BAB I

ARTI PENTING ANALISIS NUMERIK

Pendahuluan

Di dalam proses penyelesaian masalah yang berhubungan dengan bidang sains, teknik, ekonomi dan bidang lainnya, sebuah gejala fisis pertama-tama harus digambarkan ke dalam suatu model matematis. Hal ini sering disebut dengan formulasi masalah.

Selanjutnya, nalisis numerik digunakan sebagai alat untuk mengembangkan suatu teknik dalam usaha menemukan suatu penyelesaian atau lebih tepatnya pendekatan penyelesaian terhadap persamaan matematis yang meggambarkan model tersebut. Akan tetapi, penyelesaian terhadap persamaan itu sering memunculkan masalah baru yakni sulit untuk ditangani secara analitis biasa. Sebagai contoh, untuk sebuah masalah integrasi yang kelihatan sangat sederhana, yaitu misalnya kita diminta untuk menemukan harga eksak dari bentuk integral tertentu $\int_0^1 e^{-x^2}dx$. Tambahan lagi, untuk sebuah persamaan non-linier misalnya diminta menyelesaikan persamaan $\cos x = x$, dan untuk masalah aljabar linier, misalnya kita diminta untuk mencari swanilai untuk ukuran matriks yang besar.

Jelas, bahwa masalah-masalah tersebut kelihatan sangat sederhana dan sepele. Namun dalam kenyataanya sangat sulit diselesaikan secara analitis biasa. Oleh sebab itu, perlu ada sebuah metode lagi yang dapat mengatasi masalah kesulitan mendapatkan jawaban atas harga-harga tersebut. Satu-satunya metode yang diharapkan mampu menyelesaikan masalah tersebut adalah metode numerik.

Akan tetapi, perlu disadari oleh kita semua bahwa harga yang diperoleh dengan pendekatan numerik tidaklah eksak seperti yang kita peroleh melalui pendekatan analitis. Artinya, harga yang diperoleh melalui pendekatan numerik masih memiliki kesalahan meskipun kesalahan yang terjadi sangat kecil. Namun demikian, peranan metode numerik ini menjadi sangat penting manakala peranan matematis analitis sudah angkat tangan.

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas, sekarang marilah kita tinjau sebuah persamaan matematika dalam bentuk seperti pada (1-1)

$$x = e^{-x} \tag{1-1}$$

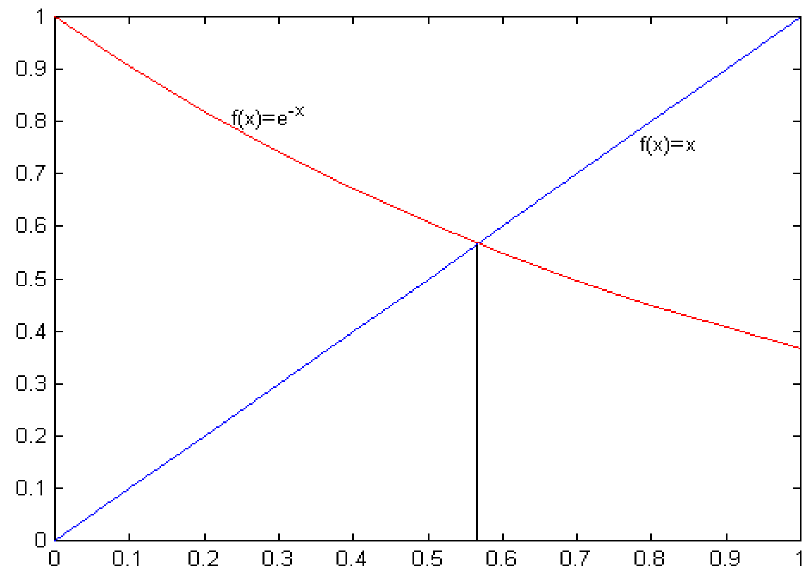
Dengan persamaan itu kita diminta untuk menyelesaikanny. Apa yang dapat kita lakukan dengan persamaan itu. Dapatkah kita menyelesaikan persamaan matematika tersebut dengan eksak? Jika kita dapat menyelesaikan dengan sempurna persamaan tersebut, mungkin kita termasuk orang-orang jenius. Baiklah, kita akan mencoba menyelesaikan persamaan tersebut melalui pendekatan numerik.

