Mekanika Lagrangian

Melalui mekanika Lagrangian ini persamaan gerak Newton untuk sistem sederhana akan diberikan dengan lebih siphisticated.

Koordinat Umum

Posisi partikel di dalam ruang dapat ditentukan melalui 3 koordinat. Koordinat tersebut dapat berupa kartesan, bola atau silinder. Jika benda bergerak dalam bidang, maka derajat kebebasannya ada 2, jika benda bergerak dalam ruang 3D, maka derajat kebebasannya ada 3. Untuk kasus N partikel, maka kita membutuhkan 3N koordinat untuk menentukan posisi dari seluruh partikel tersebut. Jika terdapat kendala dalam sistem, maka jumlah koordinatnya < 3N. Misalnya untuk benda tegar, maka yang dibutuhkan adalah posisi pusat massa dan orientasi bendanya. Jadi hanya 6 koordinat saja.

Misalnya koordinat diberi simbol $q_1, q_{2,} \cdots, q_n$ sebagai koordinat umum. Koordinat q_k bisa berupa jarak atau sudut. Jika untuk menentukan sebuah sistem, sebuah koordinat dapat bebas maka sistem tersbut disebut sistem *holonomik* dan sebaliknya disebut *nonholonomik.*

Jika sistem berupa partikel, maka koordinat kasrtesan dapat dinyatakan dalam koordinat umum

$$x = x(q) \quad \rightarrow \rightarrow 1 \text{ derajat kebebasan}$$

$$\begin{aligned} x &= x(q_{1,} q_2) \\ y &= y(q_{1,} q_2) \end{aligned} \quad \rightarrow 2 \text{ derajat kebebasan}$$

$$\begin{aligned} x &= x(q_{1,} q_{2,} q_3) \\ y &= y(q_{1,} q_{2,} q_3) \\ z &= z(q_{1,} q_{2,} q_3) \end{aligned} \quad \rightarrow 3 \text{ derajat kebebasan}$$

Jika q berubah dari nilai awal $(q_{1,} q_{2,} \cdots)$ ke nilai tetangga $(q_1 + \delta q_{1,} q_2 + \delta q_{2,} \cdots)$ maka perubahan tersebut kaitannya dengan koordinat kartesan

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \cdots \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \cdots \end{aligned} \qquad (1)$$

Contoh 1. Untuk gerak partikel di dalam bidang, misal dipilih koordinat polar maka $q_1 = r$ dan $q_2 = \theta$ sehingga

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y = y(r,\theta) = r\sin\theta \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial r}\delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta = \cos\theta\,\delta r - r\sin\theta\,\delta\theta \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial r}\delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta = \sin\theta\,\delta r + r\cos\theta\,\delta\theta \end{aligned} \tag{3}$$

jika sistem terdiri atas banyak partikel dengan n derajat kebebasan, koordinat umumnya dinyatakan oleh $q_{1,} q_{2,} \cdots, q_n$ sehingga perubahan konfigurasi dari $q_{1,} q_{2,} \cdots, q_n$ ke $q_1 + \delta q_{1,} q_2 + \delta q_{2,} \cdots, q_n + \delta q_n$ menyebabkan perubahan dalam koordinat kartesan

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_k^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ \delta y_i &= \sum_k^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ \delta z_i &= \sum_k^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k \end{aligned} \tag{4}$$

Gaya Umum

Jika benda bergeser sejauh δr karena adanya pengaruh gaya **F** maka kerja yang dilakukan oleh gaya tersebut adalah

$$\delta w = \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z \quad \text{atau}$$

$$\delta w = \sum_i F_i\delta x_i \tag{5}$$

Ungkapan tersebut tidak hanya untuk 1 partikel saja, tetapi juga untuk banyak partikel. Untuk 1 partikel i: 1 → 3, untuk N partikel i: 1 → 3N. Jika δx_i kemudian dinyatakan dalam koordinat umum, maka

$$\begin{aligned} \delta w &= \sum_i \left(F_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \right) \\ \delta w &= \sum_i \left(\sum_k F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \right) \\ \delta w &= \sum_k \left(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)\delta q_k \\ \delta w &= \sum_k Q_k\delta q_k \end{aligned} \tag{6}$$

dimana

$$Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad \rightarrow \text{Gaya umum} \tag{7}$$

