BAB III

INTEGRASI NUMERIK

Integrasi numerik mengambil peranan penting dalam masalah sains dan teknik. Hal ini menginat di dalam bidang sains sering ditemukan ungkapan-ungkapam integral matematis yang tidak mudah atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitis. Disamping itu, kadang-kadang fungsi yang integralkan tidak berbentuk analitis melainkan berupa titik-titik data. Hal ini sering muncul dalam banyak aplikasi teknik. Oleh sebab itu, kehadiran analisis numerik menjadi penting manakala pendekatan analitis mengalami kebuntuan.

Dalam bab ini kita akan membahas beberapa teknik integrasi numerik yang sangat umum digunakan untuk memperoleh pendekatan integral fungsi $y(x)$ pada batas interval $[a,b]$. Secara umum, integral fungsi $y(x)$ pada interval tersebut dapat dinyatakan

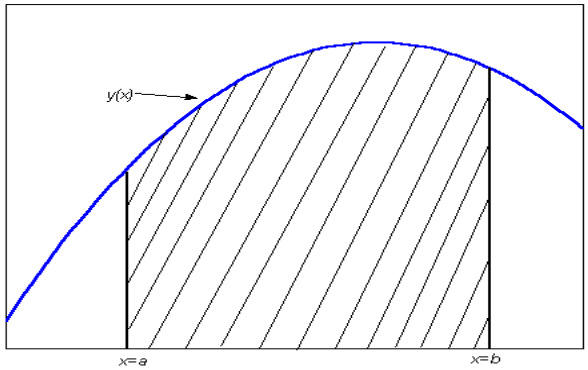
$$I=\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \tag{3-1}$$

Ungkapan (3-1) dapat diartikan sebagai integral dari fungsi $y(x)$ terhadap peubah bebas x yang dievaluasi mulai dari $x=a$ hingga $x=b$. Pendekatan numerik terhadap ungkapan integral (3-1) dapat dinyatakan sebagai

$$I(x)\approx\sum_{i=1}^{N} w_i y(x_i) \tag{3-2}$$

dengan N menyatakan jumlah segmen, $y(x_1)=y(a)$ dan $y(x_N)=y(b)$.

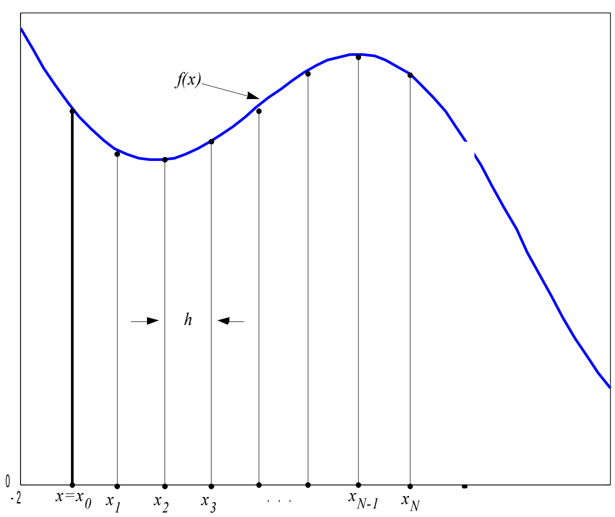
Perhatikan bahwa pendekatan numerik terhadap bentuk integral (3-1) merupakan jumlahan dari deret suku-suku dengan titik-titik x_i terbentang dari $x=a$ hingga $x=b$ dan di setiap titik x_i dievaluasi fungsi $y(x)$. Faktor x_i ini sering disebut sebagai titik simpul (*node*). Sedangkan, faktor pengali w_i disebut *faktor bobot.*



Gambar 3.1 Deskripsi bentuk integral $I=\int^{b} y(x)\,dx$

3.1 Metode Klasik

Dalam pasal ini, kita akan membahas beberapa metode integrasi numerik yang sering digunakan dalam mendekati ungkapan integral fungsi. Untuk lebih jelasya, marilah kita tinjau sebuah fungsi $f(x)$ yang dintegralkan dengan batas bawah $x = x_0$ dan batas atas $x = x_N$ seperti terlihat pada gambar 3.2.



Gambar 3.2 Integrasi numerik menggunakan lebar segmen h

Dari gambar 3.2 kita membubuhkan beberapa notasi di bagian absis yaitu x_0, x_1, $x_3, \ldots, x_N$ dengan lebar segmen sebesar *h,* sehingga kita dapat definisikan

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{, dengan} \quad i = 1,2,3,\ldots, N \tag{3-3}$$

Dengan demikian harga fungsi $f(x)$ pada $x = x_i$ adalah

$$f(x_i) \equiv f_i \tag{3-4}$$

Selanjutnya, kita akan melakukan integrasi fungsi $f(x)$ yang dibatasi oleh batas bawah $x = a$ dan batas atas $x = b$. Ungkapan integrasi numerik dengan menggunakan harga-harga fungsi pada ujung-ujungnya, yaitu $f(a)$ dan $f(b)$ biasa disebut *metode tertutup.* Dalam gambar 3.2, penggunaan metode tertutup dapat dilakukan dengan memilih batas bawah $x = x_0$ dan batas atas $x = x_N$. Akan tetapi, kadang-kadang ditemukan sebuah fungsi dimana salah satu ujungnya atau bahkan keduanya sangat sulit untuk dihitung (misalnya, fungsi yang akan dihitung mendekati suatu harga nol atau singularitas). Oleh sebab itu, kita membutuhkan metode baru yang disebut dengan *metode terbuka.* Metode terbuka ini akan mengestimasi integral dengan menggunakan titik-titik simpul (*node*) x_i yang berada diantara simpul-simpul batas yaitu x_a dan x_b. Dalam gambar 3.2 metode terbuka digunakan untuk mendekati integral fungsi dengan memilih batas bawah integrasi $x = x_1$ dan batas atas $x = x_{N-1}$.

3.1.1 Metode Trapesium

Sebagaimana namanya, metode trapezium merupakan metode integrasi numerik yang didasarkan pada penjumlahan segmen-segmen berbentuk trapesium. Apabila sebuah integral didekati dengan metode trapesium dengan satu segmen saja, maka dapat dituliskan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + E \tag{3-5}$$

Suku pertama pada ruas kanan adalah aturan trapezium yang kita maksudkan, sedangkan suku kedua yang dinyatakan dengan *E* adalah kesalahan yang dimiliki oleh metode ini.

Untuk memperoleh ungkapan metode trapesium (3-5) dan untuk mengetahui seberapa besar kesalahan yang dimiliki oleh metode ini, maka kita perlu melakukan ekspansi deret Taylor luasan $A(x)$ yang didefinisikan sebagai

$$A(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{3-6}$$

Ekspnasi deret Taylor untuk luasan $A(x)$ selanjutnya adalah

$$A(x)=A(x_0)+(x-x_0)A'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}A''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{6}A'''(x_0)+... \tag{3-7}$$

dengan definisi (3-6) maka diperoleh

$$A'(x)=f(x),\ A''(x)=f'(x),\ A'''(x)=f''(x) \tag{3-8}$$

Selajutnya, ungkapan (3-6) untuk batas bawah integrasi x_0 dan batas atas x_0+h menjadi

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx &= 0+hA'(x_0)+\frac{h^2}{2}A''(x_0)+\frac{h^3}{6}A'''(x_0)+...\\ &= hf(x_0)+\frac{h^2}{2}f'(x_0)+\frac{h^3}{6}f''(x_0)+...\end{aligned} \tag{3-9}$$

Dengan mendekati ungkapan turunan pertama dengan beda hingga maju (*forward difference*)

$$f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{3-10}$$

maka persamaan (3-6) akan mengambil bentuk

$$I=hf(x_0)+\frac{h^2}{2}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+O(h^3) \quad . \tag{3-11}$$