Sebagai gambaran awal dalam menyelesaikan persamaan (1-1) kita akan menampilkan fungsi $f(x)=x$ dan $f(x)=e^{-x}$ seperti terlihat pada gambar 1.1. Lihat, dua grafik fungsi tersebut berpotongan di suatu titik. Titik perpotongan dua grafik fungsi ini bersesuaian dengan harga absis di titik antara $x=0.5$ dan $x=0.6$.

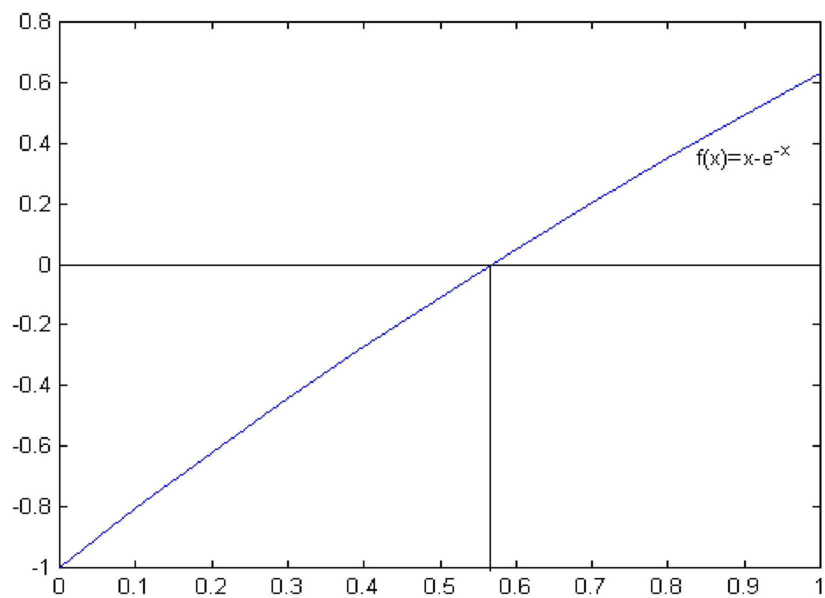
Disamping dengan cara mengeplot dua buah grafik fungsi yang diketahui, kita juga dapat mengeplot grafik secara langsung dari fungsi $f(x)=x-e^{-x}$ seperti terlihat pada gambar 1.2. Saat grafik memotong sumbu *x,* kita dapat melihat harga *x* yang bersesuaian. Dari cara yang kedua ini, kita juga dapat melihat bahwa harga *x* juga berada diantara $x=0.5$ dan $x=0.6$ seperti pada cara pertama.

Harga yang telah diperoleh ini tentunya kurang memuaskan kita, mengingat kesalahan pembacaan terhadap grafik tersebut relatif besar. Atau dengan kata lain, kesalahan yang dialami dari metode grafis ini masih terlalu besar ibandingkan dengan harga eksaknya. Oleh sebab itu, kita perlu mencari metode pendekatan lain yang lebih memberikan hasil yang lebih dekat dengan harga eksaknya atau syukur-syukur dapar menemukan harga eksaknya.

Untuk memberikan hasil yang lebih memuaskan dibandingkan dengan metode grafik ini, metode numerik mengenalkan beberapa metode untuk pencarian akar persamaan non linier. Di bab yang akan datang metode-metode tersebut akan dibahas secara lebih detail. Sebagai gambaran sekilas, dengan menggunakan metode Newton Raphson, proses pencarian harga *x* dapat ditampilkan pada tabel (1-1).