Gaya Umum untuk sistem konsevatif

Partikel yang berada dalam medan konservatif, gayanya dinyatakan oleh

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{8}$$

sehingga gaya umum dalam medan konservatif dinyatakan oleh

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \\ Q_k &= -\frac{\partial V}{\partial q_k} \end{aligned} \tag{9}$$

Misal untuk koordinat polar dimana $q_1 = r$ dan $q_2 = \theta$ maka gaya umumnya adalah

$$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; \quad Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \tag{10}$$

Persamaan Lagrange

Untuk memperoleh persamaan differensial tentang gerak, maka kita mulai dengan ungkapan

$$F_i = m\ddot{x}_i \tag{11}$$

Energi kinetik yang dimiliki oleh N partikel adalah

$$\begin{aligned} T &= \sum_i^N \frac{1}{2} m(\dot{x}_i + \dot{y}_i + \dot{z}_i) \\ &= \sum_i^{3N} \frac{1}{2} m\dot{x}_i \end{aligned} \tag{12}$$

dimana x_i merupakan fungsi koordinat umum $x_i \equiv x_i(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n, t)$, sehingga

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{13}$$

ingat bahwa $i = 1, \cdots, 3N$ $\rightarrow$ menyatakan jumlah partikel

$k = 1, \cdots, n$ $\rightarrow$ menyatakan jumlah derajat kebebasan

Apabila x_i bukan fungsi *t*, maka diperoleh ungkapan

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (14)$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan $\dot{x}_i$ kemudian diturunkan terhadap *t*, maka diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$$
$$=\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \qquad (15)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_k}\right)=\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial\left(\frac{\dot{x}_i}{2}\right)}{\partial q_k}$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan *m*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{m\dot{x}_i^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_k}\right)=m\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial\left(\frac{m\dot{x}_i}{2}\right)}{\partial q_k} \qquad (16)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)=F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial T}{\partial q_k}$$

dengan menjumlah ke seluruh *I*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)=\sum_i F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (17)$$

maka

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)=Q_k+\frac{\partial T}{\partial q_k}} \qquad (18)$$

Persamaan (18) inilah yang disebut persamaan Lagrange. Untuk gerak konservatif dimana $Q=-\frac{\partial V}{\partial q_k}$, maka ungkapan (18) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)=\frac{\partial T}{\partial q_k}-\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (19)$$

Jika diberikan fungsi Lagrange

$$L=T-V \qquad (20)$$

dimana *T* dan *V* dinyatakan dalam koordinat umum $V \equiv V(q_k) \;\rightarrow\; \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$, maka

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{21}$$

sehingga persamaan Lagrange untuk sistem yang konservatif adalah

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{22}$$

Jadi, persamaan diferensial gerak untuk sistem konservatif dapat diperoleh jika fungsi Lagrange dalam set koordinat diketahui.

Jika gaya umumnya tidak konservatif, misal Q'_k (misal ada gaya gesek) dan sebagian dapat diturunkan → fungsi potensial *V* yaitu

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{23}$$

maka dari $L = T - V$ diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = Q'_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{24}$$

Aplikasi persamaan Lagrange

Untuk mengaplikasikan persamaan Lagrange maka langkah-langkahnya adalah

1. Pilih koordinat yang sesuai untuk menggambarkan konfigurasi dari sistem tersebut.
2. Tentukan T sebagai fungsi koordinat dan turunan waktu.
3. Jika sistem konservatif maka carilah V sebagai fungsi koordinat, jika sistem nonkonservatif maka carilah gaya umumnya → Q_k .
4. Persamaan diferensial gerak diberikan oleh
   1. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ atau $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = Q'_k + \frac{\partial L}{\partial q_k}$.

Contoh 2. Osilator harmonik

Ditinjau sebuah osilator harmonik dimana terdapat gaya redaman yang sebanding dengan kecepatan. Jadi sistem adalah nonkonservatif. Jika *x* adalah pergeseran, maka fungsi Lagrangenya adalah

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

dimana *m* adalah massa benda dan *K* adalah parameter stiffness. Dengan mengaplikasikan pers. Lagrange, dimana

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) = m\dot{x} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -Kx$$

dengan kehadiran gaya redaman yang sebanding dengan kecepatan yaitu $-c\dot{x}$ maka persamaan geraknya menjadi

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -c\dot{x} - Kx$$
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