Dengan demikian kita memperoleh pendekatan integral dengan teknik integrasi trapesium adalah

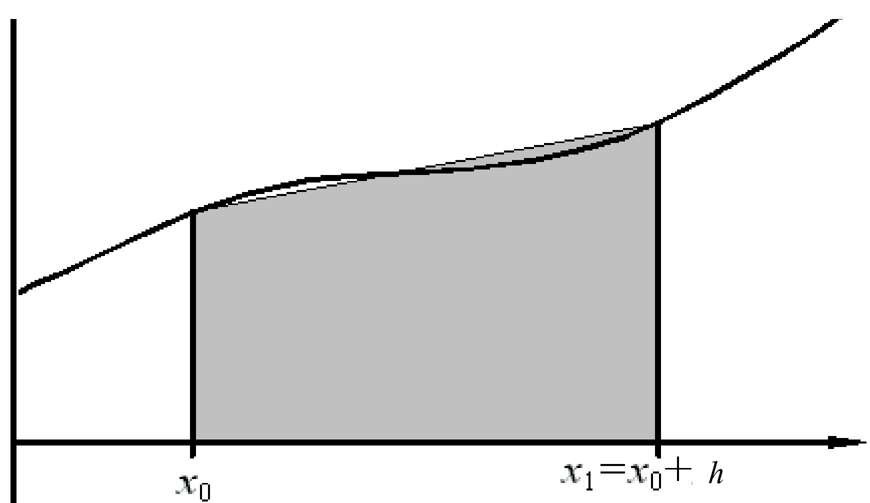
$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\approx\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_0+h)\right] \tag{3-12}$$

Dari ungkapan (3-11) dapat diketahui bahwa pendekatan integrasi dengan aturan trapesium memiliki kesalahan yang sebanding dengan $(h)^3$. Oleh sebab itu, jika kita membagi dua terhadap h maka kesalahan hasil integrasi akan tereduksi hingga 1/8 nya. Akan tetapi, ukuran domainnya juga terbagi menjadi dua, sehingga dibutuhkan aturan trapesium lagi untuk mengevaluasinya, selanjutnya sumbangan hasil integrasi tiap domain dijumlahkan. Hasil akhirnya memiliki kesalahan 1/4 nya bukan lagi 1/8 nya.

Untuk memperoleh ungkapan yang lebih teliti mengenai kesalahan pada metode ini, maka marilah kita lakukan perhitungan lebih teliti lagi. Jika kesalahan pendekatan dinyatakan sebagai *E,* maka

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_0+h)\right] \\ &= \left[h f(x_0)+\frac{h^2}{2}f'(x_0)+\frac{h^3}{6}f''(x_0)+\ldots\right] - \\ &\quad \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_0)+h f'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+\frac{h^3}{6}f'''(x_0)+\ldots\right] \\ &\approx -\frac{1}{12}h^3 f''(x_0) \end{aligned} \qquad (3\text{-}13)$$

Secara grafis ungkapan (3-12) dapat digambarkan seperti pada gambar (3-3)



Gambar 3.3. Deskripsi secara grafis aturan trapesium

Ungkapan (3-12) adalah aturan trapezium untuk satu segmen. Untuk daerah yang dibagi atas *n* segmen, maka ungkapan (3-12) dapat dinyatakan sebagai

$$\int_{x_0}^{x_0+Nh} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[(f_0+f_1)+(f_1+f_2)+...+(f_{N-2}+f_{N-1})+(f_{N-1}+f_N)\right] \qquad (3\text{-}14a)$$

atau jika ungkapan (3-14a) disederhanakan, maka akan menjadi

$$\int_{x_0}^{x_0+Nh} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0+2f_1+2f_2+2f_3+2f_{N-3}+2f_{N-2}+2f_{N-1}+f_N\right] \qquad (3\text{-}14b)$$

atau secara umum dinyatakan sebagai

$$\int_{x_0}^{x_0+Nh} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0+f_N+2\sum_{n=1}^{N-1} f_n\right] \qquad (3\text{-}14c)$$

Algoritma program untuk aturan trapesium ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

- Mendefinisikan fungsi yang akan diintegrasikan
- Menentukan batas bawah *b* dan batas atas *a* integrasi
- Menghitung lebar segmen yaitu $h=\dfrac{b-a}{N}$
- Inisialisasi (memberikan harga awal) fungsi yang diintegrasikan yaitu

  I=f(a)+f(b)
- Menghitung *I* untuk *n=1* hingga *n=N-1*
- Mencetak hasil perhitungan

Contoh soal 3-1.

Gunakan aturan trapesium satu segmen, dua segmen dan empat segmen untuk ungkapan integral

$$\int_0^1 (4\mathrm{x}-x^2)\,dx$$

kemudian hitung kesalahan perhitungan dari masing-masing pendekatan!

Penyelesaian

Harga eksak untuk ungkapan integral tersebut adalah 1.6667. Harga eksak ini berfungsi untuk memperoleh perbandingan kesalahan antara perhitungan secara analitik dengan hasil pendekatan numerik.

- Pendekatan integrasi dengan menggunakan satu segmen

  Jika batas bawah $a = 0$ dan batas atas $b = 1$, maka lebar segmen dapat ditentukan dengan

  $h = \dfrac{b - a}{N}$, karena $N = 1$ maka lebar segmen $h = 1$, sehingga

  pada $x_0 = 0$, $f_0 = [4(0) - (0)^2] = 0$

  $x_1 = 1$, $f_1 = [4(1) - (1)^2] = 3$

  Ungkapan (3-12) selanjutnya menjadi $I = \dfrac{h}{2}[f_0 + f_1]$

  Jadi $I = \dfrac{h}{2}[f_0 + f_1] \equiv \dfrac{1}{2}[0 + 3] = 1.5$

  Kesalahan hasil pendekatan integrasinya : $\left|\dfrac{1.6667 - 1.5000}{1.6667}\right| \times 100\% = 10.002\%$

- Pendekatan integrasi dengan menggunakan dua segmen

  lebar segmen untuk pendekatan ini adalah $h = \dfrac{b - a}{N} \equiv \dfrac{1 - 0}{2} = 0.5$

  pada $x_0 = 0$, $f_0 = [4(0) - (0)^2] = 0$

  $x_1 = 0 + 0.5 = 0.5$, $f_1 = [4(0.5) - (0.5)^2] = 1.75$

  $x_2 = 0 + 2(0.5) = 1$, $f_2 = [4(1) - (1)^2] = 3$

  Ungkapan integrasi trapesium (3-12) menjadi $I = \dfrac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + f_2]$

  diperoleh $I = \dfrac{0.5}{2}[0 + 2(1.75) + 3.0] = 1.6250$.

