PERSAMAAN ALIRAN FLUIDA FASA TUNGGAL PADA MEDIA POROUS

Oleh : Supahar
Jurusan Pendidikan Fisika FMIPA UNY

ABSTRAK

Telah diturunkan secara matematis persamaan aliran fluida fasa tunggal pada medium porous yang dinyatakan dalam parameter besaran termodinamika terukur. Hukum-hukum kekekalan diterapkan pada perasamaan transport Boltzmann untuk menghasilkan persamaan kontinuitas (konservasi massa). Dengan merumuskan kembali persamaan kontinuitas yakni dengan menambahkan bobot porositas sehingga diperoleh persamaan aliran fluida dalam media porous. Persamaan aliran fluida dalam media porous selanjutnya dinyatakan dalam parameter besaran termodinamika terukur tekanan (P), sehingga menjadikan persamaan tersebut bersifat applicable, khususnya dalam bidang eksplorasi minyak dan gas alam lainnya.

1. PENDAHULUAN

Sistem aliran total bagi reservoir terdiri atas empat tahap, yakni: fasilitas pipa alir permukaan, aliran tegak dalam wellbore, aliran gas yang melalui media porous menuju wellbore, dan gerakan air pada tepi dari gelembung gas. Aliran yang terjadi dapat berupa aliran fasa tunggal (seperti: air, gas, atau kondensat), aliran dua fasa (seperti: gas/air atau gas/kondensat), dan aliran tiga fasa (gas/kondensat/air).

Pembahasan pada makalah ini dibatasi pada perumusan persamaan aliran fluida fasa tunggal untuk mendapatkan solusi persamaan aliran fluida melalui media porous pada wellbore, dan gerakan air pada tepi gelembung gas yang digambarkan melalui persamaan cairan murni (air) dan solusinya pada tepi dari gelembung gas.

Konsekuensi dari hukum-hukum kekekalan yang diterapkan pada persamaan transport Boltzmann akan menghasilkan persamaan persamaan kontinuitas. Dengan merumuskan kembali persamaan kontinuitas (konservasi massa) dalam parameter besaran termodinamika terukur: Tekanan (P), menjadikan persamaan kontinuitas bersifat applicable, khususnya dalam bidang eksplorasi minyak dan gas alam lainnya.

2. KONSEKUENSI PERSAMAAN TRANSPORT BOLTZMANN TERHADAP HUKUM-HUKUM KEKEKALAN

Untuk menyelidiki fenomena non equilibrium, kita harus menyelesaikan persamaan transport Boltzmann, dengan memberikan kondisi awal, untuk menemukan fungsi distribusi sebagai sebuah fungsi waktu. Sejumlah sifat dari solusi persamaan Boltzmann kemungkinan dapat diperoleh dari fakta bahwa dalam tumbukan molekul di sini terdapat kuantitas dinamik yang kekal.

Misal $c(r,v)$ adalah kuantitas dari kecepatan sebuah molekul (v) yang berada di r, sedemikian rupa sehingga saat tumbukan di r, berlaku:

$\{v_1,v_2\} \rightarrow \{v_1^{'},v_2^{'}\}$ dan $c_1 + c_2 = c_1^{'} + c_2^{'}$ dimana $c(r,v)$ disebut kuantitas kekal.

Dalil:

$$\int d^3v c(r,v)\left[\frac{\partial f(r,v,t)}{\partial t}\right]_{coll} = 0 \qquad \text{(I.1)}$$

dimana $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$ diperoleh dari ruas kanan persamaan PTB berikut:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1.\nabla_r + \frac{F}{m}.\nabla_{v_1}\right)f_1 = \int d\Omega \int d^3v_2 t(\Omega)|v_1 - v_2|\left(f_2^{'}f_1^{'} - f_2 f_1\right) \qquad \text{(I.2)}$$

dimana:

