

Table of Contents

PRAKTIKUM 1 : Gerak Harmonik Sederhana	2
PRAKTIKUM 2 : Gerak Pendulum Sederhana	8
PRAKTIKUM 3 : Gerak Pendulum Tereadam	16
PRAKTIKUM 4 : Peluruhan Radioaktif	24
PRAKTIKUM 5 : Balap Sepeda	30
PRAKTIKUM 6 : Gerak Proyektil: Lintasan (Trayektori) Gerak Peluru	35
PRAKTIKUM 7 : Gerak Pendulum Sederhana: Pendekatan Teori Gangguan	40
PRAKTIKUM 8 : Potensial Elektrostatik di Sekitar Kotak Bermuatan (Integral Ganda)	44
DAFTAR PUSTAKA	50

BAB 3

SIMULASI GERAK JATUH BEBAS

1 Pendahuluan

Masalah gerak jatuh bebas adalah masalah yang biasa ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya, buah mangga yang jatuh dari pohon, genting yang jatuh dari atap rumah dan sebuah parasut yang diterjunkan dari helikopter. Dalam bab ini, gerakan benda tidak dipengaruhi oleh gaya gesek udara. Tentu, hal ini menyalahi kenyataan yang terjadi. Namun demikian, untuk memberikan gambaran bagaimana kita dapat mendekati persamaan gerak Newton dengan salah satu metode Numerik, maka hal ini kita berikan.

2 Konsep

Jika sebuah bola tenis di dekat permukaan bumi dikenai sebuah gaya tunggal, yaitu gaya gravitasi dan diasumsikan bahwa gesekan dengan udara diabaikan, maka gaya gravitasi yang dialami bola tersebut diberikan oleh

$$F_g = -mg \quad (1-1)$$

dimana m adalah massa bola dan $g = 9.8 \text{ N/kg}$ adalah percepatan gravitasi. Untuk menyederhanakan permasalahan, pertama kita mengasumsikan bahwa hanya ada satu arah gerak partikel yaitu gerak vertikal. Menurut hukum Newton kedua, persamaan gerak bola tenis digambarkan oleh persamaan

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F \quad (1-2)$$

dimana y adalah koordinat arah vertikal dan berharga positif, t adalah waktu, F adalah total gaya yang dikenakan pada bola dan m adalah massa diam. Jika kita mengeset $F = F_g$, maka ungkapan (1-1) dan (1-2) menjadi

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \quad (1-3)$$

Persamaan (1-3) merupakan pernyataan dari sebuah model gerak jatuh bebas. Dalam kasus ini model gerakan berupa persamaan diferensial orde dua. Solusi analitik dari persamaan (1-3) adalah

$$y(t) = y(0) + v(0)t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1-4a)$$

$$v(t) = v(0) - g t \quad (1-4b)$$

Akan tetapi, yang akan kita lakukan adalah menentukan gerak jatuh bebas bola tenis dengan pendekatan numerik dengan tujuan untuk mengenalkan tool yang diperlukan dalam menyelesaikan permasalahan yang sudah familiar bagi kita.

Kita mulai dengan menjadikan pernyataan (1-3) menjadi dua persamaan diferensial berorde satu, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -g \end{aligned} \quad (1-5)$$

dimana v merupakan kecepatan bola pada arah vertikal.

3 Diskretisasi

Ungkapan (1-5) merupakan dasar untuk melakukan simulasi. Untuk maksud itu, kita perlu melakukan diskritisasi ungkapan tersebut. Dengan pendekatan beda hingga, maka derivatif pertama dapat didekati dengan beda hingga maju, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} &= v(t) \\ \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} &= -g\end{aligned}\quad (1-6)$$

Dari ungkapan (1-6), dengan menyusun kembali ungkapan ini maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}y(t+\Delta t) &= y(t) + v(t)\Delta t \\ v(t+\Delta t) &= v(t) - g\Delta t\end{aligned}\quad (1-7)$$

Ungkapan (1-7) dapat disederhanakan penulisannya menjadi bentuk

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + h v_i \\ v_{i+1} &= v_i - h g\end{aligned}\quad (1-8)$$

Dari hubungan rekursi (1-7), kita dapat memperoleh *posisi* dan *kecepatan* bola tenis pada setiap saat.

4 Program dan Grafik

Berdasarkan pada ungkapan (1-7) kita dapat dengan mudah membuat program komputernya, seperti ditunjukkan pada program 1. Pada gambar 1 ditampilkan bahwa grafik hubungan y vs t berupa parabola. Hal ini sesuai dengan ungkapan (1-4a). Gambar 1 juga menampilkan grafik hubungan antara v vs t berupa garis lurus. Hal ini juga sesuai dengan ungkapan (1-4b).

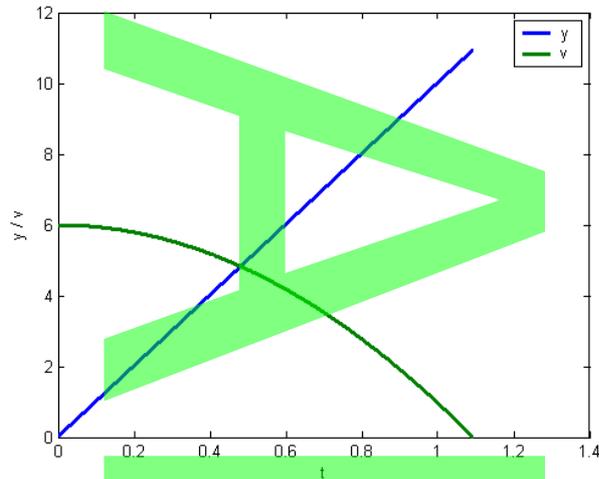


Illustration 4.1:

Untuk memperoleh hasil ini, telah dipilih masukan antara lain $y_0 = 5$ dan $v_0 = 0$. Untuk ukuran langkah h , dipilih ukuran yang cukup kecil (dalam hal ini $h = 0.001$), mengingat metode Euler akan memberikan hasil yang cukup baik jika dipilih ukuran langkah yang cukup kecil.

PROGRAM 1.

```

yo=input('Masukkan ketinggian awal yo :');
vo=input('Masukkan kecepatan awal vo :');
h=0.001; %step size
g=10; %percepatan gravitasi
y=yo; %inisialisasi untuk y
v=vo; %inisialisasi untuk
i=1;
fid=fopen('jatuh.txt','w');
while (y>0)
    t=i*h;
    v=v-g*h;

```

```
y=y+v*h;  
if (y<0)  
    break;  
end;  
temp=y;  
fprintf('%f %f %f\n',t,abs(v),y);  
fprintf(fid,'%f %f %f\n',t,abs(v),y);  
i=i+1;  
end  
fclose(fid)  
load jatuh.txt;  
t=jatuh(:,1);  
y=jatuh(:,2);  
v=jatuh(:,3);  
plot(t,y,t,v,'lineWidth',2.5);  
xlabel('t');  
ylabel('y / v');  
legend('y','v');
```

BAB 4

GAYA BERGANTUNG POSISI

1 Pendahuluan

Penyelesaian analitik dari gerak jatuh bebas di dekat permukaan bumi seperti pada ungkapan (3-4) di bab I sudah sangat akrab bagi kita. Penyelesaian numerik untuk masalah tersebut diberikan untuk mengenalkan salah satu metode numerik saja. Dalam bab ini kita akan mengenalkan model realistik gerak jatuh bebas di dekat permukaan bumi yang mana persamaan geraknya tidak *terlalu mudah* untuk diselesaikan secara analitik.

2 Konsep

Jika kita mengingat kembali variasi medan gravitasi terhadap jarak dari pusat bumi, maka gaya yang pada sebuah benda yang disebabkan oleh gaya tarik bumi adalah **tidak konstan**. Menurut hukum Newton tentang gravitasi, bahwa gaya yang diakibatkan oleh bumi pada sebuah benda bermassa m diberikan oleh

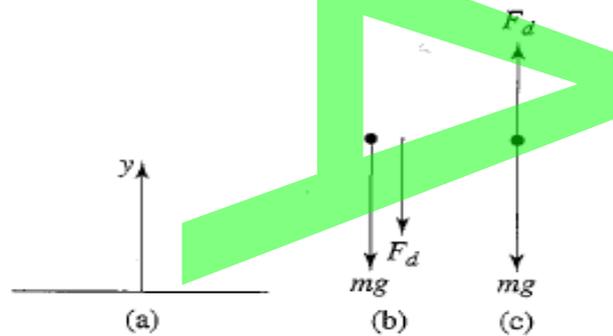
$$F = \frac{GMm}{(R+y)^2} = \frac{GMm}{R^2(1+y/R)^2} = mg \left(1 - 2\frac{y}{R} + \dots \right) \quad (4-1)$$

dimana y adalah jarak yang diukur dari permukaan bumi, R adalah jejari bumi, M adalah massa bumi, G adalah konstanta gravitasi dan $g=GM/R$.