  Kesalahan pendekatan integrasinya adalah $\left|\dfrac{1.6667 - 1.625}{1.6667}\right| \times 100\% = 2.5019\%$

- Pendekatan integrasi dengan menggunakan empat segmen

  lebar segmen integrasinya $h = \dfrac{b - a}{N} \equiv \dfrac{1 - 0}{4} = 0.25$,

  pada $x_0 = 0$, $f_0 = [4(0) - (0)^2] = 0$

  $x_1 = 0 + 0.25 = 0.25$, $f_1 = [4(0.25) - (0.25)^2] = 0.9375$

  $x_2 = 0 + 2(0.25) = 0.5$, $f_2 = [4(0.5) - (0.5)^2] = 1.75$

$$x_3 = 0 + 3(0.25) = 0.75 \quad , \quad f_3 = [4(0.75) - (0.75)^2] = 2.4375$$

$$x_4 = 0 + 4(0.25) = 1 \quad , \quad f_4 = [4(1) - (1)^2] = 3$$

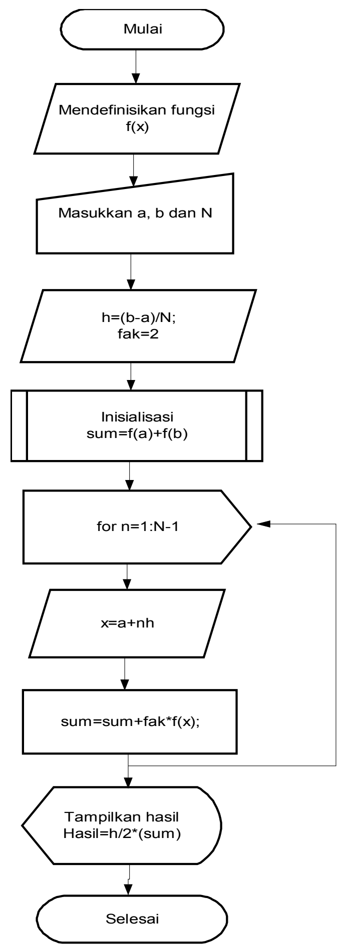
Selanjutnya ungkapan integrasi (3-12) menjadi $I = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4]$,

diperoleh

$$I = \frac{0.25}{2}[0 + 2(0.9375) + 2(1.75) + 2(2.4375) + 3.0] = 1.6563$$

Kesalahan hasil pendekatan integrasinya : $\left|\frac{1.6667 - 1.6563}{1.6667}\right| \times 100\% = 0.624\%$

Kalau kita perhatikan dari ketiga hasil yang telah diperoleh di atas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa dengan memperbanyak jumlah langkah maka akan diperoleh hasil yang semakin dekat dengan hasil eksaknya. Namun, yang perlu disadari juga bahwa dengan memperbanyak jumlah langkah, maka proses perhitungannyapun akan semakin membutuhkan waktu lebih lama. Gambar 3.4 ditunjukkan bagan alir program komputer untuk metode trapesium.



Gambar 3.4 Bagan alir metode trapesium

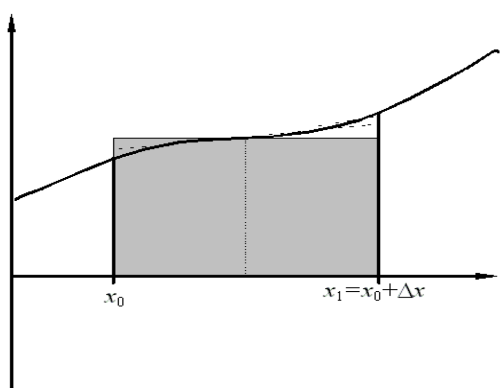
Selanjutnya, di bawah ini diberikan contoh program komputer untuk aturan trapesium untuk melakukan pendekatan hasil pada $\int_0^1 (4\mathrm{x} - x^2)\, dx$

```
%Program Aturan_Trapesium
f=inline('4*x-x^2','x');
hasil_eksak=1.6667;
a=input('masukkan batas bawah integrasi :');
b=input(' masukkan batas atas integrasi :');
N=input('masukkan jumlah segmen N :');
h=(b-a)/N;
sum=f(a)+f(b);
   fak=2
       for i=1:N-1
```

```
            x=a+i*h;
            sum=sum+2*f(x)
        end
hasil_numerik=sum*h/2.;
selisih=hasil_eksak-hasil_numerik;
kesalahan=abs(selisih/hasil_eksak);
fprintf('%f     %f',hasil_numerik,kesalahan);
```

3.1.2 Aturan Titik Tengah

Pada dasarnya, aturan titik tengah diperoleh degan cara yang sama dengan aturan trapesium. Dengan mengevaluasi fungsi $f(x)$ pada titik tengah setiap interval, maka kesalahannya akan lebih kecil dibandingkan dengan aturan trapesium. Gambar (3-5) memberikan tafsiran grafis terhadap pendekatan ini.

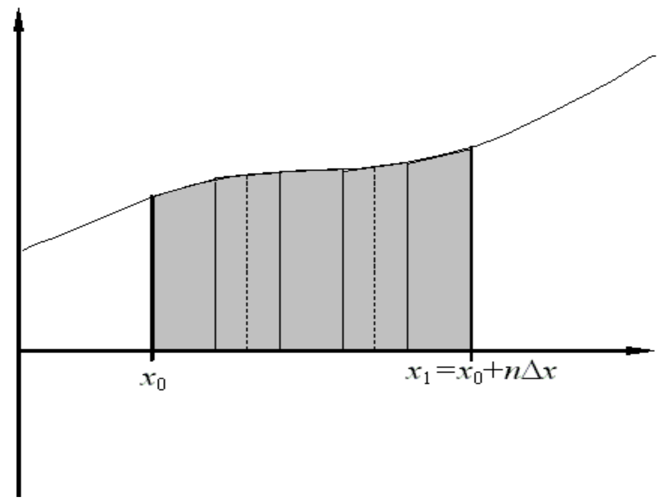


Gambar 3.5 Tafsiran grafis aturan titik tengah

Kita dapat mereduksi kesalahan dari metode ini dengan cara membagi interval x_0 hingga x_1 menjadi n segmen yang lebih kecil. Aturan titik tengah banyak segmen ini selanjutnya dapat dinyatakan menjadi

$$\int_{x_0}^{x_0+Nh} f(x)dx \approx h\sum_{n=0}^{N-1} f\left(x_0+\left(n+\frac{1}{2}\right)h\right) \qquad (3\text{-}15)$$

Gambar (3-7) memberikan interpretasi secara grafis terhadap metode titik tengah dengan banyak segmen.



Gambar 3.6 Interpretasi grafis metode titik tengah gabungan

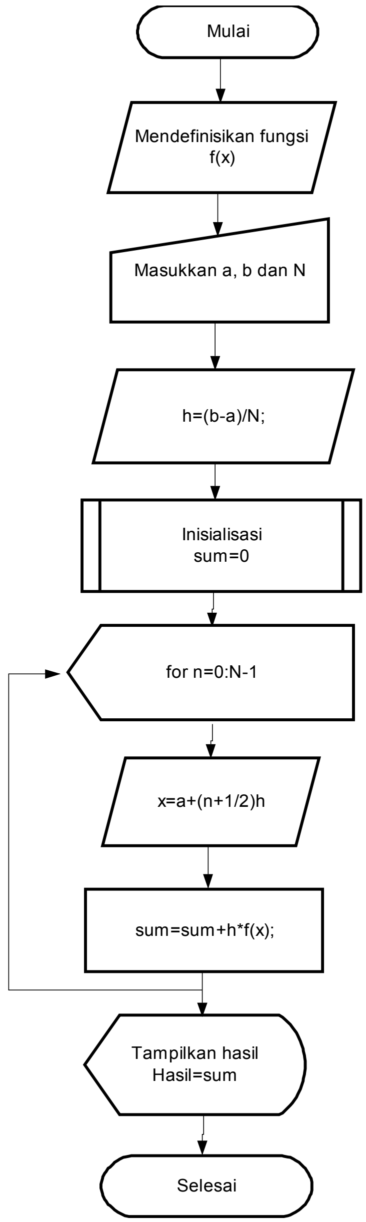
Algoritma program untuk aturan titik tengah dapat dinyatakan sebagai berikut:

- Mendefinisikan fungsi yang akan diintegrasikan
- Menentukan batas bawah *b* dan batas atas *a*
- Menghitung lebar segmen yaitu $h = \dfrac{b - a}{n}$
- Inisialisasi (memberikan harga awal) fungsi yang diintegrasikan yaitu

  sum=0
- Menghitung jumlahan dari *i=0* hingga *i=n-1*

  $sum = sum + f\left(a + \left(i + 1/2\right)h\right)$
- Menghitung hasil integrasi, yaitu $I = h * sum$
- Mencetak hasil perhitungan

Diagram alir untuk program komputer titik tegah dapat dilihat pada gambar 3.7.