$f_1 \equiv f(r, v_1, t)$ dan $f_1^{'} \equiv f(r, v_1^{'}, t)$

$f_2 \equiv f(r, v_2, t)$ dan $f_2^{'} \equiv f(r, v_2^{'}, t)$

$t(\Omega)$ adalah deferensial penampang lintang tumbukan $\{v_1,v_2\} \rightarrow \{v_1^{'},v_2^{'}\}$

Subtitusi ruas kanan dari persamaan (I.2) ke dalam persamaan (I.1) diperoleh:

$$\int d^3v c(r,v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \int d^3v_1 \int d^3v_2 \int d\Omega t(\Omega)|v_2 - v_1| c_1\left(f_1^{'}f_2^{'} - f_1 f_2\right) \qquad \text{(I.3)}$$

integral ini invarian terhadap:

$v_1 \Leftrightarrow v_2$

$v_1 \Leftrightarrow v_1^{'}$ dan $v_2 \Leftrightarrow v_2^{'}$

$v_1 \Leftrightarrow v_2^{'}$ dan $v_2 \Leftrightarrow v_1^{'}$

Konsekuensi dari sifat invarian di atas, maka masing-masing keadaan invarian diperoleh bentuk deferensial untuk integral yang sama. Dengan demikian persamaan (I.3) menjadi:

$$\int d^3v c(r,v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \frac{1}{4}\int d^3v_1 \int d^3v_2 \int d\Omega t(\Omega)|v_2 - v_1|\left(f_1^{'}f_2^{'} - f_1 f_2\right)\left(c_1 + c_2 - c_1^{'} - c_2^{'}\right) = 0$$

(I.4)

Relevansi dari hukum kekekalan ini dengan persamaan transport Boltzmann adalah dengan mengalikan persamaan transport Boltzmann pada kedua sisi dengan c dan mengintegrasikan untuk seluruh v , suku yang mengandung tumbukan dihilangkan dengan sifat dari persamaan (I.1), kita dapatkan:

$$\int d^3 v c(r,v)\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{m}F_i\frac{\partial}{\partial v_i}\right)f(r,v,t)=0 \qquad \text{(I.5)}$$

atau: $$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3 vcf+\frac{\partial}{\partial x_i}\int d^3 vcv_i f-\int d^3 v\frac{\partial}{\partial x_i}v_i f+\frac{1}{m}\int d^3 v\frac{\partial}{\partial v_i}(cF_i f)$$

$$-\frac{1}{m}\int d^3 v\frac{\partial c}{\partial v_i}F_i f-\frac{1}{m}\int d^3 vc\frac{\partial F_i}{\partial v_i}f=0 \qquad \text{(I.6)}$$

keempat suku dapat dihilangkan jika f (r,v,t) diasumsikan ketika $|v|\to\infty$.

Dengan mendifinisikan nilai rata-rata $\langle A\rangle$

$$\langle A\rangle\equiv\frac{\int d^3 vAf}{\int d^3 vf}=\frac{1}{n}\int d^3 vAf \qquad \text{dimana:}$$

$$n(r,t)\equiv\int d^3 vf(r,v,t) \qquad \text{(I.7)}$$

Teorima kekekalan makroskopik:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle nc\rangle+\frac{\partial}{\partial x_i}\langle nv_i c\rangle-n\left\langle v_i\frac{\partial c}{\partial x_i}\right\rangle-\frac{n}{m}\left\langle\frac{\partial F_i}{\partial v_i}c\right\rangle=0 \qquad \text{(I.8)}$$

dimana c adalah sejumlah sifat kekal. Dengan catatan bahwa $\langle nA\rangle=n\langle A\rangle$ sebab n tak bergantung pada v. Dari sekarang kita membatasi perhatian untuk kecepatan yang tak bergantung pada gaya eksternal , maka suku terakhir dari persamaan (I.8) dapat dihilangkan. Untuk molekul sederhana sifat kekal tak bergantung massa, momentum, dan energi.