Untuk partikel di dekat permukaan bumi, modifikasi yang mungkin penting adalah dengan memasukkan gaya gesek kaden resistensi udara. Arah dari gaya gesek $F_d(v)$ berlawanan dengan arah kecepatan partikel (lihat Gambar 1). Untuk

benda yang jatuh $F_d(v)$ berarah ke atas. Oleh sebab itu, gaya total F pada benda jatuh dapat dinyatakan dengan

$$F = -mg + F_d \tag{3-2}$$



Gambar 4-1. (a) sistem koordinat dengan y positif ke arah vertikal ke atas, (b) diagram gaya untuk benda jatuh, (c) diagram gaya untuk benda bergerak ke atas.

Selanjutnya, kita perlu menentukan bentuk $F_d(v)$ secara empirik. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menentukan $F_d(v)$ ini adalah dengan mengukur y sebagai fungsi t , kemudian menentukan $v(t)$ dengan menghitung derivatif numerik dari y . Demikian pula, kita dapat menentukan secara numerik dari percepatan $a(t)$ dengan menggunakan $v(t)$. Dengan demikian, kita dapat menentukan percepatan sebagai fungsi v , kemudian menentukan $F_d(v)$ dari (4-2). Akan tetapi, cara ini akan menimbulkan kesalahan karena akurasi dari derivatif akan lebih rendah dari posisi yang terukur. Cara alternatif yang dapat dipilih adalah dengan cara sebaliknya, yaitu kita berasumsi bahwa F_d secara eksplisit bergantung pada v . kemudian menggunakannya untuk menentukan $y(t)$. Apabila perhitungan terhadap $y(t)$ sesuai dengan hasil eksperimen $y(t)$, maka asumsi bahwa F_d bergantung kepada v adalah benar.

Dua asumsi yang umum digunakan untuk menggambarkan ketergantungan F_d terhadap v adalah

$$F_{1,d} = C_1 v \quad (4-3a)$$

dan

$$F_{2,d} = C_2 v^2 \quad (4-3b)$$

dimana parameter C_1 dan C_2 bergantung kepada sifat medium dan bentuk dari benda.

Oleh karena F_d semakin besar ketika v bertambah, maka terdapat sebuah kecepatan terminal (*terminal velocity*) atau kecepatan batas (*limiting velocity*) yang mana pada saat itu jumlah gaya yang bekerja pada benda jatuh sama dengan nol. Kecepatan terminal ini dapat diperoleh dari ungkapan (4-2) dan (4-3) dengan mensetting $F_d = mg$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} v_{1,t} &= \frac{mg}{C_1} && (\text{gesekan linier}) \\ v_{2,t} &= \left(\frac{mg}{C_2} \right)^{1/2} && (\text{gesekan kuadratik}) \end{aligned} \quad (4-4)$$

Selanjutnya, jika ungkapan pada (2-3) menggunakan ungkapan kecepatan terminal (2-4) maka diperoleh

$$\begin{aligned} F_{1,d} &= C_1 v_{1,t} \left(\frac{v}{v_{1,t}} \right) = mg \frac{v}{v_{1,t}} \\ F_{2,d} &= C_2 v_{2,t}^2 \left(\frac{v}{v_{2,t}} \right)^2 = mg \left(\frac{v}{v_{2,t}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4-5)$$

Dengan demikian, gaya total yang bekerja pada benda jatuh seperti pada ungkapan (3-2) dapat dinyatakan dalam dua bentuk,

$$F_1(v) = -mg \left(1 - \frac{v}{v_{1,t}} \right) \quad (4-6a)$$

$$F_2(v) = -mg \left(1 - \frac{v^2}{v_{2,t}^2} \right) \quad (4-6b)$$

Gaya total per satuan massa dapat dinyatakan dari (4-6) yaitu

$$F_1(v)/m = -g \left(1 - \frac{v}{v_{1,t}} \right) \quad (4-7a)$$

$$F_2(v)/m = -g \left(1 - \frac{v^2}{v_{2,t}^2} \right) \quad (4-7b)$$

Untuk menentukan pengaruh gesekan dengan udara selama benda jatuh, maka pandanglah sebuah kerikil dengan massa $m = 10^{-2}$ kg. Pendekatan yang cocok untuk masalah ini adalah ungkapan gaya gesek yang sebanding dengan v^2 . Untuk kerikil dengan radius 0.01 m, secara empirik C_2 bernilai sekitar 10^{-4} kg/m. Dari (2-4), maka kita dapat peroleh kecepatan terminalnya sekitar 30 m/s. Dari hasil running program, kecepatan terminal dapat diperoleh ketika benda jatuh sejauh 50 m pada sekitar 3 detik.

3 Diskretisasi

Berdasarkan pada ungkapan (4-7) maka dapat dibuat diskritisasi untuk menentukan posisi dan kecepatan benda pada setiap saat. Kita masih akan menggunakan metode Euler untuk menyelesaikan persamaan ini. Jika ditulis kembali persamaan (4-7b)

$$F_2(v)/m = \frac{d^2 x}{dt^2} = -g \left(1 - \frac{v^2}{v_{2,t}^2} \right) \quad (4-8)$$

Persamaan (4-8) dapat sederhana ke dalam persamaan diferensial orde 1 seperti bentuk di bawah ini

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (4-9a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \left(1 - \frac{v^2}{v_{2,t}^2} \right) \quad (4-9b)$$

Dengan metode Euler, posisi dan kecepatan pada setiap saat dapat ditentukan dengan ungkapan diskrit

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h v_i \\ v_{i+1} &= v_i - h g \left(1 - \frac{v_i^2}{v_{2,t}^2} \right) \end{aligned} \quad (4-10)$$

dengan h adalah ukuran langkah waktu.

Untuk benda yang jauh terhadap permukaan bumi, maka persamaan (4-1) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (4-11a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \left(1 - 2 \frac{y}{R} + \dots \right) \quad (4-11b)$$

Dengan pendekatan Euler diperoleh ungkapan diskrit sebagai berikut

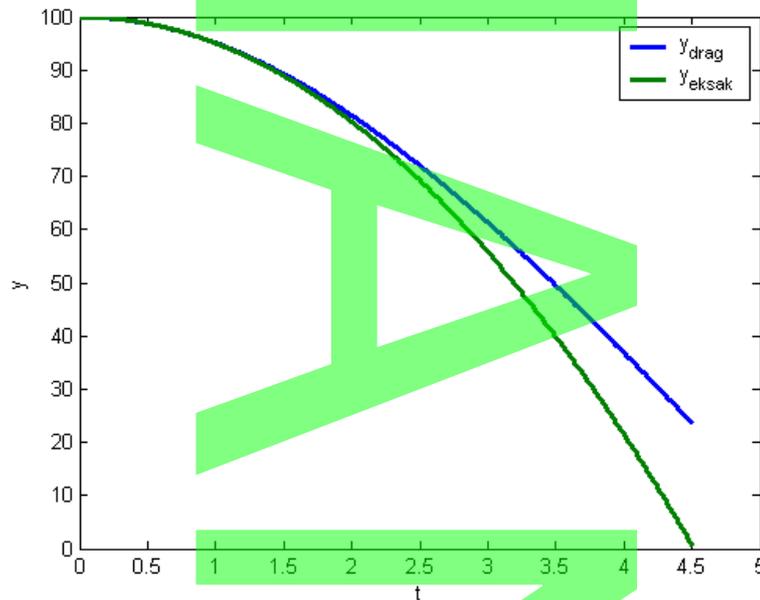
$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h v_i \\ v_{i+1} &= v_i + h g \left(1 - 2 \frac{y_i}{R} \right) \end{aligned} \quad (4-12)$$

4 Grafik dan Program Komputer

Ungkapan diskrit (4-10) digunakan sebagai dasar pembuatan program simulasi, seperti terlihat pada contoh program 2.

```
%Contoh program untuk implementasi algoritma pada ungkapan (4-10)
clear; close all;
yo=input('Masukkan ketinggian awal yo :');
```

```
vo=input('Masukkan kecepatan awal vo :');
h=0.01; %step size
g=9.8; %percepatan gravitasi
N=1000;
y=yo;
v=vo; %inisialisasi untuk v
v2=30.0; % terminal velocity
fid=fopen('jatuh2.txt','w');
for i=1:N
    t=i*h;
    v=v-g*h*(1.0-v*v/(v2*v2));
    y=y+v*h;
    y_eksak=yo+vo*t-0.5*g*t^2;
    v_eksak=vo-g*t;
    if (y<0 | y_eksak<0)
        break;
    end
    temp=v;
    fprintf('%f %f %f %f %f\n',t,y,y_eksak,v,v_eksak);
    fprintf(fid,'%f %f %f %f %f\n',t,y,y_eksak,v,v_eksak);
end
fclose(fid)
load jatuh2.txt;
t=jatuh2(:,1);
y=jatuh2(:,2);
y_eksak=jatuh2(:,3);
plot(t,y,t,y_eksak,'lineWidth',2.5);
xlabel('t'); ylabel('y'); legend('y_{drag}','y_{eksak}')
```