Gambar 3.7 Diagram alir untuk program komputer titik tegah

Kesalahan Metode TitikTengah

Kesalahan pada metode integrasi titik tengah dapat diperoleh sebagai berikut.

Pertama, ekspansi deret Taylor untuk $\int_{x_0}^{x_0-h} f(x)dx$ dan $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$ diperoleh

$$\int_{x_0}^{x_0-h} f(x)dx = -hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \ldots \qquad \text{(3-16a)}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \ldots \qquad \text{(3-16b)}$$

Kemudian dengan mengurangkan (3-16b) terhadap (3-16a) diperoleh

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_0-h} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx + \int_{x_0-h}^{x_0} f(x)dx = \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx \\ &= 2hf(x_0) + \frac{2h^3}{3!} f''(x_0) + \frac{2h^5}{5!} f^{iv}(x_0) + \ldots \end{aligned} \qquad \text{(3-17a)}$$

sehingga

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = hf(x_0) + \frac{h^3}{3!} f''(x_0) + \frac{2h^5}{5!} f^{iv}(x_0) + \ldots \qquad \text{(3-17b)}$$

dengan mengambil $x_{mk} = (x_0 + x_0 + h)/2 \equiv x_0 + \frac{1}{2}$, maka

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - hf(x_{mk}) = \frac{2h^3}{3!(2)^3} f''(x_0) + \frac{2h^5}{5!} f^{iv}(x_0) + \ldots \qquad \text{(3-17c)}$$

atau kesalahan untuk metode integrasi titik tengah

$$E \approx \frac{h^3}{24} f''(x_{mk}) \qquad \text{(3-18)}$$

Contoh soal 3.2

Hitunglah integral dibawah ini menggunakan aturan titik tengah dengan satu segmen, dua segmen dan empat segmen

$$\int_0^1 (4\text{x} - x^2)\, dx$$

kemudian hitung kesalahan perhitungan dari masing-masing pendekatan!

Penyelesaian

Hasil eksak untuk bentuk integral tersebut adalah 1.6667.

- Untuk pendekatan integrasi satu segmen lebar segmen $h=\frac{b-a}{N}=\frac{(1-0)}{1}=1$

Ungkapan (3-14) selanjutnya menjadi $\int f(x)dx \approx hf(a+0.5\mathrm{h})$. Kemudian kita akan mengevaluasi fungsi untuk tiap simpul (dalam kasus ini hanya ada satu simpul)

$f_0 \equiv f(0.5)=4(0.5)-(0.5)^2=1.75$, sehingga diperoleh

$$\int_0^1 (4\mathrm{x}-x^2)\,dx \approx (1)\left[4(0.5)-(0.5)^2\right]=1.75 \ .$$

Kesalahan yang diberikan oleh integrasi ini adalah

$$\left|\frac{1.6667-1.75}{1.6667}\right| \times 100\% = 4.9979\%$$

- Untuk pendekatan integrasi dua segmen

lebar segmen $h=\frac{1-0}{2}=0.5=\frac{(1-0)}{2}=0.5$

Ungkapan (3-14) selanjutnya menjadi $\int f(x)dx \approx h\{f(a+0.5\mathrm{h})+f(a+1.5\mathrm{h})\}$. U Kemudian dievaluasi fungsi untuk tiap simpul (dalam kasus ini hanya ada dua simpul)

$f_0 \equiv f(0.25) = 4(0.25) - (0.25)^2 = 0.9375$

$f_1 \equiv f(0.75) = 4(0.75) - (0.75)^2 = 2.4375$, sehingga diperoleh

$\int_0^1 (4\mathrm{x}-x^2)\,dx \approx (h)(f_0+f_1)=(0.5)(0.9375+2.4375)= 1.6875¿$. Kesalahan

yang diberikan oleh pendekatan ini adalah $\left|\frac{1.6667-1.6875}{1.6667}\right| \times 100\% = 1.248\%$

- Untuk pendekatan integrasi empat segmen

lebar segmen $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$

Ungkapan (3-14) selanjutnya menjadi

$\int f(x)dx \approx h\{f(a+0.5\mathrm{h})+f(a+1.5\mathrm{h})+f(a+2.0\mathrm{h})+f(a+2.5\mathrm{h})\}$. Untuk

Kemudian dilakukan evaluasi fungsi-fungsi

$f_0 \equiv f(0.125) = 4(0.125) - (0.125)^2 = 0.4844$

$f_1 \equiv f(0.375) = 4(0.375) - (0.375)^2 = 1.3594$

$f_2 \equiv f(0.625) = 4(0.625) - (0.625)^2 = 2.1094$

$f_3 \equiv f(0.875) = 4(0.875) - (0.875)^2 = 2.7344$, selanjutnya akan diperoleh

$\int (4\mathrm{x} - x^2)dx \approx (0.25)\{0.4844+1.3594+2.1094+2.7344\} = 1.6719$.

Kesalahan yang diberikan oleh pendekatan ini adalah

$$\left|\frac{1.6667 - 1.6875}{1.6667}\right| \times 100\% = 0.312\%$$

Contoh program komputer untuk metode titik tengah dapat dilihat pada contoh program dibawah ini

```
%Program Titik_Tengah
f=inline('4*x-x^2','x');
hasil_eksak=1.6667;
a=input('masukkan batas atas integrasi a:');
b=input('masukkan batas bawah integrasi b:');
N=input('masukkan jumlah segmen N:');
h=(b-a)/N;
sum=0.0;
for i=0:N-1
  x=a+(i+0.5)*h;
  sum=sum+f(x);
end
hasil_num=h*sum;
selisih=abs(hasil_eksak-hasil_numerik);
fprintf('hasil_numerik =%f,error=%f',hasil_num,selisih)
```

3.3 Metode Simpson 1/3

Metode Simpson merupakan sebuah metode alternatif pendekatan integral disamping metode trapesium dan titik tengah. Dengan menggunakan metode Simpson ini diharapkan meskipun lebar segmen h pada integrasi diambil cukup lebar, namun diharapkan akan diperoleh ketelitian yang lebih tinggi dari metode sebelumya. Dengan mengintegralkan deret Taylor sepanjang interval $2h$ dan mengurangkannya dengan

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx = 2f(x_0)h + 2f'(x_0)h^2 + \frac{4}{3}f''(x_0)h^3 + \frac{2}{3}f'''(x_0)h^4 + \frac{4}{15}f^{iv}(x_0)h^5 + \ldots \tag{3-19}$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\left(f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)\frac{h^{31}}{24}f^{iv}(x_0)h^4 + \ldots \right) \left(f(x_0) + 2f'(x_0)h + 2f''(x_0)h^2 + \frac{4}{3}f'''(x_0)h^3 + \frac{2}{3}f^{iv}(x_0)h^4 + \ldots \right) - \frac{17}{30}f^{iv}(x_0)h^4 \ldots \right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_0+h) + f(x_0+2h) \right] + O(h^5)$$

Dari ungkapan (3-15) terlihat bahwa kesalahan pendekatan integrasi Simpson 1/3 adalah $O(h^5)$, sedangkan kesalahan pada aturan trapezium dan titik tengah adalah $O(h^3)$, ini berarti bahwa aturan Simpson 1/3 memiliki ketelitian dua orde lebih tinggi dibandingkan metode trapesium dan titik tengah.