Conto 3. Partikel tunggal di dalam medan central

Marilah kita mencari persamaan gerak Lagrange untuk partikel yang bergerak di dalam bidang di bawah medan central. Dalam hal ini kita memilih koordinat polar $q_1 = r$ dan $q_2 = \theta$, maka

$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e_r}$$
$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right)$$
$$V = V(r)$$
$$L = T - V = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

Kemudian

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\theta^2 - f(r);$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Karena sistemnya adalah konservatif, maka persamaan geraknya adalah

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = mr\theta^2 - f(r) \quad \rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\theta^2 + f(r) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad \rightarrow \quad mr^2\dot{\theta} = constan$$

Contoh 5. Mesin Atwood

Diketahui mesin atwood terdiri atas dua massa m_1 dan m_2 yang diikat pada masing-

masing ujungnya. Sistem hanya memiliki 1 derajat kebebasan. Koordinat x mewakili konfigurasi sistem, dimana x adalah jarak vertikal massa m_1 dari katrol. Laju anguler katrol adalah $\dot{x}/a$, dengan a adalah radius. Energi kinetik sistem adalah

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{a^2}+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2$$

dimana I adalah momen inersia katrol. Energi potensial sistem adalah

$$V=-m_1gx-m_2g(l-x)$$

Fungsi Lagrangenya adalah

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{a^2}+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+m_1gx-m_2g(x-l)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m_1\dot{x}+I\frac{\dot{x}}{a^2}+m_2\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=m_1g-m_2g$$

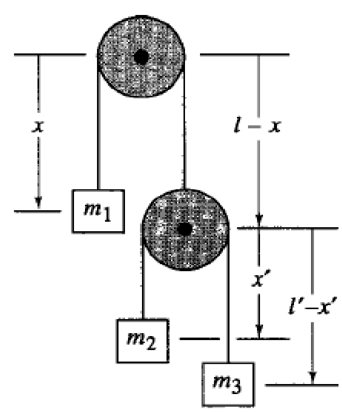
sehingga menghasilkan

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}+I\frac{\dot{x}}{a^2}+m_2\dot{x})=(m_1+m_2)g$$

$$(m_1+m_2+\frac{I}{a^2})\ddot{x}=(m_1-m_2)g$$

$$\ddot{x}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{I}{a^2}}g$$

Dari ungkapan percepatan tersebut dapat diketahui bahwa apabila $m_1>m_2$ maka m_1 akan bergerak turun dengan percepatan konstan, sebaliknya jika $m_1<m_2$ maka m_1 akan bergerak ke atas dengan percepatan konstan.



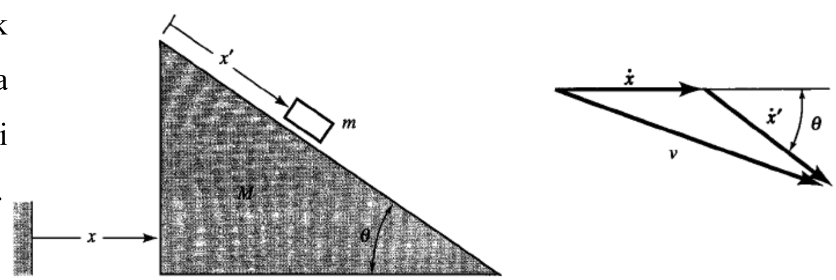
Contoh 6. Katrol ganda

Diketahui sistem katrol ganda, dimana satu katrol bergerak bebas. Sistem ini jelas memiliki dua derajat kebebasan. Kita akan menentukan konfigurasi sistem dengan koordinat x dan x'. *D*alam kasus ini, diabaikan massa dari katrol sehingga sekarang kita dapat menentukan energi kinetik dan potensialnya sebagai berikut

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}'-\dot{x})^2+\frac{1}{2}m_3(\dot{x}+\dot{x}')^2$$
$$V=-m_1 gx-m_2 g(l-x+x')-m_3 g(l-x+l'-x')$$
$$L=T-V$$
$$=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}'^2-2\dot{x}\dot{x}'+\dot{x}^2)+\frac{1}{2}m_3(\dot{x}^2+2\dot{x}\dot{x}'+\dot{x}'^2)+m_1 gx+m_2 g(l-x+x')+m_3 g(l-x+l'-x')$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m_1\dot{x}+m_2(-\dot{x}'+\dot{x})+m_3(\dot{x}+\dot{x}') \qquad \rightarrow\frac{\partial L}{\partial x}=m_1 g-m_2 g-m_3 g$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x} \qquad \rightarrow\rightarrow(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+(m_3-m_2)\ddot{x}'=(m_1-m_2-m_3)g$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}'}=m_2\dot{x}'-m_2\dot{x}+m_3\dot{x}+m_3\dot{x}' \qquad \rightarrow\frac{\partial L}{\partial x'}=m_2 g-m_3 g$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=\frac{\partial L}{\partial x} \qquad \rightarrow\rightarrow m_2(\ddot{x}'-\ddot{x})+m_3(\ddot{x}+\ddot{x}')=(m_2-m_3)g$$