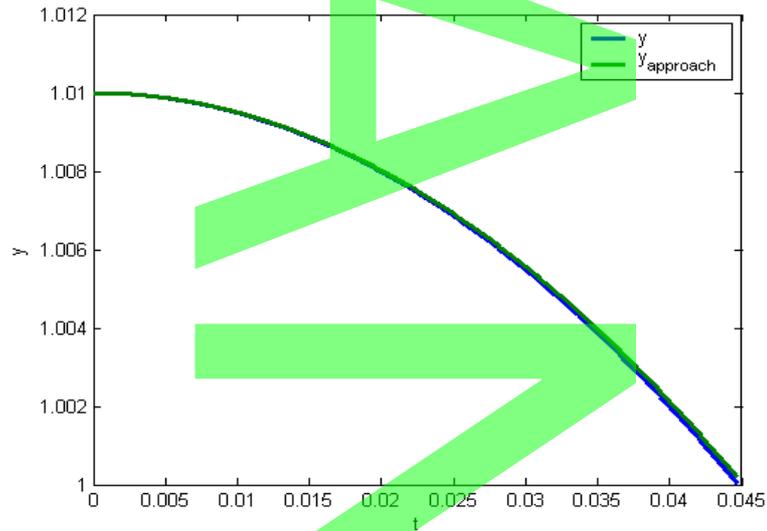
Gambar 4-2. Grafik posisi benda pada sumbu y terhadap t

Marilah kita bahas Gambar (4-2) yang menampilkan grafik hubungan antara posisi benda pada sumbu vertikal terhadap waktu. Sebelumnya, grafik pada Gambar (4-2) diperoleh dengan masukan untuk $y_0=100$ dan $v_0=0$ yang mana akan ditunjukkan perbedaan antara gerak benda jatuh bebas yang dipengaruhi gesekan dengan udara dengan yang tidak dipengaruhi.

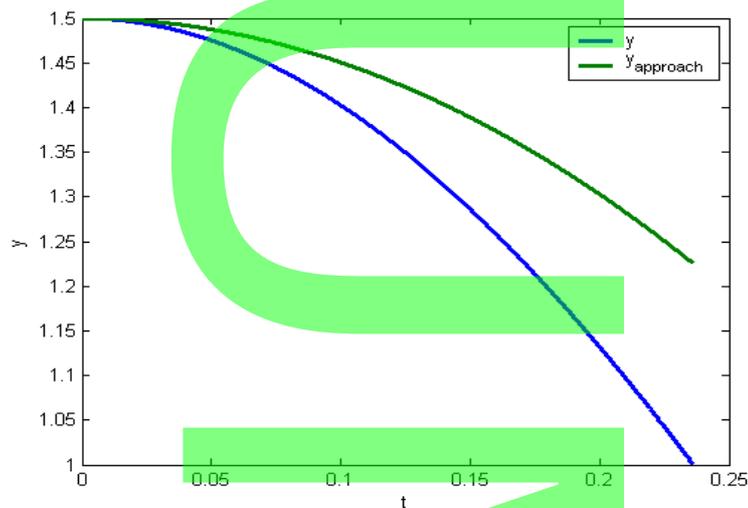
Apabila kita amati benda yang tidak dipengaruhi gesekan dengan udara, dia turun lebih cepat dibandingkan dengan benda yang dipengaruhi. Hal ini tentunya jelas, karena hambatan udara mengakibatkan adanya rintangan terhadap gerakan, sehingga waktu yang dibutuhkan benda untuk sampai ke tanah akan semakin lama. Anda dapat memvariasi besarnya v_2 untuk mendapatkan gambaran tentang ketergantungan waktu yang dibutuhkan benda menyentuh tanah dengan kecepatan terminal.

Hasil yang telah diperoleh di atas adalah contoh kasus ketika benda berada

di dekat permukaan bumi. Nah, sekarang jika benda berada jauh di permukaan bumi, maka efek jarak benda adalah signifikan. Lihat Gambar (4-3) dan Gambar (4-4)



Gambar 4-3. Posisi benda jatuh bebas di dekat permukaan bumi menggunakan ungkapan asli dan pendekatan



Gambar 4-4. Posisi benda jatuh bebas jauh dari permukaan bumi menggunakan ungkapan asli dan pendekatan

Gambar 4-3 dan 4-4 ditampilkan grafik hubungan antara posisi benda terhadap waktu untuk benda jatuh bebas. Jika diperhatikan terdapat perbedaan yang signifikan antara hasil pendekatan dengan ungkapan aslinya (meskipun hanya diambil dua suku saja). Grafik pada Gambar 4-3 praktis berimpit, mengingat benda dijatuhkan dari tempat yang tidak jauh dari permukaan (diambil $y=1.01 R$). Sedangkan grafik pada Gambar 4-4 terdapat perbedaan yang mencolok, mengingat benda dijatuhkan dari tempat yang sangat tinggi (dalam hal ini diambil $y=1.5 R$).

Perbedaan signifikan pada Gambar 4-3 dan 4-4 dapat dijelaskan sebagai berikut. Jika jarak benda terhadap permukaan bumi relatif dekat, maka suku kedua dari persamaan praktis sama dengan 2 karena $y/R \approx 1$. Akibatnya, pernyataan persamaan gerak Newton kembali ke bentuk paling sederhana. Sedangkan, apabila jarak benda relatif jauh dengan permukaan bumi, dalam simulasi ini diambil $y=1.5 R$, maka tampak adanya perbedaan yang signifikan dimana gerak benda yang didasari dengan ungkapan aslinya lebih cepat sampai ke permukaan tanah jika dibandingkan dengan pendekatan.

BAB 5

LINTASAN GERAK BENDA DALAM RUANG DUA DIMENSI

1 Pendahuluan

Mungkin kita sudah familiar dengan masalah lintasan gerak dalam 2 dimensi tanpa kehadiran gesekan udara. Sebagai contoh, sebuah bola dilempar ke udara dengan kecepatan awal v_0 dengan sudut lempar θ_0 (besar sudut terhadap tanah). Seberapa jauh bola akan meninggalkan pelempar pada arah horisontal dan berapa tinggi maksimum yang dicapai oleh bola serta berapa lama bola akan terbang di angkasa? Misalnya bola dilepas pada ketinggian tertentu, berapa sudut lemparan untuk jangkauan maksimum? Apakah jawaban Anda masih berlaku apabila gerakan sudah dipengaruhi oleh gesekan udara.

2 Konsep

Pandanglah sebuah benda dengan massa m dengan kecepatan awal v_0 diarahkan dengan sudut θ_0 di atas horosontal. Partikel dipengaruhi oleh gaya graffitasi dan gaya gesek udara yaitu mg dan F_d , arah dari gaya selalu berlawanan arah dengan arah kecepatan benda. Menurut hukum gerak Newton, komponen x dan y gerakan ini dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -F_d \cos \theta \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -mg - F_d \sin \theta \end{aligned} \quad (5-1)$$

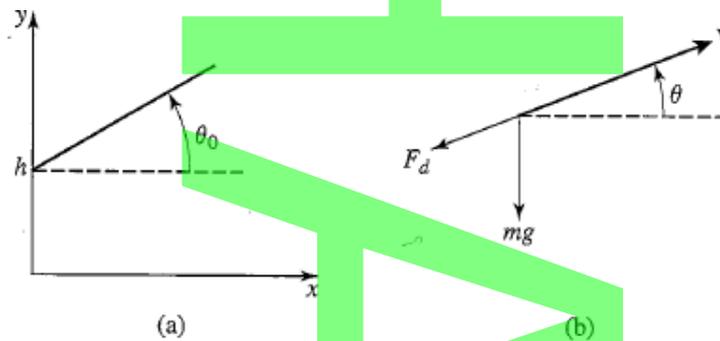


Illustration 2.1: (a) Bola dilempar dari ketinggian h dengan sudut lemparan θ_0 dihitung dari horisontal dan kecepatan awal v_0 (b) gaya gravitasi dan gaya gesek pada benda yang bergerak.