Tetapi, kita akan menghitung lebih teliti lagi seberapa kesalahan yang dialami metode Simpson 1/3 ini. Untuk tujuan ini, kita harus melakukan ekspansi deret Taylor untuk ungkapan pendekatan integrasi Simpson 2 segmen

$$\frac{h}{3}\left[f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1}) \right] = \frac{h}{3}\left[f(x_k) + 4f(x_k) + f(x_k) + \frac{2h^2}{2}f''(x_k) + \frac{2h^4}{4!}f^{iv}(x_k) + \ldots \right] \tag{3-20}$$

$$= 2hf(x_k) + \frac{h^3}{3}f''(x_k) + \frac{h^5}{36}f^{iv}(x_k) + \ldots$$

Ekspansi deret Taylor untuk

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = 2hf(x_k) + \frac{2h^3}{3!} f''(x_k) + \frac{2h^5}{5!} f^{iv}(x_k) + \ldots \tag{3-21}$$

Dengan mengurangkan (3-21) dari (3-20) diperoleh kesalahan untuk metode Simpson 1/3 sebesar

$$E \approx \frac{h^5}{60} f^{iv}(x_k) \tag{3-22}$$

Untuk meningkatkan ketelitian saat mengintegralkan seluruh interval yang lebih lebar, maka interval antara x_0 dan x_1 dapat dibagi menjadi n langkah. Evaluasi pada tiga titik untuk setiap subinterval memerlukan jumlah yang genap. Jumlah interval genap ini merupakan syarat yang harus dipernuhi saat kita menerapkan metode ini. Oleh sebab itu, kita harus menyatakan jumlah interval menjadi n=2m. Aturan Simpson 1/3 kemudian menjadi

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0+Nh} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big[& f(x_0) + 4f(x_0+h) + 2f(x_0+2h) + 4f(x_0+3h) + \ldots \\ & + 2f(x_0+(N-2)h) + 4f(x_0+(N-1)h) + f(x_0+Nh)\big]\end{aligned} \tag{3-16}$$

atau secara umum

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{N/2-1} f(x_{2i+1}) \sum_{i=genap}^{N/2-1} f(x_{2i}) + f(b)\right] \tag{3-17}$$

Algoritma program metode Simpson 1/3

- Definisikan fungsi yang akan diintegrasikan
- Tentukan batas bawah b dan batas atas a integrasi
- Tentukan jumlah segmen N
- Hitung lebar segmen $h = \dfrac{b-a}{N}$
- Inisialisai jumlahan $sum = f(a) + f(b)$
- Inisialisasi faktor bobot $fak = 4$

- Hitung jumlahan dari $i = 1$ hingga $i = N - 1$
  - Tentukan node tiap-tiap $x_i = a + i\,h$
  - Berikan syarat jika (*fak* = 4), maka *fak*=2
  - Hitung nilai integral $sum = sum + fak * f(x)$
- Hitung hasil akhir penjumlahan $Hasil = \frac{h}{3} * sum$

Contoh soal 3.3

Dapatkan pendekatan dari integral dibawah ini menggunakan aturan Simpson dengan 2 segmen

$$\int_0^1 (4x - x^2)\, dx$$

kemudian hitung kesalahan perhitungan dari pendekatan tersebut!

Penyelesaian

Hasil eksak untuk bentuk integral tersebut adalah 1.6667.

- Untuk pendekatan integrasi dua segmen

  Diketehui $a = 0$, $b = 1$ dan $N = 2$. Tentukan lebar segmen $h = \frac{1 - 0}{2} = 0.5$.

  Ungkapan (3-11) selanjutnya menjadi $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$.

  Kemudian kita akan mengevaluasi fungsi untuk tiap simpul (ada tiga simpul)

  $x_0 = 0$, $f_0 \equiv f(0) = 4(0) - (0)^2 = 0$

  $x_1 = 0.5$, $f_1 \equiv f(0.5) = 4(0.5) - (0.5)^2 = 1.75$

  $x_2 = 1$, $f_2 \equiv f(1.0) = 4(1.0) - (1.0)^2 = 3.0$

  Selajutnya akan diperoleh pendekatan integrasi

  $$\int (4x - x^2)\, dx \approx \frac{0.5}{3}[0 + 4(1.75) + 3.0] = 1.6667 \text{ .}$$

  Kesalahan yang diberikan oleh pendekatan ini adalah

  $$\left|\frac{1.6667 - 1.6667}{1.6667}\right| \times 100 = 0$$

Contoh Soal 3.4

Hitunglah pendekatan dari integral $\int_1^3 e^x\,dx$ menggunakan metode Simpson 1/3 dengan 4 segmen. Hasil eksaknya diketahui sama dengan 17.3673.

Penyelesaian

- Untuk pendekatan integrasi 4 segmen

  Diketehui $a=1$, $b=3$ dan $N=4$, jadi lebar segmen $h=\frac{3-1}{4}=0.5$.

  Evaluasi fungsi untuk tiap simpul (ada lima simpul)

  $x_0=1$, $f_0 \equiv f(x_0)=e^1=2.7183$

  $x_1=1+0.5=1.5$, $f_1=f(1.5)=e^{1.5}=4.4817$

  $x_2=1+2(0.5)$, $f_2=f(2.0)=e^2=7.3891$

  $x_3=1+3(0.5)=2.5$, $f_3=f(2.5)=e^{2.5}=12.1825$

  $x_4=3.0$, $f_4=f(3.0)=e^3=20.0855$

  Dari ungkapan (3-11) diperoleh

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 e^x\,dx &\approx \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4\right] \\
&\approx \frac{0.5}{3}\left[2.7183+4(4.4817)+2(7.3891)+4(12.1825)+20.0855\right] \\
&\approx 17.3731
\end{aligned}
$$

  Kesalahan yang diberikan oleh pendekatan ini adalah

$$\frac{|17.3673-17.3731|}{17.3673}=0.000337=0.0337\ \%$$

Dari hasil yang diperoleh pada contoh soal 3.3, kita dapat ketahui bahwa dengan mebgambil dua segmen saja, metode Simpson 1/3 sudah dapat memperoleh hasil yang eksak. Nah, tetapi kita harus memahami kenapa hal ini dapat terjadi. Jawaban yang dapat kita berikan mengapa ini terjadi adalah karena integran dari bentuk integral tersebut merupakan polinomial orde dua. Sedangkan, metode Simpson 1/3 sebenarnya dapat diturunkan melalui interpolasi lagrange orde kedua. Oleh sebab itu, metode Simpson 1/3 akan memberikan hasil yang eksak apabila digunakan untuk mendekati integral fungsi kuadrat.

Misalnya ditinjau sebuah polinomial orde dua yang diasumsikan $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, panjang segmen $h = \frac{b-a}{2}$. Selanjutnya dilakukan integrasi terhadap polinomial Lagrange orde dua, yaitu

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f_2(x)\,dx = &\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)\right]dx + \int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)\right]dx \\ &+\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx\end{aligned} \tag{3-18}$$

Dari ungkapan integral tersebut, dengan mudah akan diperoleh

$$\int_{x_0}^{x_2} f_2(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \tag{3-19}$$

Ungkapan (3-19) sebenarnya juga dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut. Dimisalkan $x = x_0 + nh$, dalam kasus demikian oleh karena $x_1 - x_0 = h$, maka $x - x_1 = (n-1)h$. Dengan cara yang sama diperoleh $x - x_2 = (n-2)h$.