Contoh 6. Gerak partikel pada bidang miring yang sedang bergerak

Ditinjau sebuah partikel bergerak pada bidang miring yang licin, dimana bidang tersebut juga sedang bergerak. Disini terdapat 2 derajat kebebasan yaitu *x* dan *x'*. Tentukan persamaan gerak partikel tersebut.



Energi kinetik dan energi potensial sistem masing-masing adalah

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta+\dot{x}'^2)$$
$$V=-mgx'\sin\theta$$
$$L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta+\dot{x}'^2)+mgx'\sin\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=M\dot{x}+m\dot{x}+m\dot{x}'\cos\theta, \qquad \frac{\partial L}{\partial x}=0 \qquad \rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)=0$$
$$M\ddot{x}+m\ddot{x}+m\ddot{x}'\cos\theta=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}'}=m\dot{x}\cos\theta+m\dot{x}', \qquad \frac{\partial L}{\partial x'}=mg\sin\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}'}\right)=\frac{\partial L}{\partial x'}\rightarrow\rightarrow m\ddot{x}\cos\theta+m\ddot{x}'=mg\sin\theta$$

dengan menyelesaikan untuk $\ddot{x}$ dan $\ddot{x}'$ diperoleh

$$\ddot{x}=\frac{-g\sin\theta\cos\theta}{\frac{m+M}{m}-\cos\theta}, \qquad \ddot{x}'=\frac{g\sin\theta}{1-\frac{m\cos^2\theta}{m+M}}$$

Momentum umum. Koordinat

Pandanglah sebuah partikel bergerak dalam garis lurus. Energi kinetik yang dimiliki adalah

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Momentum partikel dalam diperoleh dari besaran $\partial T/\partial\dot{x}$, yaitu

$$p=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} \tag{26}$$

Dalam kasus dimana sistem dideskripsikan dalam koordinat umum $q_1, q_2, q_3, ..., q_n$, maka besaran p_k didefinisikan oleh

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k} \tag{27}$$

dan disebut momentum umum. Misal, salah satu koordinat tidak dinyatakan secara eksplisit di dalam *L* (misal q_λ , maka

$$\dot{p}_\lambda=\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}=0 \tag{28}$$

atau $p_\lambda=0$. Koordinat q_λ dikatakan sebagai koordinat yang dapat diabaikan. Momentum umum yang bersesuaian dengan koordinat yang diabaikan merupakan konstanta geraka sistem. Sebagai contoh, untuk partikel yang bergerak dalam bidang miring yang licin bahwa koordinat *x* (posisi bidang) tidak masuk dalam fungsi Lagrange *L*. Dalam hal ini, koordinat *x* adalah koordinat yang diabaikan, dan

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=M\dot{x}+m\dot{x}+m\dot{x}'\cos\theta=constant$$

p_x disini merupakan total komponen momentum linier pada koordinat *x,* dan berarti tidak ada gaya horizontal yang bekerja partikel sehingga momentumnya konstan.

Contoh lain untuk koordinat terabaikan adalah pada gerak partikel di dalam medan central. Dalam koordinat polar

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-V(r)$$

dalam hal ini θ adalah koordinat terabaikan sehingga

$$p_\theta=mr^2\dot{\theta}=constant$$

yang merupakan momentum anguler di sekitar origin.