Misalnya, kita pandang sebuah bola baja dengan radius 4 cm. Asumsi yang cocok untuk bola baja dengan ukuran ini adalah bergerak dengan gaya gesekan sebesar $F_d = C_2 v^2$ karena benda bergerak relatif cepat. Oleh karena $v_x = v \cos \theta$ dan $v_y = v \sin \theta$. Selanjutnya kita dapat menuliskan ungkapan (5-1) menjadi

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -C_2 v v_x \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -mg - C_2 v v_y \end{aligned} \quad (5-2)$$

Ingat, bahwa $-C_2 v v_x$ dan $-C_2 v v_y$ merupakan komponen x dan y dari gaya gesek $F_d = C_2 v^2$. Oleh karena pada perubahan v_x dan v_y melibatkan kuadrat dari komponen kecepatan ini, yaitu $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, maka kita tidak dapat menghitung gerak vertikal tanpa memperhitungkan komponen horizontal, artinya bahwa gerak pada arah x dan y adalah **terkopel**.

3 Diskretisasi

Berdasarkan pada ungkapan (5-2), maka dengan metode Euler dapat dilakukan Diskretisasi seperti terlihat pada ungkapan (5-3). Perlu diingat bahwa kita bisa saja menggunakan metode numerik apapun. Namun demikian, perlu

dipertimbangkan masalah ketelitian yang ingin dicapai. Dengan menggunakan metode Euler, kita dapat melakukan Diskretisasi ungkapan

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h v_{x,i} \\ v_{x,i+1} &= v_{x,i} - \frac{C_2}{m} \sqrt{v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2} v_{x,i} \end{aligned} \quad (5-3a)$$

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h v_{y,i} \\ v_{y,i+1} &= v_{y,i} - \frac{C_2}{m} \sqrt{v_{y,i}^2 + v_{x,i}^2} v_{y,i} \end{aligned} \quad (5-3b)$$

4 Program dan Grafik

Berdasarkan ungkapan diskrit pada (5-3) kita dapat membuat program komputer seperti diperlihatkan pada Contoh Program 3.

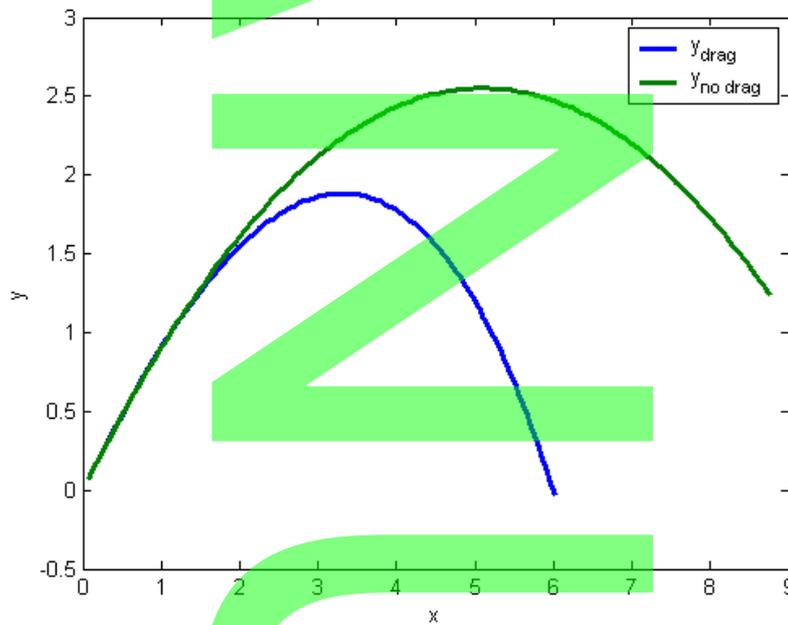
```
%Contoh Program 3
v0=input('Masukkan kecepatan awal :');
theta0=input('Masukkan sudut lemparan :');
y0=input('Masukkan y0 :');
x0=input('Masukkan x0 :');
phi=pi/180.0*theta0; %mengubah ke bentuk radian
vx0=v0*cos(phi);
g=9.8; %percepatan gravitasi
vy0=v0*sin(phi);
vx=vx0; %inisialisasi vx
vy=vy0; %inisialisasi vy
y=y0; %inisialisasi y
x=x0; %inisialisasi x
C2=0.10; %menentukan koefisien gesek
N=10000; %iterasi maximum
```

```

h=0.01; %panjang langkah
fid=fopen('peluru2d.txt','w');
for i=1:N
    t=i*h;
    temp_y=y;
    x=x+vx*h;
    x1=vx0*t;
    vx=vx-C2*sqrt(vx*vx+vy*vy)*vx*h;
    y=y+vy*h;
    vy=vy-g*h-C2*sqrt(vx*vx+vy*vy)*vy*h;
    y1=vy0*t-0.5*g*t*t;
    fprintf('%f %f %f %f %f %f %f\n',t,x,x1,y,y1,vx,vy);
    fprintf(fid,'%f %f %f %f %f\n',t,x,y,x1,y1);
    if (y>temp_y) %menentukan y maksimum
        ymax=y;
    else
        ymax=ymax;
    end
    if (y1<0 | y<0) %menghentikan iterasi
        break;
    end
    fprintf('%f',ymax)
end
fclose(fid)
load peluru2d.txt
t=peluru2d(:,1);
x=peluru2d(:,2);
y=peluru2d(:,3);

```

```
x1=peluru2d(:,4);
y1=peluru2d(:,5);
plot(x,y,x1,y1,'lineWidth',2.5);
xlabel('t');
ylabel('y');
legend('y_{drag}','y_{no drag}')
```



Gambar 5-1. Lintasan benda karena pengaruh dan tanpa gesekan udara

Gambar 5-1 menampilkan grafik lintasan (trayektori) benda yang dilempar ke udara dengan dan tanpa pengaruh gesekan dengan udara. Grafik tersebut diperoleh dengan masukan $v_0=10$ dan $\theta_0=45^\circ$. Dengan memberikan data masukan tersebut, kita dapat membandingkan lintasan benda dengan dan tanpa gesekan dengan udara.

Hasil ini tentunya persis seperti yang kita duga, yaitu bahwa benda yang dilempar tanpa memperhitungkan gesekan dengan udara akan terlempar lebih jauh dibandingkan dengan gesekan. Dari data diperoleh informasi bahwa jarak maksimum yang dapat ditempuh oleh benda dengan mempertimbangkan gesekan udara ($C_2=0.10$) adalah $x = 6.014689$ dengan tinggi maksimum $y = 1.883046$. Sedangkan, jarak yang ditempuh oleh benda tanpa gesekan dengan udara adalah $x = 10.182338$ dengan tinggi maksimum adalah $y = 2.551009$.

Dengan mengubah-ubah sudut lemparan θ maka kita dapat memperoleh informasi pada sudut lemparan berapa diperoleh jangkauan maksimal dan minimal. Kita juga dapat mengubah-ubah koefisien gesek C_2 untuk dapat informasi adanya pengaruh jangkauan terhadap besar kecilnya koefisien gesek.

BAB 6

GERAK PARTIKEL BERMUATAN DI BAWAH PENGARUH MEDAN LISTRIK DAN MAGNET

1 Pendahuluan

Persamaan gerak dalam ruang 3 dimensi dan terkopel sering ditemukan di dalam elektrodinamika yaitu ketika sebuah partikel bermuatan bergerak melewati medan listrik dan medan magnet. Pengaruh kedua medan terhadap gerakan partikel ini sangat menarik untuk dikaji mengingat masalah ini jarang ditemukan di Fisika Dasar. Dengan penggambaran visual berupa grafik maka kita akan lebih dapat memahami konsep ini. Hal yang lebih menarik lagi ketika partikel bermuatan bergerak diantara medan diopie. Tentu masalah ini akan sangat sulit diselesaikan dengan cara analitik. Akan tetapi, di sini kita tidak akan membahas masalah ini.

2 Konsep

Persamaan gerak partikel bermuatan yang melewati medan listrik dan magnet dapat dinyatakan di dalam bentuk vektor

$$m \dot{\mathbf{v}} = q \mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6-1)$$

dimana m adalah massa partikel, q adalah muatan, \mathbf{E} dan \mathbf{B} masing-masing menyatakan medan listrik dan medan magnet. Untuk kasus dimana medan magnet konstan, maka trayektori dari partikel bermuatan berupa spiral sepanjang garis-garis medan dengan sebuah orbit cyclotron yang periode revolusinya sebesar

$2\pi m/qB$. Jika ditambahkan medan listrik di dalamnya, maka akan mengubah gerakan ini secara dramatik.