- Untuk suku pertama integral, yaitu

$$\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)\right]dx \tag{3-20a}$$

dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{h}{2}f(x_0)\int_0^2 (n-1)(n-2)dn = \frac{h}{2}f(x_0)\left[\frac{n^3}{3} - \frac{3n^2}{2} + 2n\right]_0^2 = \frac{h}{3}f(x_0) \tag{3-20b}$$

- Untuk suku kedua integral, yaitu

$$\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)\right]dx \tag{3-21a}$$

dapat disederhanakan menjadi

$$-h\,f(x_1)\int_0^2 n(n-2)\,dn = -h\,f(x_1)\left[\frac{1}{3}n^3 - n^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}h\,f(x_1) \tag{3-21b}$$

- Untuk suku ketiga integral, yaitu

$$\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right] \tag{3-22a}$$

disederhanakan menjadi

$$\frac{h}{2}f(x_2)\int_0^2 n(n-1)\,dn=\frac{h}{2}f(x_2)\left[\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2\right]_0^2=\frac{4}{3}h\,f(x_2)=\frac{1}{3}h\,f(x_2) \tag{3-22b}$$

Dari (3-18) diperoleh pendekatan integral dengan metode Simpson dua segmen berbentuk

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] \tag{3-23}$$

Kesalahan Pembulatan

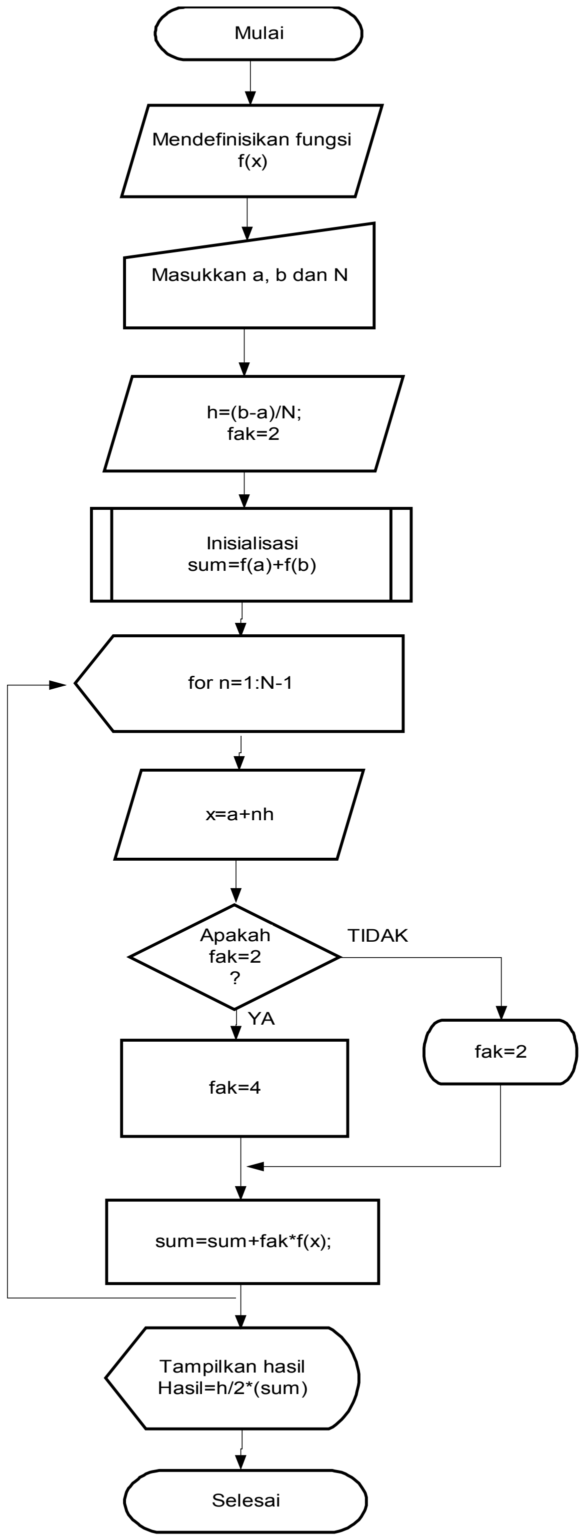
Sumber kesalahan pembulatan yang dialami oleh metode Simpson pada dasarnya sama dengan kesalahan pembulatan yang dialami pada metode trapesium maupun metode titik tengah. Secara umum, kita berharap bahwa kesalahan relatif terhadap pembulatan yang dialami oleh beberapa integrasi numerik adalah orde dari *h*. Untuk tahu kenapa demikian, sekarang kita kembali ke bentuk pendekatan dari ungkapan integral yaitu,

$$\int f(x)\,dx\approx\sum_{i=1}^{N} w_i\,f(x_i) \tag{3-24}$$

Dari ungkapan pendekatan integral tersebut, secara garis besar dapat diperinci sumber-sumber kesalahan pembulatan yang muncul yaitu,

- Kesalahan yang muncul karena perkalian antara faktor bobot w_i dengan evaluasi fungsi-fungsi $f(x_i)$.
- Kesalahan yang muncul akibat penambahan antar suku-suku.
- Kesalahan akibat evaluasi fungsi-fungsi $f(x_i)$.

Gambar 3.8 ditunjukkan bagan alir dari program komputer untuk metode Simpson 1/3. Contoh implementasi program Simpson 1/3 disajikan untuk contoh fungsi $\exp(x)$ dengan batas bawah integrasi 1 dan batas atas integrasi 3.



Gambar 3.8 Bagan alir metode Simpson 1/3

```
%Program Simpson 1/3
f=inline('exp(x)','x');
b=input('masukkan batas atas integrasi b:');
a=input('masukkan batas bawah integrasi a:');
N=input('masukkan jumlah segmen N:');
hasil_eksak=f(b)-f(a);
if(N < 2)
    fprintf('Jumlah segmen >=2.Ulangi!!');
    break;
end;
if (mod(N,2)~=0)
    N=N+1;
end;
h=(b-a)/N;
sum=f(a)+f(b);
fak=2;
for i=1:N-1
  x=a+i*h;
  if(fak==2)
      fak=4;
  else
      fak=2;
  end
  sum=sum+fak*f(x);
end
hasil_num=h/3*sum;
error=abs(hasil_eksak-hasil_num);
fprintf('hasil numerik =%f, error=%f',hasil_num,error)
```

Aturan Simpson 3/8

Untuk meningkatkan ketelitian yang telah diberikan oleh metode Simpson 1/3, maka diperkenalkan metode Simpson yang lain yaitu metode Simpson 3/8. Metode Simpson 1/3 memerlukan jumlah langkah yang genap untuk menerapkan metodenya. Dengan kata lain, jumlah langkah untuk metode Simpson 1/3 harus dapat dibagi dengan 2. Lain halnya dengan metode Simpson 3/8, metode ini tidak mensyaratkan jumlah langkah genap ataupun ganjil melainkan jumlah langkah yang dapat dibagi dengan 3.

Ungkapan metode Simpson 3/8 untuk 3 segmen dinyatakan oleh

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right] \tag{3-25}$$

Sedangkan untuk banyak segmen

$$\int_{x_0}^{x_0+Nh} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)\right.$$
$$\left.+2f(x_3)+\ldots+2f(x_{N-3})+3f(x_{N-2})+3f(x_{N-1})+f(x_0+Nh)\right] \tag{3-26a}$$

atau secara umum (3-26) dapat dinyatakan sebagai

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(a)+3\sum_{n=0}^{N/3-1} f(x_{3N+1})+3\sum_{n=0}^{N/3-1} f(x_{3N+2})\right.$$
$$\left.+2\sum_{n=1}^{N/3-1} f(x_{3N})+f(b)\right] \tag{3-26b}$$

Dibawah ini diberikan algoritma metode Simpson 3/8

Algoritma metode Simpson 3/8

- Definisikan fungsi yang akan diintegrasikan
- Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b) integrasi
- Tentukan jumlah segmen N (*n* harus kelipatan 3)
- Hitung lebar segmen $h = \dfrac{b-a}{n}$
- Inisialisai $sum = f(a) + f(b)$
- Hitung untuk $i = 1$ hingga $i = n - 1$