Gambar 1.1. Perpotongan antara grafik fungsi dan



Gambar 1.2. Perpotongan grafik fungsi dengan sumbu *x*

Tabel 1-1. Prose pencarian harga *x* untuk persamaan

Iterasi ke	harga *x*
1	1.000
2	0.368
3	0.692
4	0.500
5	0.606
6	0.545
7	0.579
8	0.560
9	0.571
10	0.564
11	0.568
12	0.566
13	0.567
14	0.567
15	0.567

Algoritma

Metode-metode numerik sangat diperlukan untuk memecahkan berbagai masalah yang rumit diselesaikan melalui analitis biasa. Langkah-langkah yang disusun untuk mendapatkan jawaban dari suatu permasalahan berdasarkan pada metode numerik tertentu (atau kombinasi dari metode-metode numerik) disebut dengan *algoritma.* Suatu algoritma merupakan seperangkat prosedur lengkap dan gamblang yang memberikan langkah-langkah terhadap penyelesaian suatu masalah matematis. Hasil yang diperoleh dari penyelesaian suatu masalah matematis tersebut akan dipengaruhi oleh berbagai macam sumber kesalahan (*error*). Sehingga harga yang diperoleh melalui pendekatan numerik ini tidaklah eksak.

Analisis numerik juga harus memperhatikan seberapa ketelitian yang diharapkan, mengestimasi besarnya kesalahan pembulatan dan kesalahan diskretisasi, menentukan ukuran langkah yang sesuai atau cacah iterasi yang diperlukan, menyediakan alat untuk mengecek ketelitian dan membuat alat untuk mendeteksi kemungkinan tidak konvergennya harga karena metode yang yang digunakan tidak cocok.

Efisiensi dari setiap metode numerik atau algoritma juga harus diperhatikan. Sebuah algoritma akan dihindari penggunaanya manakala dalam menyelesaikan suatu masalah harus membutuhkan waktu komputasi yang terlalu panjang. Tahap akhir penyelesaian suatu masalah matematis adalah pemrograman. Algoritma tersebut harus bisa ditransformasi menjadi seperangkat instruksi selangkah demi selangkah untuk tujuan penghitungan melalui komputer. Sehubungan dengan pemrograman yang kita buat, sekali lagi kita perlu mempertimbangkan kemampuan komputer yang kita miliki. Penggunaan matriks perlu dihindari manakala proses perhitungan memerlukan memori yang besar. Dengan demikian, kita akan memperoleh hasil seperti yang kita harapkan.

Sumber- Sumber Kesalahan

1. Kesalahan Pemotongan

Ada dua sumber kesalahan terpenting di dalam pembahasan tentang analisis numerik. Dua kesalahan tersebut adalah kesalahan pemotongan (*truncation error)* dan kesalahan pembulatan (*round-off error*). Kesalahan pemotongan disebabkan oleh pendekatan yang digunakan dalam ungkapan matematisnya. Sebagai contoh konkrit, ketika kita melakukan hampiran terhadap suatu harga di dekat harga yang telah kita ketahui, maka kita biasa menggunakan deret Taylor untuk menghampiri harga tersebut. Nah seberapa ketelitian yang kita inginkan melalui penghampiran tersebut dapat dilakukan dengan memotong deret Taylor sampai ketelitian yang kita harapkan tersebut.