Laju untuk komponen kecepatan dari sebuah partikel bermuatan dengan menggunakan satuan bahwa $m=q=1$ adalah

$$\frac{dv_x}{dt} = E_x + v_y B_z - v_z B_y \quad (6-2a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = E_y + v_z B_x - v_x B_z \quad (6-2b)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = E_z + v_x B_y - v_y B_x \quad (6-2c)$$

3 Diskretisasi

Dari persamaan (6-2a), (6-2b) dan (6-2c) dapat diperoleh tiga variabel posisi yaitu x, y dan z . Jika diterapkan metode Euler, maka 3 ungkapan di atas dapat dituliskan menjadi

1. Untuk komponen ke arah x diperoleh kecepatan dan posisi

$$\begin{aligned} v_{x,n+1} &= v_{x,n} + (E_{x,n} + v_{y,n} B_{z,n} - v_{z,n} B_{y,n}) h \\ x_{n+1} &= x_n + v_{x,n+1} h \end{aligned} \quad (6-3a)$$

2. Untuk komponen ke arah y diperoleh kecepatan dan posisi

$$\begin{aligned} v_{y,n+1} &= v_{y,n} + (E_{y,n} + v_{z,n} B_{x,n} - v_{x,n} B_{z,n}) h \\ y_{n+1} &= y_n + v_{y,n+1} h \end{aligned} \quad (6-3b)$$

3. Untuk komopenen ke arah z diperoleh kecepatan dan posisi

$$\begin{aligned} v_{z,n+1} &= v_{z,n} + (E_{z,n} + v_{x,n} B_{y,n} - v_{y,n} B_{x,n}) h \\ z_{n+1} &= z_n + v_{z,n+1} h \end{aligned} \quad (6-3c)$$

4 Program dan Grafik

Berdasarkan pada persamaan diskrit (6-3a), (6-3b) dan (6-3c) kita dapat membuat program seperti terlihat pada contoh Program 4. Dibawah ini diberikan contoh masukan untuk program tersebut.

```

masukkan medan listrik E0 :4
masukkan medan magnet B0 :5
masukkan kecepatan awal partikel v0 :10
Sudut arah medan listrik thdp x :90
Sudut arah medan listrik thdp y :0
Sudut arah medan listrik thdp z :90
Sudut arah medan magnet thdp x :90
Sudut arah medan magnet thdp y :90
Sudut arah medan magnet thdp z :0
Sudut arah kecepatan awal partikel thdp x :45
Sudut arah kecepatan awal partikel thdp y :-45
Sudut arah kecepatan awal partikel thdp z :90

```

Dalam contoh masukan di atas dimisalkan besarnya medan listrik, medan magnet dan kecepatan awal diberikan masing-masing 4, 5 dan 10. Medan listrik dan medan magnet masing-masing berarah ke sumbu y dan z saja. Sedangkan, kecepatan partikel berarah 45° terhadap sumbu x , -45° terhadap sumbu y dan 90° terhadap sumbu z . Ini berarti bahwa kecepatan partikel berada pada bidang sumbu x dan y .

Hasilnya menunjukkan bahwa partikel bergerak dengan lintasan spiral pada bidang xy saja seperti terlihat pada Gambar (6-1). Hal ini jelas, karena berdasarkan persamaan gerak (6-1) komponen gerak yang tersisa adalah ke arah sumbu x

karena

$$\frac{dv_x}{dt} = v_y B_z \quad (6-4a)$$

dan ke arah sumbu y, karena

$$\frac{dv_y}{dt} = E_y + v_x B_z \quad (6-4b)$$

% Contoh Program 4.

```
clear; close all;
```

```
E0=input('masukkan medan listrik E0 :');
```

```
B0=input('masukkan medan magnet B0 :');
```

```
v0=input('masukkan kecepat. awal partikel v0 :');
```

```
thetaE0_x=input('Sudut arah medan listrik thdp x :');
```

```
thetaE0_y=input('Sudut arah medan listrik thdp y :');
```

```
thetaE0_z=input('Sudut arah medan listrik thdp z :');
```

```
thetaB0_x=input('Sudut arah medan magnet thdp x :');
```

```
thetaB0_y=input('Sudut arah medan magnet thdp y :');
```

```
thetaB0_z=input('Sudut arah medan magnet thdp z :');
```

```
thetav0_x=input('Sudut arah kecept. awal partikel hdp x :');
```

```
thetav0_y=input('Sudut arah kecept. awal partikel hdp y :');
```

```
thetav0_z=input('Sudut arah kecept. awal partikel hdp z :');
```

```
phiE0_x=pi/180*thetaE0_x;
```

```
phiE0_y=pi/180*thetaE0_y;
```

```
phiE0_z=pi/180*thetaE0_z;
```

```
phiB0_x=pi/180*thetaB0_x;
```

```
phiB0_y=pi/180*thetaB0_y;
```

```
phiB0_z=pi/180*thetaB0_z;
```

```
phiv0_x=pi/180*thetav0_x;
phiv0_y=pi/180*thetav0_y;
phiv0_z=pi/180*thetav0_z;

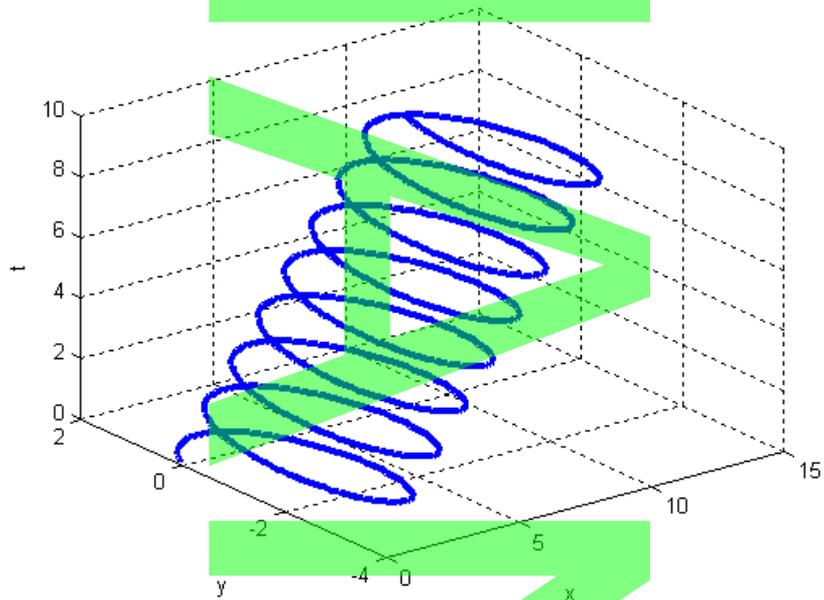
E0_x=E0*cos(phiE0_x);
E0_y=E0*cos(phiE0_y);
E0_z=E0*cos(phiE0_z);

B0_x=B0*cos(phiB0_x);
B0_y=B0*cos(phiB0_y);
B0_z=B0*cos(phiB0_z);

v0_x=v0*cos(phiv0_x);
v0_y=v0*cos(phiv0_y);
v0_z=v0*cos(phiv0_z);

Ex=E0_x;Ey=E0_y;Ez=E0_z;
Bx=B0_x;By=B0_y;Bz=B0_z;
vx=v0_x;vy=v0_y;vz=v0_z;
h=0.01;
N=1000;
x0=0;y0=0;z0=0;
x=x0;y=y0;z=z0;
fid=fopen('medan.txt','w');
for i=1:N
    t=i*h;
    vx=vx+(Ex+vy*Bz-By*vz)*h;
    x=x+vx*h;
```

```
vy=vy+(Ey+vz*Bx-Bz*vx)*h;  
y=y+vy*h;  
vz=vz+(Ez+vx*By-Bx*vy)*h;  
z=z+vz*h;  
fprintf('%f %f %f %f \n',t,x,y,z);  
fprintf(fid,'%f %f %f %f \n',t,x,y,z);  
end  
fclose(fid);  
load medan.txt;  
t=medan(:,1);  
x=medan(:,2);  
y=medan(:,3);  
z=medan(:,4);  
figure(1)  
plot3(x,y,t);grid  
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('t');  
figure(2)  
plot3(x,z,t);grid  
xlabel('x');ylabel('z');zlabel('t');  
figure(3)  
plot3(y,z,t);grid  
xlabel('y');ylabel('z');zlabel('t');
```



Gambar 6-1. Lintasan partikel bermuatan pada sumbu x dan y pada setiap saat.

BAB 7

GERAK HARMONIK SEDERHANA

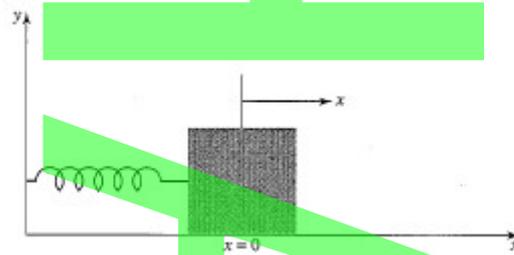
1 Pendahuluan

Di dalam fisika dikenal banyak sekali sistem yang bergerak secara teratur dan berulang-ulang. Gerak yang berulang pada suatu interval tertentu disebut gerak periodik, sebagai contoh gerak bumi mengitari matahari, bulan mengitari bumi. Jika objek bergerak secara periodik diantara dua batas dengan lintasan yang sama disebut sebagai gerak berosilasi. Contoh gerak osilasi yang sering kita jumpai di setiap saat misalnya gerak pendulum jam di rumah kita. Contoh lainnya dalam ranah mikroskopik adalah gerak osilasi atom di dalam zat kristal padat.