Untuk $c=m$ (massa)

$$\frac{\partial}{\partial t}(nm)+\frac{\partial}{\partial x_i}\langle nmv_i\rangle=0 \qquad \text{(I.9)}$$

atau dengan memasukkan kerapatan massa

$$r(r,t)\equiv nm(r,t) \qquad \text{(I.10)}$$

kita peroleh:

$$\frac{\partial r}{\partial t}+\nabla(r\bar{u})=0 \qquad \text{(I.11)}$$

dengan $\bar{u}$ = kecepatan aliran fluida.

Persamaan (I.11) disebut persamaan kontinuitas massa untuk aliran fluida. Bila persamaan tersebut diterapkan pada persamaan aliran pada medium porous, maka persamaan (I.11) harus dikoreksi yakni dengan menambahkan bobot porositas pada term $\frac{\partial r}{\partial t}$, sehingga menjadi:

$$f\ \frac{\partial r}{\partial t} + \nabla\left(r\bar{u}\right) = 0 \tag{I.12}$$

3. PERSAMAAN ALIRAN FLUIDA PADA MEDIA POROUS

Persamaan kontinuitas adalah generalisasi dari konservasi massa : kecepatan aliranan massa dalam negatif kecepatan aliran keluar massa = kecepatan akumulasi massa , divergensi dari: $r\ \bar{u}$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(fr\right) = \nabla.\left(r\bar{u}\right)$$

$$= \frac{\partial\left(r\bar{u}_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(r\bar{u}_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(r\bar{u}_z\right)}{\partial z}\ , \qquad \text{(untuk koordinat kartesian)}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\left(r\bar{u}_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial q}\left(r\bar{u}_q\right) + \frac{\partial\left(r\bar{u}_z\right)}{\partial z} \quad \text{(untuk koordinat silinder)} \tag{I.13}$$

Dimana (ϕ) adalah porositas ,(ρ) densitas, dan ($\bar{u}$) adalah vektor kecepatan superfisial. Tinjauan geometri sumur gas dan sekelilingnya menggunakan model silindris untuk menggambarkan aliranan dalam reservoir. Sehingga , dalam kasus 1-dimensi , persamaan (I.13) menjadi:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(fr\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rru \tag{I.14}$$

Biasanya gaya gravitasi $rz\left(g/g_c\right)$ dalam arah z dapat diabaikan bagi gas. Persamaan kecepatan diturunkan melalui *truncating term* orde lebih tinggi (u^3, u^4, …) adalah:

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{m}{k}u + bru^2 \qquad \text{atau} \qquad u = -\frac{k}{m}d\,\frac{dP}{dr} \tag{I.15}$$

Dimana (µ) adalah viscositas,(ß) koefisien kecepatan tinggi dan (d) adalah faktor koreksi aliran :

$$d = \left(1 + \frac{brku}{m}\right)^{-1} \tag{I.16}$$

Untuk gas nyata,

$$r = \frac{PM}{ZRT} \qquad \text{(I.17)}$$

Dimana M adalah berat molekul gas, z faktor kompresibilitas, dan R tetapan gas, dan T temperatur reservoir. Penggabungan persamaan (I.14), (I.15), dan (I.17) menghasilkan:

$$\frac{f}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{Z}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\left(\frac{P}{mZ} d \frac{\partial P}{\partial r}\right) \qquad \text{(I.18)}$$

Yang menganggap reservoir isotermal (tanpa perubahan temperatur). Asumsi tambahan yang diperlukan untuk persamaan (I.18) adalah sbb:

1. suatu model silindrik radial (aliranan dimensi satu)
2. aliranan fasa tunggal (hanya aliranan gas)
3. reservoir adalah homogen: k adalah sama meskipun posisi (k $\neq f(r)$ dan efek Klinkenberg dapat diabaikan ($k \neq f(P)$) , juga porositas (f) adalah konstan
4. efek grafity dapat diabaikan ($\frac{\partial P}{\partial Z} + rg \approx 0$)

Validitas asumsi-asumsi ini adalah esensi bagi persamaan (I.18).