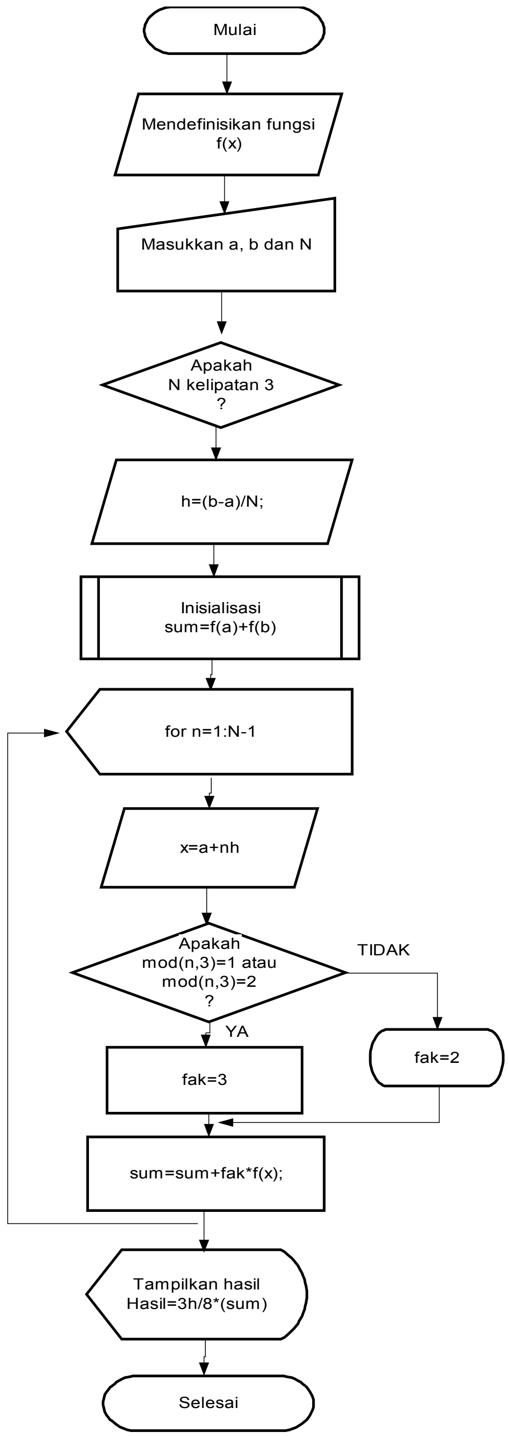
  $x = a + i * h$

  - Jika (mod(i,3)=1 or mod(i,3)=2), maka

    fak=3
  - Jika syarat di atas tidak terpenuhi, maka *fak*=2
- Hitung nilai integral $sum = sum + fak * f(x)$
- Tulis hasilnya perhitungan $Hasil = \dfrac{3h}{8} * sum$

Contoh program Simpson 3/8 disajikan di bawah ini untuk fungsi exp(x) dengan batas bawah integrasi a dan batas atas integrasi b.

```
 %Program Simpson 3/8
 f=inline('4*x-x^2','x');
 fd=inline('2*x^2-1/3*x^3','x');
 a=input('masukkan batas bawah integrasi a:');
 b=input('masukkan batas atas integrasi b:');
 N=input('masukkan jumlah segmen N:');
 hasil_eksak=fd(b)-fd(a);
 if(N < 3)
     fprintf('Jumlah segmen >=3.Ulangi!!');
     break;
 end;
 h=(b-a)/N;
 sum=f(a)+f(b);
 for i=1:N-1
   x=a+i*h;
   if(mod(i,3)==2 | mod(i,3)==1)
       fak=3;
   else
       fak=2;
   end
   sum=sum+fak*f(x);
 end
hasil_num=3/8*h*sum;
error=abs(hasil_eksak-hasil_num);
fprintf('hasil numerik =%f, error=%f',hasil_num,error)
```



Gambar 3.8 Bagan alir program Simpson 3/8

3.2 Integrasi Kuadratur

Salah satu metode paling mudah untuk menghitung integral adalah dengan mengevaluasi fungsi tersebut pada sejumlah lokasi dan kemudian menggunakan hasilnya untuk menghampiri integral tersebut. Pada setiap lokasi titik yang telah ditentukan tersebut bersesuaian dengan faktor bobot tertentu. Selanjutnya kita dapat menjumlahkannya

$$I \approx \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \tag{3-27}$$

Dimana x_i merupakan titik-titik evaluasi dan w_i adalh faktor bobot yang bersesuaian dengan titik ke-*i*.

Untuk menerapkan ungkapan (3-27) dalam pendekatannya terhadap sebuah integral, maka perlu ditentukan titik evaluasi dan faktor bobot yang bersesuaian tersebut. Untuk maksud tersebut, maka kita mempersyaratkan bahwa persamaan (3-27) harus memenuhi integral fungsi-fungsi antara lain

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ f(x) &= x \\ f(x) &= x^2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3-28}$$

Dengan mensubstitusi fungsi-fungsi pada (3-28) ke persamaan (3-27) akan memberikan beberapa persamaan simultan dalam w_i yang dapat kita pecahkan untuk beberapa faktor bobot.

Contoh

Penyelesaian paling sederhana untuk persamaan (3-27) diperoleh jika jumlah titik yang digunakan hanya dua buah. Jadi, diperoleh empat persamaan simultan yaitu

Untuk $f(x) = 1$,

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 = w_1 + w_2$$

Untuk $f(x) = x$,

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x \; dx = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

Untuk $f(x) = x^2$,

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x^2 \; dx = \frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2$$

Untuk $f(x) = x^3$

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x^3 \; dx = 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3$$

Selanjutnya, kita telah memperoleh empat persamaan simultan yaitu

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 2 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 &= 0 \\ w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 &= \frac{2}{3} \\ w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 &= 0 \end{aligned}$$

Jika empat persamaan simultan tersebut diselesaiakan maka akan diperoleh harga-harga

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2 = 1 \\ x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}5773503 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773503 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi titik-titik yang diperoleh serta faktor bobotnya, maka ungkapan (3-27) menjadi

$$I \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Selanjutnya, kita akan mencari titik-titik dan faktor bobot yang bersesuaian untuk pendekatan integrasi Gauss tiga titik. Seperti halnya pada pencarian titik-titik dan faktor bobot pada integrasi Gauss dua titik, maka persamaan (3-27) harus memenuhi hubungan sebagai berikut

Untuk $f(x) = 1$,

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2 = w_1 + w_2 + w_3$$

Untuk $f(x) = x$,

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) = \int_{-1}^{1} x\ dx = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3$$

Untuk $f(x) = x^2$,

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) = \int_{-1}^{1} x^2\ dx = \frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2$$

Untuk $f(x) = x^3$

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) = \int_{-1}^{1} x^3\ dx = 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 + w_3 x_3^3$$

Untuk $f(x) = x^4$,

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) = \int_{-1}^{1} x^4\ dx = \frac{2}{5} = w_1 x_1^4 + w_2 x_2^4 + w_3 x_3^4$$

Untuk $f(x) = x^5$

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) = \int_{-1}^{1} x^5\ dx = 0 = w_1 x_1^5 + w_2 x_2^5 + w_3 x_3^5$$

Dari enam ungkapan di atas, maka kita telah memperoleh enam persamaan simultan linier yaitu

$$\begin{aligned}
&w_1 + w_2 + w_3 = 2 \\
&w_1 x_1 + w_2 x_2 + + w_3 x_3 = 0 \\
&w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + + w_3 x_3^2 = \frac{2}{3} \\
&w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 + w_3 x_3^3 = 0 \\
&w_1 x_1^4 + w_2 x_2^4 + + w_3 x_3^4 = \frac{2}{5} \\
&w_1 x_1^5 + w_2 x_2^5 + w_3 x_3^5 = 0
\end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan enam persamaan simultan linier di atas, maka akan diperoleh harga untuk titik-titik dan faktor bobot yang bersesuaian yaitu

$$\begin{aligned}
&x_1 = -0{,}774596669 \qquad &w_1 = 0{,}555555556 \\
&x_2 = 0 \qquad &w_2 = 0{,}888888889 \\
&x_3 = +0{,}774596669 \qquad &w_3 = 0{,}555555556
\end{aligned}$$

Tabel 3.1 diberikan harga titik-titik Gauss dan faktor bobot yang bersesuaian untuk beberapa jumlah titik.