2 Konsep

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai gejala osilasi ini, maka pandanglah sebuah balok dengan massa m yang ditambatkan pada pegas yang dapat bergerak bebas. Balok bergerak pada permukaan yang sangat licin sehingga tidak ada gesekan sama sekali. Posisi balok berada pada sumbu x dan diambil titik $x = 0$ sebagai titik kesetimbangan, yaitu posisi dimana pegas dalam keadaan santai. Apabila balok ditarik kemudian dilepas, maka balok akan mengalami gerak osilasi sepanjang garis horisontal. Pegas tidak akan mengalami pemampatan atau peregangan yang terlalu jauh dari titik $x = 0$. Gaya pada balok pada posisi x dinyatakan oleh:

$$F = -kx \quad (7-1)$$



Gambar 7-1. Sistem pegas massa

Konstanta gaya k merupakan ukuran kekakuan (*stiffness*) dari pegas. Tanda negatif pada ungkapan (7-1) menyatakan bahwa gaya yang bekerja akan mengembalikan balok pada posisi setimbang. Persamaan gerak Newton untuk gerakan balok dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \quad (7-2)$$

dimana frekuensi sudut ω_0^2 didefinisikan sebagai

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (7-3)$$

Perilaku dinamis yang dinyatakan oleh ungkapan (7-2) disebut sebagai gerak harmonik sederhana dan dapat diselesaikan dengan cara analitik dengan bentuk fungsi sinus dan cosinus. Oleh karena bentuk penyelesaian akan membantu kita dalam memahami terminologi mengenai gerak osilasi, maka kita boleh menyertakan penyelesaian di sini. Salah satu bentuk penyelesaian itu adalah

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (7-4)$$

dimana A dan δ merupakan konstanta dan argumen fungsi cosinus dalam radian. Konstanta A disebut amplitudo dan δ disebut fase, dimana keduanya dapat ditentukan melalui syarat awal yang diberikan untuk x dan kecepatan $v = dx/dt$.

Oleh karena cosinus merupakan fungsi periodik dengan periode 2π ,

maka $x(t)$ pada ungkapan (7-4) juga periodik. Kita mendefinisikan periode T sebagai waktu terkecil untuk gerak ulang pada dirinya sendiri, yaitu

$$x(t+T)=x(t) \quad (7-5)$$

Oleh karena $\omega_0 T$ berhubungan dengan satu kali siklus, maka kita mempunyai

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \quad (7-6)$$

Frekuensi gerak ν adalah jumlah siklus perdetik dan dinyatakan oleh $\nu = 1/T$. Periode T bergantung pada rasio k/m dan bukan bergantung pada A dan δ . Jadi, periode dari gerak harmonik sederhana adalah independen terhadap amplitudo gerakan.

Meskipun posisi dan kecepatan dari osilator berubah terus menerus, namun jumlah total dari energi E tetap konstan dan diberikan oleh

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (7-7)$$

Dua bentuk dari persamaan (7-7) adalah energi kinetik dan energi potensial.

3 Diskretisasi

Berdasarkan pada persamaan (7-2) dapat dilakukan diskritisasi berdasarkan metode Euler maupun Runge-Kutta. Kedua metode akan digunakan untuk mengetahui metode mana yang dapat memberikan hasil yang sangat dekat dengan hasil eksaknya. Diskritisasi dengan metode Euler diperoleh

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h v_i \\ v_{i+1} &= v_i + h \omega_0^2 x_i \end{aligned} \quad (7-7)$$

Sedangkan dengan metode Runge-Kutta diperoleh

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_i, y_i, t_i) \\ l_1 &= h g(x_i, y_i, t_i) \end{aligned} \quad (7-8)$$

$$k_2 = h f(x_i + k_1, y_i + l_1, t_{i+1})$$

$$l_2 = h g(x_i + l_1, y_i + l_1, t_{i+1})$$

dimana

$$f(x, y, t) = v$$

$$g(x, y, t) = -\omega_0^2 x \quad (7-9)$$

4 Program dan Grafik

Persamaan (7-8) dan (7-9) digunakan sebagai dasar untuk pembuatan program simulasi numerik. Dari kedua hasil akan dibandingkan manakah algoritma yang lebih baik sehingga hasil dari algoritma yang lebih baik tersebut yang akan digunakan. Contoh Program 5.1 dan Program 5.2 masing-masing adalah contoh program untuk algoritma Euler dan Runge Kutta.

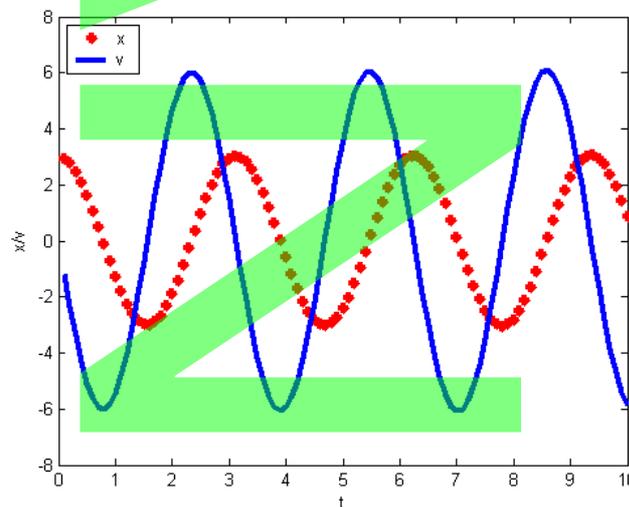
```
%Contoh Program 5.2
%PROGRAM RK2 untuk osilator harmonik
clear;close all;
k=4;m=1;
omega_2=k/m;
f1=inline('v','t','x','v');
f2=inline('-omega_2*x','t','x','v','omega_2');
%omega=input('Masukkan konstanta omega kuadrat :');
%k=9;m=1;%omega=k/m;
%a=input('Batas bawah fungsi a:');
a=0;b=10;
%b=input('Batas atas fungsi b:');
h=input('Masukkan ukuran langkah h:');
nlangkah=(b-a)/h;
```

```

A=3; %simpangan maksimum
E_0=1/2*k*A^2; %energi awal
x=A;%syarat awal untuk x
v=0; % syarat awal untuk v
fid=fopen('rk.txt','w');
for i=1:nlangkah
    t=i*h;
    k1=h*f1(t,x,v);
    l1=h*f2(t,x,v,omega_2);
    k2=h*f1(t+h,x+k1,v+l1);
    l2=h*f2(t+h,x+k1,v+l1,omega_2);
    x=x+(k1+k2)/2.0;
    v=v+(l1+l2)/2.0;
    E=1/2*m*v^2+1/2*k*x^2;
    delta_E=E-E_0;
    fprintf('%i %f %f %f %f\n',i,t,x,v,delta_E);
    fprintf(fid,'%i %f %f %f %f\n',i,t,x,v,delta_E);
end
fclose(fid);
load rk.txt
i=rk(:,1);
t=rk(:,2);
x=rk(:,3);
v=rk(:,4);
delta_E=rk(:,5);
figure(1)
plot(t,x,'r*',t,v,'b-');
xlabel('t');

```

```
ylabel('x/v');
legend('x','v',2);
figure(2)
plot(t,delta_E,'lineWidth',2.5);
xlabel('t');
ylabel('\delta E');
```



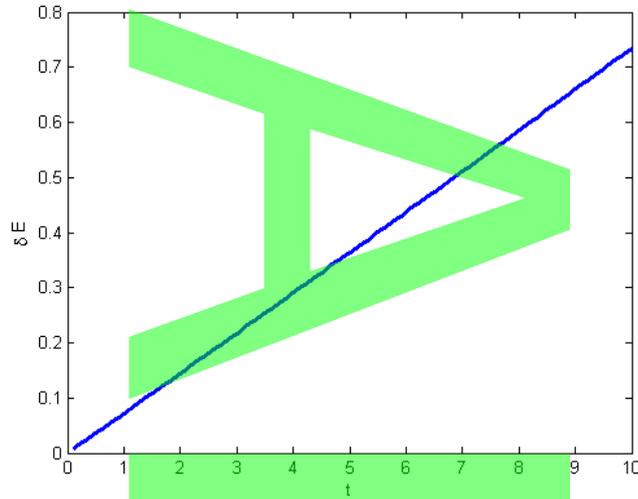
Gambar 7-1. Grafik osilasi dari osilator harmonik dengan ukuran langkah $h=0.1$.