Contoh 1.1

Carilah hampiran harga $y=\exp(2.1)$ di sekitar $x=2.0$. Berdasarkan perhitungan Matlab, harga hampiran yang sangat dekat dengan $e^{2.1}$ adalah 8.16616991256765

Penyelesaian

Buatlah deret Taylor untuk exp(x)

$$e^{(x_0+\Delta x)}=e^{(x_0)}+(\Delta x)e^{(x_0)}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}e^{(x_0)}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}e^{(x_0)}+\frac{(\Delta x)^4}{4!}e^{(x_0)}+\frac{(\Delta x)^5}{5!}e^{(x_0)}+\ldots$$

Apabila kita hanya menginginkan jawaban hanya sampai pada suku ketiga saja, maka pendekatan harga akan kita peroleh dengan hanya mempertimbangkan tiga suku penderetan, atau dengan kata lain

$$e^{(x_0+\Delta x)}=e^{(x_0)}+(\Delta x)e^{(x_0)}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}e^{(x_0)}$$

atau

$$e^{2.1}\simeq e^{2.0}+(0.1)e^{2.0}+\frac{(0.1)^2}{2}e^{2.0}$$
$$e^{2.1}\simeq 7.3891+(0.1)(7.3891)+(0.01)7.3891$$
$$e^{2.1}\simeq 8.16490698931837$$

Tetapi, jika kita menginginkan harga lebih teliti lagi maka kita perlu mengambil suku yang lebih banya lagi misalnya enam suku pertama. Dengan mengambil enam suku pertama deret Taylor, maka diperoleh

$$e^{2.1}\simeq 8.16616990215661$$

Perhatikan dua hasil uyang telah kita peroleh dengan pendekatan berbeda, yang satu dengan pendekatan deret hanya sampai tiga suku, sedangkan yang lainnya dengan enam suku. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa harga hampiran dengan pendekatan enam suku lebih dekat dengan harga pendekatan Matlab. Kita dapat menarik kesimpulan bahwa kesalahan harga perhitungan pertama lebih besar dibandingkan dengan kesalahan perhitungan kedua. Hal ini disebabkan oleh pemotongan suku deret Taylor pada $e^{(2.0+0.1)}$.

2. Kesalahan Pembulatan

Kesalahan pembulatan berhubungan erat dengan proses aritmatika terutama operasi penambahan, pengurangan, perkalian maupun pembagian. Keterbatasan untuk meng-*cover* seluruh hasil dari operasi matematika tersebut menyebabkan hanya sebagian angka-angka saja yang diambil atau ditampilkan. Inilah yang yang disebut sebagai kesalahan pembulatan.

Sebagai contoh konkrit, ketika kita ingin memperoleh harga sebenarnya dari π yang merupakan hasil operasi matematis dari $\frac{22}{7}$. Jika hasil operasi pembagian tersebut diinginkan tampil empat belas digit dibelakang koma, maka hasilnya adalah

$$\pi = 3.14285714285714 \tag{1-1}$$

Selanjutnya, jika kita menginginkan ada sepuluh digit angka dibelakang tanda koma, maka hasilnya akan tampak sebagai

$$\pi = 3.1428571429 \tag{1-2}$$

Dari harga pendekatan untuk π pada ungkapan (1-1) dan (1-2) terlihat dengan jelas bahwa ungkapan (1-2) adalah merupakan pembulatan angka dari (1-1). Sebaliknya, angka pendekatan pada ungkapan (1-1) juga merupakan pembulatan dari angka pendekatan yang memiliki digit angka lebih banyak dari (1-1) tersebut. Jika kita menginginkan harga hampiran hingga tujuh belas angka dibelakang koma, maka dapat ditunjukkan sebagai

$$\pi = 3.14285714285714280 \tag{1-3}$$

Untuk kedua jenis kesalahan tersebut, yaitu kesalahan yang disebabkan oleh pemotongan dan kesalahan yang diakibatkan karena pembulatan maka dapat diambil kesimpulan bahwa hasil eksak dari suatu proses matematis merupakan jumlahan dari harga hampiran dengan kesalahan perhitungannya.

$$\boxed{\textit{Harga Eksak} = \textit{Harga Hampiran} + \textit{Kesalahan}} \qquad \textbf{(1-4)}$$