Contoh 8. Pendulum sferis

Ditinjau sebuah benda bergerak bebas di dalam permukaan mangkok. Hal ini bisa digambarkan sebagai sebuah bandul dengan panjang tali l dan dapat bergerak bebas melintasi lintasan yang membentuk sudut θ atau φ. Dalam hal ini benda memiliki 2 derajat kebebasan. Konfigurasi benda dapat dijelaskan dengan koordinat θ dan φ. Energi kinetik dan energi potensial yang dimiliki oleh benda adalah

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) \quad \text{dan} \quad V=mgl\left(1-\cos\theta\right)$$

dengan mengingat bahwa $\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta+r\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi$

$$L=T-V=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)-mgl\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta} \quad \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\ddot{\theta}\,; \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta}=ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta-mgl\sin\theta$$

$$Jadi, \quad ml^2\ddot{\theta}=ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta-mgl\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta \quad \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta\,; \qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

$$Jadi, \quad p_\varphi=0$$

dengan demikian dalam kasus ini φ merupakan koordinat yang terabaikan.

Jika diperhatikan, ketika tidak terjadi perubahan pada kordinat $\varphi \rightarrow \dot{\varphi}=0$, maka kita memiliki

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

yang tidak lain merupakan persamaan bandul sederhana.

Prinsip Variasi Hamilton. Cara lain menurunkan persamaan Lagrange

Sejauh ini, pengkajian terhadap mekanika didasarkan pada hukum gerak Newton. Dalam bagian awal dari bab ini, ketika kita menurunkan persamaan Lagrange, kita menggunakan hukum kedua Newton sebagai asumsi. Nah, dalam bagian ini kita akan menurunkan persamaan Lagrange tersebut bukan berdasarkan hukum kedua Newton melainkan dengan meode baru yang disebut *prinsip variasi Hamilton.* Sir William R. Hamilton menjelaskan bahwa gerak setiap sistem terjadi dengan cara dimana integral

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{29}$$

selalu dalam asumsi bernilai ekstrem, dimana $L = T - V$ merupakan fungsi Lagrange dari sistem tersebut. Dengan kata lain dapat dijelaskan bahwa prinsip Hamilton menyatakan bahwa semua kemungkinan sistem yang dapat berubah berada dalam interval waktu berhingga $t_2 - t_1$ bisa bernilai maksimum atau minimum. Pernyataan tersebut dapat dinyatakan dalam ungkapan matematis

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \tag{30}$$

dimana δ menyatakan variasi sempit. Variasi ini diperoleh dengan cara mengambil lintasan integrasi yang berbeda dengan memvariasi koodinat umum dan kecepatan umum sebagai fungsi *t.* Untuk menunjukkan bahwa persamaan di atas akan menuju langsung ke persamaan gerak Lagrange, maka kita akan menghitung variasi tersebut secara eksplisit dengan mengasumsikan bahwa *L* sebagai fungsi koordinat umum q_k dan kecepatan umum $\dot{q}_k$.

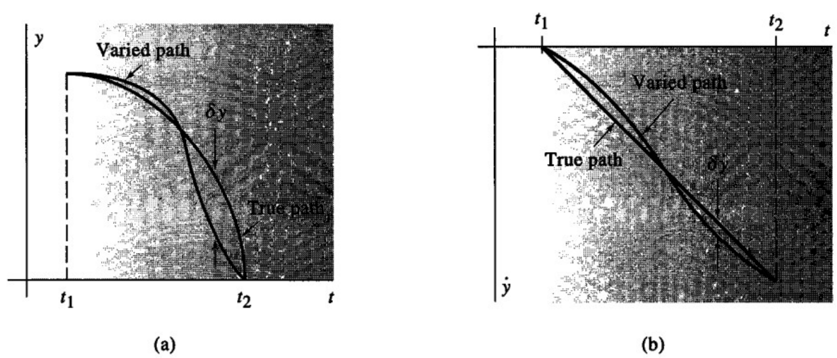


Figure 10.1.1 (a) Variation of the coordinate of a particle from its true path taken in free-fall. (b) Variation in the speed of a particle from the true value taken during free-fall.

Selanjutnya, kita punya

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt = 0$$

Sekarang δq_k sama dengan selisih dari dua fungsi waktu berlainan, sehingga

$$\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \delta q_k$$

Dengan mengintegralkan suku terakhir dengan metode integral bagian maka diperoleh

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \left[\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \, dt$$

tetapi, untuk nilai pasti dari limit t_1 dan t_2, maka variasi $\delta q_k = 0$ pada t_1 dan t_2 sehingga menghasilkan nilai nol untuk suku pertama. Dengan demikian

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \delta q_k \, dt = 0 \qquad (31)$$

Jika koordinat umum q_k semuanya sembarang, maka variasinya δq_k juga sembarang. Oleh karena itu suku di dalam integral harus sama dengan nol. jadi

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Persamaan tersebut tidak lain adalah persamaan gerak Lagrange. Penurunan di atas telah diasumsikan bahwa fungsi potensil ada atau sistem konservatif.