Gambar 7-1 diperlihatkan grafik osilasi dari osilator harmonik dengan pendekatan metode Runge Kutta orde 2 dengan ukuran langkah diambil $h = 0.1$. Dari metode ini diperoleh periode osilasi sama dengan 3.1. Hasil ini hampir mendekati hasil eksaknya yaitu

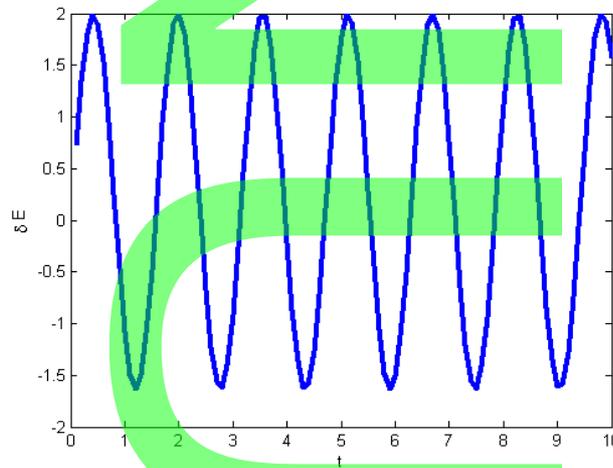
$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{atau} \quad T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}} = 2(3.14) \sqrt{1/4} = 3.14$$

Tentu, kita dapat memperbaiki ketelitian hasilnya dengan cara mengambil ukuran

langkah yang lebih kecil.



Gambar 7-2. Grafik selisih energi awal dengan energi setiap saat dengan metode Runge Kutta orde 2



Gambar 7-3. Grafik selisih energi awal dengan energi setiap saat dengan metode Euler

Gambar (7-2) dan (7-3) diperlihatkan grafik selisih antara energi pada keadaan awal dengan jumlahan energi kinetik dan energi potensial pada setiap saat

dengan masing-masing menggunakan metode Runge Kutta Orde 2 dan metode Euler. Apabila diperhatikan, maka selisih energi pada pada gambar (7-2) yang dilakukan dengan pendekatan RK Orde 2 lebih kecil dibandingkan dengan (7-3) yang dilakukan dengan Euler. Sedangkan, menurut teori mestinya energi yang dihasilkan pada setiap saat adalah konstan mengingat tidak energi yang diubah menjadi bentuk lain. Dengan demikian, dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa metode RK memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan Euler yang ditandai dengan selisih energi awal dan energi setiap saat yang relatif kecil.

PRAKTIKUM 7

GERAK PENDULUM SEDERHANA: PENDEKATAN TEORI GANGGUAN

TUJUAN

1. Mengecek nilai-nilai integrasi jika sudut untuk $\sin^{-1}k$ diberikan dengan menggunakan metode integrasi Simpson.
2. Menghitung periode pendulum dengan menggunakan metode integrasi yang dianggap sesuai.
3. Buatlah tabel hasil, dan menampilkan hasil perhitungan periode versus amplitudo.

DASAR TEORI

Di bab terdahulu, kita telah membahas mengenai gerak pendulum baik gerakan tanpa kehadiran gesekan udara maupun gerakan osilasi pendulum yang dipengaruhi oleh gesekan udara dan pengaruh *driving force*. Saat ini, kita kembali membahas masalah gerak pendulum ini tetapi dengan teori yang berbeda yakni dengan *teori gangguan*.

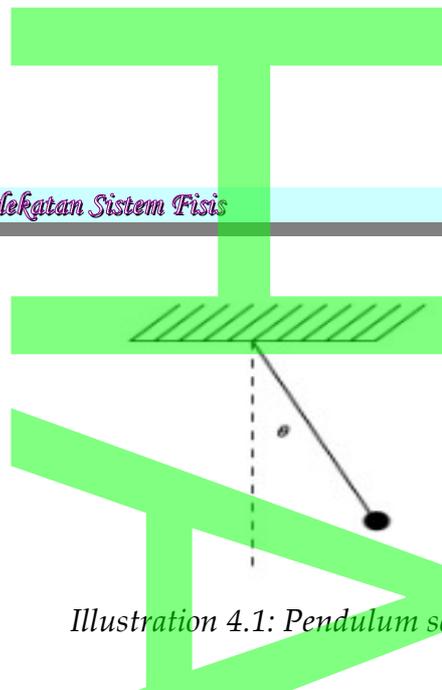


Illustration 4.1: Pendulum sederhana

Dari hukum Newton, atau baik dari formulasi Lagrange maupun Hamilton, gerak pendulum digambarkan dengan persamaan diferensial

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (7-1)$$

Ungkapan (7-1) selanjutnya dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (7-2)$$

Apabila amplitudo cukup kecil, maka $\sin \theta \approx \theta$ dan ungkapan (7-2) menjadi

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (7-3)$$

yang memiliki penyelesaian

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (7-4)$$

Bertolak dari persamaan diferensial (7-2), jika kedua ruas dikalikan dengan $\dot{\theta}$ kemudian diintegrasikan

$$\int_0^{\theta} \dot{\theta} \ddot{\theta} d\theta = \int_0^{\theta} -\frac{g}{l} \sin \theta \dot{\theta} d\theta \quad (7-5)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g}{l} \cos \theta + C$$

dimana C merupakan konstanta itegrasi yang hasilnya bergantung kepada syarat awal yang diberikan. Untuk $\dot{\theta}(t=0)=0$, maka $C=-g/l \cos\theta_0$. Selanjutnya diperoleh

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{7-6}$$

atau

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{7-7}$$

Sekarang, ingat bahwa periode totalnya adalah 4 kali waktu yang dibutuhkan untuk bergerak dari $\theta=0$ hingga $\theta=\theta_0$ sedemikian hingga

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{7-8}$$

Lihatlah bahwa ungkapan (7-8) merupakan bentuk dari integral eliptik dan merupakan penyelesaian eksak dari periode T . Akan tetapi, hal ini masih menyisakan permasalahan yakni bentuk integral yang ada. Marilah kita ubah menjadi bentuk standard untuk bagian di dalam integralnya

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \tag{7-9}$$

dan substitusi

$$\sin\xi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} \tag{7-10}$$

maka kita peroleh

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right), \tag{7-11}$$

dimana

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} \tag{7-12}$$

yang merupakan integral elliptic lengkap jenis pertama. Jelas terlihat bahwa integrand sekarang lebih manis diandingkan sebelumnya. integral elliptic jenis pertama yang paling umum secara parametrik bergantung kepada batas atas integrasi.

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} \tag{7-13}$$

Dari definisi ini, maka terlihat jelas bahwa bahwa $K(k) = F(k, \frac{\pi}{2})$.

TUGAS

- Berdasarkan pada persamaan (7-12), ceklah nilai-nilai integrasi di bawah ini jika sudut untuk $\sin^{-1} k$ diberikan. Gunakan metode Simpson untuk mengecek kebenaran harga integrasi di bawah ini. Gunakan metode trapesium untuk membandingkan hasilnya.

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

$\sin^{-1} k$	$K(k)$
0°	1.57079 63270
10°	1.58284 28043
20°	1.62002 58991
30°	1.68575 03548
40°	1.78676 91349
50°	1.93558 10960
60°	2.15651 56475
70°	2.50455 00790
80°	3.15338 52519
90°	∞

- Hitunglah periode pendulum tersebut dengan menggunakan metode integrasi yang Saudara anggap sesuai. Buatlah tabel hasil, dan tampilkan

hasil perhitungan periode versus amplitudo.

6. Pada nilai amplitudo berapakah periode menyimpang dari $2\pi\sqrt{L/g}$ lebih dari 1 %. Apakah ada masalah jika $\theta_0=180^\circ$. Mengapa?

PRAKTIKUM 8

POTENSIAL ELEKTROSTATIK DI SEKITAR KOTAK BERMUATAN (*Integral Ganda*)

TUJUAN

1. Membuat program integrasi multidimensi untuk memperoleh titik potensial tertentu.
2. Menentukan jumlah titik yang cukup untuk menjamin hasil akhir integrasi memiliki ketelitian tertentu.

DASAR TEORI

Setelah kita memahami masalah integrasi 1 dimensi, maka tidak akan sulit jika kita ingin melompat ke masalah integrasi dua atau lebih dimensi. Pertama adalah masalah jumlah fungsi evaluasi: jika dalam integrasi 1 dimensi diperlukan 100 titik, maka pada masalah integrasi 2 dimensi dibutuhkan 10.000 titik, dan untuk integrasi 3 dimensi dibutuhkan $100 \times 100 \times 100$ atau 1.000.000 titik. Itu tentang banyaknya fungsi evaluasi! Kedua, masalah yang penting adalah batas-batas integrasi. Seperti pada integrasi 1 dimensi, daerah integrasi ditentukan, mungkin juga dibatasi oleh kurva. Nah, secara umum integrasi multidimensi tentunya semakin sulit dibandingkan dengan integrasi dengan variabel tunggal.