Tabel 3.1 Daftar titik-titik Gauss dan faktor bobot yang bersesuaian

Jumlah Titik	$\pm\ x_i$	w_i
$N = 2$	0,577350269	1,000000000
$N = 3$	0	0,888888889
	0,774596669	0,555555556
$N = 4$	0,339981043	0,652145155
	0,861136312	0,347854845
$N = 5$	0	0,568888889
	0,538469310	0,478628670
	0,906179846	0,236926885
$N = 6$	0,238619186	0,467913935
	0,661209387	0,360761573
	0,932469514	0,171324492
$N = 8$	0,183434642	0,362683783
	0,525532410	0,313706646
	0,796666478	0,222381034
	0,960289857	0,101228536
$N = 10$	0,148874339	0,295524225
	0,433395394	0,269266719
	0,679409568	0,219086363
	0,865063367	0,149451349
	0,973906528	0,066671344

Yang perlu diperhatikan adalah bahwa batas-batas integrasi yang terpenuhi untuk metode kuadratur ini adalah -1 hingga +1. Hal ini tentunya menjadikan penylesaiaan dengan metode ini kurang luwes. Oleh sebab itu, perlu dilakukan transformasi terhadap batas bawah dan batas atas integrasi tersebut, misalnya a dan b masing-masing untuk batas bawah dan batas atas integrasi. Untuk itu, kita menganggap bahwa terdapat hubungan antara x_t dengan x melalui hubungan

$$x = \frac{2x_t - a - b}{b - a} \tag{3-29}$$

dimana x_t merupakan kooordinat origin yang berada dalam interval $[a, b]$ atau $a \leqslant x_t \leqslant b$, sedangkan x adalah koordinat ternormalisasi yang berada dalam rentang $-1 < x < 1$. Transformasi dari x ke x_t memberikan

$$x_t = \frac{(b - a)x + a + b}{2} \tag{3-30}$$

Dengan menggunakan ungkapan transformasi (3-30), maka integral dapat dinyatakan sebagai

$$\int_a^b f(x_t)dx_t = \int_{-1}^{1} f(x_t)(dx_t/dx)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i f\left(x_{t_i}\right) \tag{3-31}$$

dimana

$$dx_t/dx = (b-a)/2 \tag{3-32}$$

Harga-harga dari x_{t_i} diperoleh dengan cara mensubstitusi x dalam persamaan (3-30) dengan titik-titik Gauss, yaitu

$$x_{t_i} = \frac{(b - a)x_i + a + b}{2}$$

Contoh.

Misallkan diketahui N = 2, a =1, b = 10. Oleh karena titik-titik Gauss untuk N = 2 pada koordinat ternormalissi adalah ± 0,577350269, maka titik-titik yang bersesuaian dengan x_{t_i} adalah

$$x_{t_1} = \frac{1}{2}[(10 - 1)(-0{,}577350269) + 1 + 10] = 2{,}901925$$

$$x_{t_2} = \frac{1}{2}[(10 - 1)(0{,}577350269) + 1 + 10] = 8{,}098075$$

Sedangkan $dx_t/dx = (b - a)/2 = 4{,}5$, sehingga kuadratur Gauss menjadi

$$\int_1^{10} f(x_t)dx_t = \int_{-1}^{1} f(x_t)(dx_t/dx)dx \approx (4{,}5)\{(1)f(2{,}901925) + (1)f(8{,}098075)\}$$

```
% Program Gauss Kuadratur
f=input('Masukkan fungsi integrand (gunakan inline() :');
a=input('Masukkan batas bawah integrasi :');
b=input('Masukkan batas atas integrasi :');
N=input('Integrasi Kuadratur yang digunakan (2,3,4,5,6,8,10) :');
if (N==2)
    load gauss2.txt;
    x=gauss2(:,1);w=gauss2(:,2);
elseif(N==3)
    load gauss3.txt;
    x=gauss3(:,1);w=gauss2(:,3);
elseif(N==4)
    load gauss4.txt;
    x=gauss4(:,1);w=gauss4(:,2);
elseif(N==5)
    load gauss5.txt;
    x=gauss5(:,1);w=gauss5(:,2);
elseif(N==6)
    load gauss6.txt;
    x=gauss6(:,1);w=gauss6(:,2);
elseif(N==8)
    load gauss8.txt;
    x=gauss8(:,1);w=gauss8(:,2);
elseif(N==10)
    load gauss10.txt;
    x=gauss10(:,1);w=gauss10(:,2);
else
    fprintf('Ulangi, masukan jenis Gauss salah!');
end;
jum=0;
for i=1:N
   jum=jum+w(i)*f(x(i));
end;
jumlah=(b-a)/2*jum;
fprintf('Hasil Integrasi Kuadratur %i titik adalah %f',N,jumlah);
```

SOAL DAN LATIHAN

1. Hitunglah dengan metode trapesium integral berikut ini dengan menggunakan 2,4dan 6 segmen.

   a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

   b) $5\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{3}{4}\cos^2 x}\,dx$

   c) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\sin x)\,dx$

   d) $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\,dx$

   e) $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

2. Ulangi pertanyaan nomor 1) dengan menggunakan metode titik tengah dengan 2, 4 dan 6 segmen. Bandingkan hasilnya dengan hasil sebelumnya.
3. Berapakah kira-kira kesalahan perhitungan integrasi pada soal nomor 1, jika Saudara menggunakan ungkapan (3-13) dan (3-18).
4. Hitunglah integral di bawah ini dengan metode Simpson 1/3 dengan 2,4 dan 6 segmen.

   a) $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$

   b) $\int_0^1 \frac{1}{x(1-\ln x)^2}\,dx$

   c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

   d) $\int_0^1 x\ln(\sin x)\,dx$

   e) $\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx$

5. Ulangilah pertanyaan nomor 2) dengan metode Simpson 3/8 dengan 3,6,9 dan 12 segmen. Bandingkan hasilnya dengan hasil sebelumnya.
6. Dengan menggunakan hubungan

$$2\sin\frac{1}{2}x\sum_{j=1}^{m}\sin jx - \cos\frac{1}{2}x - \cos(m+\frac{1}{2})x,$$

$$2\sin\frac{1}{2}x\sum_{j=1}^{m}\cos jx - \sin(m+\frac{1}{2})x - \sin\frac{1}{2}x$$

dengan m adalah bilangan integer positf, maka tunjukkan bahwa untuk metode trapesium banyak segmen dengan jumlah m subinterval akan memberikan harga eksak pada setiap integral berikut ini

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos r\,x\,dx \quad , \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin r\,x\,dx$$

untuk setiap bilangan integer r yang bukan merupakann multipel dari m. Harga berapakah yang diberikan oleh metode trapesium untuk integral-integral tersebut jika $r = mk$ dan k adalah bilangan positf integer.

7. Hitunglah integral berikut ini dengan menggunakan metode kuadratur Gauss 2 titik. Kemudian bandingkanlah dengan dengan hasil eksaknya.

a) $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x\,dx$

b) $\int_{0}^{\pi/4} x^2 \sin x\,dx$

c) $\int_{3}^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

d) $\int_{1}^{1.6} 2\frac{x}{x^2-4}\,dx$

e) $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$

f) $\int_{0}^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x\,dx$

8. Ulangilah soal nomor 1 dengan kuadratur Gauss 3 titik.
9. Ulangilah soal nomor 1 dengan kuadratur Gauss 4 titik.
10. Ulangi sekalilagi soal nomor 1 dengan kuadratur Gauss 6 titik. Kemudian bandingkanlah hasilnya dengan hasil-hasil sebelumnya jika dibandingkan dengan hasil eksaknya.