Dari hubungan (1-4) tersebut dapat ditarik sebuah kesimpulan bahwa kesalahan numerik yang terjadi dari suatu proses matematis merupakan selisih dari harga sebenarnya dengan harga hampirannya

$$\boxed{\textit{Kesalahan} = \textit{Harga Eksak} - \textit{Harga Hampiran}} \tag{1-5}$$

Oleh karena sumber kesalahan tidak hanya disebabkan oleh pemotongan atau pembulatan saja, maka dikenal kesalahan relatif yang dapat didefinisikn sebagai

$$Kesalahan\ Relatif = \frac{Kesalahan\ Lokal}{Kesalahan\ Total} \times 100 \qquad (1\text{-}6)$$

Deret Taylor

Penyelesaian numerik merupakan penyelesaian hampiran dari penyelesaian eksaknya. Metode numerik didasarkan pada penghampiran fungsi dengan polinomial. Oleh sebab itu, seberapa ketelitian dari penghampiran kita terhadap suatu harga fungsi sama dengan seberapa ketelitian polinomial yang kita gunakan untuk menghampiri fungsi tersebut.

Deret Taylor merupakan deret pangkat tak berhingga untuk menghampiri sebuah fungsi di dalam suatu radius tertentu di sekitar titik yang diberikan. Dengan membandingkan antara penyelesaian eksaknya dengan hampiran polinomial fungsi, maka akan terlihat adanya selisih harga. Perbedaaan yang terjadi antara harga eksak dengan harga hampiran disebabkan oleh pemotongan yang kita lakukan terhadap ekspansi Taylor polinomial tersebut. Disini jelas bahwa sumbangan terhadap kesalahan perhitungan sudah mulai diberikan. Di dalam metode numerik, pemotongan terhadap ekspansi Taylor ini sering dilakukan mengingat esensi dari metode numerik adalah suatu penghampiran terhadap suatu harga eksak.

Sekarang, kita akan menunjukkan wujud dari ekspansi Taylor dari sebuah fungsi $f(x)$. Jika fungsi $f(x)$ analitik disekitar $x=x_0$, maka di sekitar titik $x=x_0$ dapat dihampiri oleh deret Taylor yang merupakan deret pangkat tk berhingga yaitu

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) \\ &+ \frac{(x-x_0)^4}{4!} f''''(x_0) + \frac{(x-x_0)^5}{5!} f'''''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \end{aligned} \qquad (1\text{-}7)$$

Sebagai contoh, kita akan melakukan ekspansi Taylor terhadap $\sin(x)$, $\cos(x)$ dan $\exp(-x)$ di sekitar $x=x_0$.

$$\sin(x)=\sin(x_0)+(x-x_0)\cos(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2}\sin(x_0)-\frac{(x-x_0)^3}{6}\cos(x_0)$$
$$+\frac{(x-x_0)^4}{24}\sin(x_0)+\frac{(x-x_0)^5}{120}\cos(x_0)+\cdots$$

$$\cos(x)=\cos(x_0)-(x-x_0)\sin(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2}\cos(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{6}\sin(x_0)$$
$$+\frac{(x-x_0)^4}{24}\cos(x_0)-\frac{(x-x_0)^5}{120}\sin(x_0)+\cdots$$

$$\exp(-x)=\exp(-x_0)-(x-x_0)\exp(-x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\exp(-x_0)$$
$$-\frac{(x-x_0)^3}{6}\exp(-x_0)+\frac{(x-x_0)^4}{24}\exp(-x_0)-\cdots$$

$$\exp(x)=\exp(x_0)+(x-x_0)\exp(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\exp(x_0)$$
$$+\frac{(x-x_0)^3}{6}\exp(x_0)+\frac{(x-x_0)^4}{24}\exp(x_0)+\cdots$$

$$\ln((x+1)-x_0)=\ln((x+1)-x_0)-(x-x_0)\exp(-x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\exp(-x_0)$$
$$-\frac{(x-x_0)^3}{6}\exp(-x_0)+\frac{(x-x_0)^4}{24}\exp(-x_0)-\cdots$$