pada penelitian ini telah dicoba untuk menggunakan kedua jenis omega tersebut untuk menguji laju konvergensi dengan membandingkannya dengan cara klasik (Gauss-Seidel). Output dari program selanjutnya dapat dilihat pada flowchart program seperti terlihat pada gambar 1.





Gambar 1. Flowchart Program Komputer Untuk Metode Relaksasi

Analisa Data

Pada penelitian ini telah diambil sebuah contoh persamaan differensial parsial dengan rapat muatan sumber $S(x, y) = 18x^2y^2$. Harga eksak energi total pada masalah ini adalah $-8.379097E-02$. Dari hasil running program yang dibuat diperoleh hasil seperti terlihat pada tabel 1. Kolom 2, 3 dan 4 menunjukkan cacah iterasi disertai dengan besar energi pada setiap akhir iterasi ketika diberi masukan parameter kontrol omega masing-masing $\Omega=0.8$, $\Omega=1.2$ dan $\Omega=1.9$. Pemilihan nilai masukan omega tersebut diharapkan mewakili kedua jenis omega seperti disebutkan di atas.

Tabel 1. Perbandingan laju konvergensi untuk metode Gauss-Seidel dengan Metode Relaksasi

Iterasi yang ke	Metode GS ($\times 10^{-2}$)	Metode Relaksasi			
		$\Omega=0.8$ ($\times 10^{-2}$)	$\Omega=1,2$ ($\times 10^{-2}$)	$\Omega=1,5$ ($\times 10^{-2}$)	$\Omega=1.9$ ($\times 10^{-2}$)
21	-7.705323	-6.892349	-7.932445	-8.359789	-8.376520
41	-7.745636	-7.144918	-8.130208	-8.364359	-8.376697
61	-8.141710	-7.758524	-8.321606	-8.378452	-8.379091
81	-8.289839	-8.059061	-8.366077	-8.379070	-8.379097
101	-8.345700	-8.212890	-8.376172	-8.379093	-8.379099
121	-8.366646	-8.292694	-8.378442	-8.379097	-8.379092
141	-8.374459	-8.334213	-8.378953	-8.379097	-8.379096
161	-8.377377	-8.355811	-8.379062	-8.379097	-8.379090
181	-8.378460	-8.367028	-8.379085	-8.379096	-8.379098
201	-8.378855	-8.372840	-8.379097	-8.379098	-8.379099
221	-8.379007	-8.375856	-8.379094	-8.379099	-8.379095
241	-8.379062	-8.377419	-8.379097	-8.379190	-8.379098
261	-8.379092	-8.378226	-8.379098	-8.379099	-8.379095
281	-8.379087	-8.378646	-8.379096	-8.379097	-8.379092
301	-8.379095	-8.378863	-8.379094	-8.379098	-8.379096
321	-8.379094	-8.378974	-8.379094	-8.379097	-8.379090
341	-8.379094	-8.379094	-8.379097	-8.379097	-8.379097
361	-8.379093	-8.379094	-8.379099	-8.379098	-8.379098
.
.
461	-8.379094	-8.379097	-8.379099	-8.379097	-8.379096
481	-8.379097	-8.379097	-8.379099	-8.379099	-8.379091

Terlihat pada tabel 1 tersebut bahwa setelah dilakukan relaksasi terhadap ϕ yang telah di'improve', maka laju konvergensi dengan jelas menunjukkan semakin cepat ketika parameter kontrol omega harganya mendekati nilai 2. Hal ini ditunjukkan dengan semakin cepatnya harga energi menuju harga eksaknya. Dengan demikian, dugaan terhadap laju konvergensi pada daerah over relaksasi di muka benar untuk masalah dua dimensi.

Hasil selanjutnya dibandingkan dengan menggunakan metode Gauss-Seidel. Terlihat pada tabel 1 kolom pertama bahwa laju konvergensi pada nilai E relatif lambat dibandingkan dengan menggunakan cara relaksasi pada daerah over relaksasi. Sehingga dapat ditarik suatu kesimpulan akhir bahwa metode relaksasi efektif pada masalah di ruang dimensi dua pada daerah over relaksasi.

E. KESIMPULAN

Setelah dilakukan penelitian terhadap metode relaksasi untuk menyelesaikan persamaan parsial eliptik dimensi dua, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Metode klasik kurang memadai apabila dipergunakan untuk menyelesaikan persamaan parsial di dalam ruang dimensi dua.
2. Metode relaksasi merupakan metode alternatif terbaik untuk menangani permasalahan penyelesaian persamaan differensial parsial dimensi dua.
3. Ada dua daerah parameter kontrol di dalam metode relaksasi yang dapat diterapkan yaitu daerah under relaxation dan over relaxation.
4. Metode relaksasi sangat efektif bila masukan parameter kontrol omega berada pada daerah over relaxation.
5. Kefektifan metode ini ditunjukkan dengan tingginya laju konvergensi ke suatu nilai energi total sistem.

F. DAFTAR PUSTAKA

- Coonin, Steven E ., Meredith, dawn C., 1990, *Computational Physics*, USA : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Ptess H., Flannery P., Teulosky A., Vetterling T., 1987, *Numerical recipes*, Cambridge : Press Syndicate of the Cambridge University