Fungsi Hamiltonian. Persamaan Hamiltonian

Pandanglah fungsi berikut dalam koordinat umum

$$H = \sum \dot{q}_k \, p_k - L \qquad (32)$$

Untuk sistem dinamik sederhana, *T* merupakan fungsi kuadrat dari $\dot{q}_k$ dan *V* adalah fungsi *q* saja. Jadi

$$L = T(q_k, \dot{q}_k) - V(q_k) \qquad (33)$$

Dari teorema Euler untuk fungsi homogen dimana

$$x_1 \frac{df}{dx_1} + x_2 \frac{df}{dx_2} + x_3 \frac{df}{dx_3} + \ldots + x_n \frac{df}{dx_n} = nf \qquad (34)$$

maka kita punya

$$\sum_k \dot{q}_k \, p_k = \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

Sehingga

$$H=\sum \dot{q}_k\, p_k - L = 2T-(T-V)=T+V \tag{35}$$

yakni bahwa fungsi *H* sama dengan energi total dari sistem yang ditinjau.

Jika terdapat *n* persamaan

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \qquad k=1,2,3,\ldots,n$$

sebagai penyelesaian dari $\dot{q}$ dalam *p* dan *q:*

$$\dot{q}_k=\dot{q}_k(p_k,q_k)$$

Dari persamaan ini kita dapat menyatakan *H* sebagai fungsi *p* dan *q*, yaitu

$$H(p_k,q_k)=\sum_k p_k\dot{q}_k(p_k,q_k)-L$$

Sekarang kita menghitung variasi dari fungsi *H* yang bersesuaian dengan δp_k , δq_k :

$$\delta H=\sum_k\left[p_k\delta\dot{q}_k+\dot{q}_k\delta p_k-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k\right]$$

Suku pertama dan ketiga hilang karena $p_k=\partial L/\partial\dot{q}_k$. Mengingat $\dot{p}_k=\partial L/\partial q_k$, maka diperoleh

$$\delta H=\sum_k\left[\dot{q}_k\delta p_k-\dot{p}_k\delta q_k\right]$$

Sekarang variasi *H* dapat dinyatakan kembali oleh persamaan

$$\delta H=\sum_k\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k-\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k\right]$$

sehingga

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_k}&=\dot{q}_k\\ \frac{\partial H}{\partial q_k}&=-\dot{p}_k\end{aligned} \tag{36}$$

Ungkapan (36) inilah yang disebut persamaan gerak kanonik Hamilton.

Contoh 10. Dapatkan persamaan gerak Hamilton untuk osilator harmonik 1D.

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2, \qquad V=\frac{1}{2}Kx^2$$

$$p=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}, \quad \dot{x}=\frac{p}{m}$$

sehingga $H=T+V=\dfrac{1}{2m}p^2+\dfrac{K}{2}x^2$

Persamaan geraknya

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$$

$$\frac{p}{m} = \dot{x}\,, \qquad Kx = -\dot{p}$$

Dengan menggunakan persmaan pertama, maka persamaan kedua dapat ditulis menjadi

$$Kx = -\frac{d}{dt}(m\,\dot{x}) \qquad \rightarrow m\,\ddot{x} + Kx = 0$$

Contoh 11. Dapatkan persamaan gerak hamilton untuk partikel di dalam medan sentral. Energi kinetik dan potensial partikel adalah

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \qquad V = V(r)$$

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\,\dot{r} \rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}; \qquad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r)$$

Persamaan Hamiltonian

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{r} \qquad \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r; \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -p_{\dot{theta}};$$

$$\frac{p}{m} = \dot{x}\,, \qquad Kx = -\dot{p}$$

Selanjutnya

$$p_r = \dot{r};$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} - \frac{p_{\theta^2}}{mr^3} = -\dot{p}_r;$$

$$\frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta};$$

$$0 = -\dot{p}_\theta$$

Persamaan terakhir memberikan momentum anguler yang konstan

$$p_\theta = konstan = mr^2\dot{\theta} = mh \quad \text{dan}$$

$$m\,\ddot{r} = \dot{p}_r = \frac{mh^2}{r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r}$$