Marilah kita bayangkan bahwa kita memerlukan evaluasi integral dalam bentuk

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy. \quad (8-1)$$

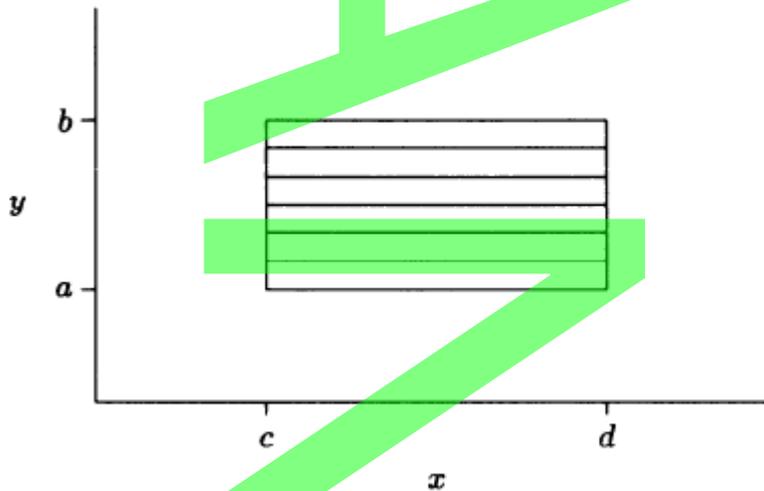
Jika a, b, c dan d adalah konstanta maka daerah integrasi adalah berupa rectangle

dalam bidang xy . Selanjutnya bentuk integralnya adalah

$$I = \int_a^b F(y) dy, \tag{8-2}$$

dimana

$$F(y) = \int_c^d f(x, y) dx. \tag{8-3}$$



Gambar 8.1: Integrasi bidang 2 dimensi, dilakukan integral ke arah x terlebih dahulu

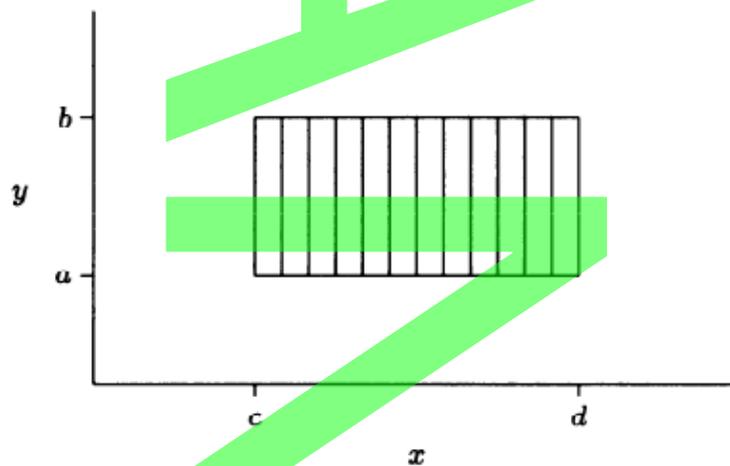
Gambar (8-1) menggambarkan apa yang terjadi. Daerah integrasi rectangular dibagi-bagi menjadi bagian-bagian (strip) yang bergerak ke arah sumbu x : fungsi $f(x,y)$ pada setiap strip diperoleh dengan mengintegrasikan ke arah sumbu x , dan total area diperoleh dengan menjumlahkan sumbangan pada setiap strip tersebut. Tentu saja, kita dapat melakukan dari integral ke arah sumbu y terlebih dahulu, sehingga

$$I = \int_c^d G(x) dx, \tag{8-4}$$

dimana

$$G(x) = \int_a^b f(x, y) dy. \tag{8-5}$$

Komputer code untuk melakukan integral multidimensi ini, tentunya akan lebih mudah jika diperoleh melalui integrasi 1 dimensi. Oleh sebab itu, kita perlu membuat dua fungsi (subroutine) untuk melakukan pekerjaan ini, satu untuk melakukan integrasi ke arah x , dan satu lagi untuk melakukan integrasi ke arah y .



Gambar 8.2 Integrasi bidang 2 dimensi, dilakukan integral ke arah y terlebih dahulu

Dibawah ini diberikan contoh program integrasi 2 dimensi dengan metode trapesium.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
float Fy(float c,float d, float y);
float f(float x, float y);
main(){
    float h,sum,ya,yb,xc,xd,fak,x,hasil;
    double i,N;
    printf("masukka batas bawah ya :");scanf("%f",&ya);
```

```
printf("masukka batas atas yb :");scanf("%f",&yb);
printf("masukka batas bawah xc :");scanf("%f",&xc);
printf("masukka batas atas xd :");scanf("%f",&xd);
h=0.01;
N=round((yb-ya)/h);
sum=Fy(xc,xd,ya)+Fy(xc,xd,yb); fak=2;
for(i=1;i<=N;i++){
    x=i*h;
    sum=sum+fak*Fy(xc,xd,x);
    printf(" %f %f \n",x,sum);
}
hasil=h/2.0*sum;
printf(" %f",hasil);
}

float Fy(float c,float d, float y){
    float sum,hasil,h=0.01,x;
    double N,i;
    N=round((d-c)/h);
    sum=f(c,y)+f(d,y);
    for (i=1;i<=N;i++){
        x=c+i*h;
        sum=sum+2*f(x,y);
    }
    hasil=h/2.0*sum;
    return hasil;
}

float f(float x, float y){
    float w;
```

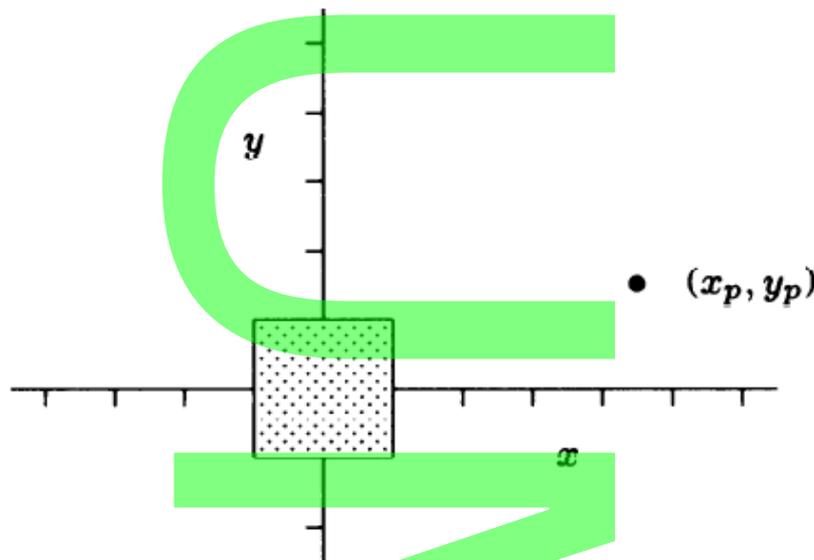
```
w=x*y;
return w;
}
```

DISTRIBUSI POTENSIAL DI SEKITAR KOTAK BERMUATAN

Pandanglah sebuah daerah kotak dalam bidang xy , sedemikian hingga $-1 \leq x \leq 1$ dan $-1 \leq y \leq 1$ yang berisi distribusi muatan uniform ρ seperti digambarkan pada gambar 8.2. Potensial elektrostatik pada titik (x_p, y_p) yang diakibatkan oleh distribusi muatan ini diperoleh dengan mengintegalkan deluruh daerah muatan

$$\Phi(x_p, y_p) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dx dy}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}} \tag{8-6}$$

untuk lebih menyederhanakan permasalahan, maka perlu diambil $\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} = 1$



Gambar 8.2 Kotak bermuatan dengan distribusi uniform

TUGAS

1. Buatlah program integrasi multidimensi untuk memperoleh $\Phi(x_p, y_p)$ dan buatlah tabel nilai untuk $x_p, y_p = 2, 4, 6, \dots, 20$.
2. Ambillah jumlah titik yang cukup untuk menjamin hasil akhir hingga ketelitian 5 digit .

DAFTAR PUSTAKA

1. De Vries, 1994. *A First Course In Computational Physics*, New York: John Willey&Sons.
2. Giordano, 1997. *Computational Physics*, New Jersey: Prentice Hall.
3. Gould, Tobovski, Christian, 2007. *Introduction to Computer Simulation Methods 3rdEd*, San Fransisco: Addison Wesley.