Non linearitas tinggi yang disebabkan oleh faktor koreksi aliran (d) menyebabkan persamaan itu tak dapat dipecahkan. Suatu asumsi tambahan diperlukan:

Asumsi (5) aliranan adalah viscous ($b = 0$ dan $d = 1$).

Dengan asumsi ini persamaan (1.18) menjadi :

$$\frac{f}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{Z}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\left(\frac{P}{mZ}\frac{\partial P}{\partial r}\right) \qquad \text{(1.19)}$$

Untuk aliranan gas yang mencakup term sink atau source, ***q*** (massa persatuan volume persatuan waktu), persamaan kontinuitas dapat ditulis,

$$\nabla(r\,u) = -\frac{\partial f\,r}{\partial t} - q$$

(1.20)

Subtitusikan persamaan (1.15) d =1, persamaan Darcy) , dan persamaan (1.17) (persamaan keadaan) kedalam persamaan (1.20), sehingga didapat:

$$= f\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{P}{Z}\right] + \nabla.\left[k\frac{P}{mZ}\nabla P\right]\frac{RT}{M}q \tag{1.21}$$

Suku pertama ruas kiri dapat diperluas menjadi persamaan:

$$f\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{P}{Z}\right] = f\left[\frac{1}{Z}\frac{\partial P}{\partial t} + P\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{Z}\right)\right]$$

$$= f\left[\frac{P}{Z}\frac{\partial P}{\partial t}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dP}\right)\right]$$

$$= \frac{fcP}{Z}\frac{\partial P}{\partial t} \tag{1.22}$$

$$c \equiv \frac{1}{r}\frac{dr}{dP}\Big|r = \frac{1}{P} - \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dP} \tag{1.23}$$

4. DALAM SUKU TEKANAN TERUKUR , P

Ruas kiri dari (1.21) dapat ditulis:

$$\nabla.\left[k\frac{P}{mZ}\nabla P\right] = \frac{P}{mZ}\nabla.(k\nabla P) + (k\nabla P).\nabla\left(\frac{P}{mZ}\right)$$

$$= \frac{P}{mZ}\left[\nabla.(k\nabla P) + \frac{d\ln(P/mZ)}{dP}k(\nabla P)^2\right] \tag{1.24}$$

Gabungkan persamaan (1.21) dan (1.22), dan (1.24) diperoleh :

$$\nabla.(k\nabla P) + \frac{d\ln(P/mZ)}{dP}k(\nabla P)^2 = fcm\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{RTmZ}{MP}q \tag{1.25}$$

Asumsi 6: Gradien tekanan kecil: $\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2 \to 0$ atau $\frac{P}{mZ}$ konstan., maka persamaan (1.25) dapat disederhanakan menjadi:

$$\boxed{\nabla.(k\nabla P) = fcm\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{RTmZ}{MP}q} \tag{1.26}$$

5. KESIMPULAN

Konsekuensi hukum kekekalan dari persamaan transport Boltzmann akan menghasilkan persamaan kontinuitas (konservasi massa). Bila parameter-parameter persamaan kontinuitas tersebut dinyatakan dalam besaran termodinamika tekanan (P), dapat digunakan untuk menjelaskan persamaan aliran fluida melalui media porous pada wellbore dan gerakan air pada tepi gelembung gas. Persamaan ini sangat bermanfaat, khususnya dalam bidang engineering pemboran miyak dan gas alam lainnya.

REFERENSI

Katz, D.L and Lee, R.L. *Nateral **Gas Engineering*****:** McGraw-Hill Publishing Co(1990).

Huang, K. *Statistical Mechanics*, John Willey and Son (1963)

Roberts, RC. "*Unsteady Flow of a Gas Through a Porous Media"* : Proceedings Applied Mechanics (1952)